



**HAL**  
open science

# Inégalité de Poincaré cinétique. Application à la neutronique.

Pascal Azerad, Stéphane Brull

► **To cite this version:**

Pascal Azerad, Stéphane Brull. Inégalité de Poincaré cinétique. Application à la neutronique.. 2008. hal-00281738v2

**HAL Id: hal-00281738**

**<https://hal.science/hal-00281738v2>**

Preprint submitted on 5 Jun 2008 (v2), last revised 4 May 2009 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Inégalité de Poincaré cinétique. Application à la neutronique.

Pascal Azerad et Stéphane Brull\*

5 juin 2008

## Résumé

Dans cette note, nous établissons une inégalité de type Poincaré pour l'équation de transport. Cette inégalité est ensuite appliquée à l'équation de la neutronique pour laquelle on obtient un théorème d'existence.

## Abstract

### A kinetic Poincaré inequality. Application to neutronics.

In this note we prove an inequality of Poincaré type for the transport equation. This inequality is then applied to the equation of neutronics to prove an existence theorem.

## Abridged English version

The aim of this note is to establish the following kinetic Poincaré inequality

**Property 0.1** *Let  $T > 0$  and  $v \in \mathbb{R}^3$  a constant vector. Let  $\mathcal{R}$  be a bounded smooth open set of  $\mathbb{R}^3 \times ]0, T[$ . Denote by  $R > 0$  a nonnegative real number such that  $\mathcal{R} \subset B(0, R) \times ]0, T[$ . Let  $f := f(t, x) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$ . We have the following Poincaré inequality*

$$\|f\|_{L^2_{t,x}} \leq 2(T + R) \left\| \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right\|_{L^2_{t,x}}. \quad (1)$$

This inequality is then applied to the following kinetic equation of the neutronic

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) u(t, x, v) = \mathcal{C}(u)(t, x, v), \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

---

\*I3M, Place Eugène Bataillon, UM2, CC 051 34095 Montpellier, France. Email: [azerad@math.univ-montp2.fr](mailto:azerad@math.univ-montp2.fr), [brull@cmi.univ-mrs.fr](mailto:brull@cmi.univ-mrs.fr)

where  $\Omega$  is an open set of  $\mathbb{R}^3$  and  $u = u(t, x, v)$  is the distribution of particles at time  $t$ , position  $x$  and velocity  $v$ .  $\mathcal{C}$  defined by

$$\mathcal{C}(u) = \int_{\mathbb{R}^3} k(x, v, v')u(t, x, v')dv' - \nu(x, v)u(t, x, v). \quad (3)$$

The boundary conditions for  $f$  is the following given inflow profile

$$u(t, \sigma, v) = u_b(t, \sigma, v) \quad \text{on} \quad \Gamma^-, \quad (4)$$

where  $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega, v \cdot n < 0\}$ . The initial conditions for  $f$  are

$$u(t = 0, x, v) = u_0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

The equation (3) describes the transport of neutrons in the core of a nuclear reactor  $\Omega$ . The scattering kernel  $k$  describes the collisions between the particles and the medium and  $\nu$  represents the collision frequency.

As a consequence of this inequality, we prove an existence theorem for the problem (2, 4, 5) by using a variational approach when  $\nu$  is small. A second result of this note is the following

**Theorem 0.2** *Suppose that  $k \in L_v^2(\mathbb{R}^3; L_x^\infty(\Omega; L_v^2(\mathbb{R}^3)))$  and  $\nu \in L_{x,v}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ . For any  $T > 0$  problem (2, 3, 4, 5) has a solution in  $L_{t,x,v}^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$  for  $\nu$  small enough.*

The proof of this Theorem is given in the french version, by assuming that  $\nu$  is small. Let us denote that the usual assumption that

$$\nu(x, v) - \int_V k(x, v, v')dv' > \alpha$$

upon which relies the classical proof is not physically relevant. Ours is performed by proving a kinetic Poincaré inequality and applying Banach fixed point theorem. Remark that our approach is different from the classical proofs which use semi-group theory and Duhamel formula.

## 1 Introduction

Le but de cette note est d'établir une inégalité de Poincaré de type cinétique. Pour cela, nous utiliserons une méthode variationnelle en établissant une inégalité de type Poincaré courbe. Cette démarche est inspirée de la méthode STILS (Space-Time Integrated Least Squares) pour l'équation de transport ([2], [3], [4]), où les auteurs étudient l'équation de transport par une approche variationnelle et démontrent une inégalité de type Poincaré courbe. Cette méthode est ensuite appliquée à l'équation cinétique suivante issue de la neutronique ([6]) prise sur  $\Omega$ , ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) u(t, x, v) = \mathcal{C}(u)(t, x, v) \quad (6)$$

avec

$$\mathcal{C}(u) = \int_{\mathbb{R}^3} k(x, v, v') u(t, x, v') dv' - \nu(x, v) u(t, x, v). \quad (7)$$

Physiquement, l'équation (6) décrit le transport de neutrons dans le coeur d'un réacteur nucléaire  $\Omega$ .  $u(t, x, v)$  représente la distribution de particules possédant au temps  $t$  la position  $x$  et la vitesse  $v$ . Le noyau  $k$  décrit les collisions entre les particules et le milieu et la fonction  $\nu$  représente leur fréquence de collision. Le domaine  $\Omega$  est supposé être de classe  $C^1$  de bord  $\Gamma$ . Les conditions de bord pour  $u$  sont de type données aux bords rentrants

$$u(t, \sigma, v) = u_b(t, \sigma, v) \quad \text{sur} \quad \Gamma^- \quad (8)$$

où  $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega, v \cdot n < 0\}$  et  $n$  désigne la normale à  $\partial\Omega$ . Les conditions initiales pour  $u$  sont

$$u(t = 0, x, v) = u_0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3. \quad (9)$$

**Théorème 1.1** *Supposons que  $k \in L_v^2(\mathbb{R}^3; L_x^\infty(\Omega; L_v^2(\mathbb{R}^3)))$  et  $\nu \in L_{x,v}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ . Alors pour tout  $T > 0$  le problème (6, 7, 8, 9) possède pour  $\nu$  suffisamment petit une solution dans  $L_{t,x,v}^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ .*

## 2 Inégalité de Poincaré cinétique.

On établit dans ce paragraphe une inégalité de Poincaré de type cinétique. Pour cela, on définit dans un premier temps le cadre fonctionnel relatif à cette inégalité. Soit l'espace de Sobolev anisotrope :  $H(a, \mathcal{R}) = \{f \in L^2(\mathcal{R}); a \cdot \nabla_{t,x} f \in L^2(\mathcal{R})\}$ , muni de la norme  $\|f\|_{H(a, \mathcal{R})} = \|f\|_{L_{t,x}^2(\mathcal{R})} + \|a \cdot \nabla_{t,x} f\|_{L_{t,x}^2(\mathcal{R})}$ . Le vecteur  $a = (1, v)$  étant *constant*, on montre aisément que  $H(a, \mathcal{R})$  est un espace de Hilbert et que les fonctions  $C^\infty$  sont denses dans  $H(a, \mathcal{R})$ . Comme  $a = (1, v)$  est à divergence nulle,  $f \in H(a, \mathcal{R})$  implique que  $f \cdot a \in H(\text{div}, \mathcal{R}) = \{\varphi \in L^2(\mathcal{R}); \nabla_{t,x} \cdot \varphi \in L^2(\mathcal{R})\}$ . On dispose ainsi d'un opérateur trace normal  $\gamma_n : f \in H(a, \mathcal{R}) \mapsto f(a \cdot n) \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{R})$  où  $n = (n_t, n_x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$  désigne la normale unitaire sortant de  $\partial\mathcal{R}$ . Cela permet alors de définir l'espace

$$H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-) = \{f \in H(a, \mathcal{R}); f(a \cdot n) = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{R}^-\}.$$

Tout repose ensuite sur l'inégalité de Poincaré oblique suivante, où la constante est *indépendante* de  $v$ .

**Propriété 2.1** (*Poincaré cinétique*) *Soit  $T > 0$  et  $v \in \mathbb{R}^d$  un vecteur constant. Soit  $\mathcal{R}$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d \times (0, T)$ . On désigne par  $R > 0$  un réel tel que  $\mathcal{R} \subset B(0, R) \times (0, T)$ . Soit  $f := f(t, x) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$ . On a alors l'inégalité de Poincaré oblique :*

$$\|f\|_{L_{t,x}^2} \leq 2(T + R) \left\| \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right\|_{L_{t,x}^2}. \quad (10)$$

Preuve (Propriété 2.1). Soit  $w(t, x) := (t - T) + x \cdot \mathbf{v} - R|\mathbf{v}|$ . Ainsi pour tout  $(x, t) \in \mathcal{R}$ ,  $w(t, x) \leq 0$  et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla_x w = 1 + |\mathbf{v}|^2.$$

D'après la formule de Stokes, on obtient alors

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) (w \cdot f^2) = \int_{\partial \mathcal{R}} w f^2 (n_t + v \cdot n_x).$$

Or, par hypothèse  $f$  est nul sur  $(\partial \mathcal{R})^-$ . Donc, comme  $w \leq 0$  et que  $f^2 \geq 0$ , il vient :

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) (w \cdot f^2) = \int_{(\partial \mathcal{R})^+} w f^2 (n_t + v \cdot n_x) \leq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) (w \cdot f^2) &= \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla_x w \right) f^2 + 2w f \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right) \\ &= (1 + |\mathbf{v}|^2) f^2 + 2w f \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\int \int_Q (1 + |\mathbf{v}|^2) f^2 \leq 2 \|w\|_{L^\infty} \int \int_Q f \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_{L^2_{t,x}} \leq \frac{2\|w\|_{L^\infty}}{(1 + |\mathbf{v}|^2)} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right\|_{L^2_{t,x}}.$$

Enfin on majore  $|w|_{L^\infty} \leq T + 2R|\mathbf{v}|$ . Or,  $\frac{T+2R|\mathbf{v}|}{1+|\mathbf{v}|^2} \leq T + R$ . □

*Remark 1* Insistons sur le fait que la constante est indépendante de  $v$ .

### 3 Preuve du théorème 1.1.

On considère le problème suivant pour tout  $v \in \mathbb{R}^3$ . Etant donné  $G(\cdot, \cdot, v) \in L^2((0, T) \times \Omega)$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) u = G(t, x, v), \quad x \in \Omega, t \in ]0, T[, \quad (11)$$

$$u(t = 0, x, v) = u_0(x, v), \quad \text{sur } \mathbb{R}^3, \quad (12)$$

$$u(t, \sigma, v) = u_b(t, \sigma, v), \quad \text{sur } \Gamma^-. \quad (13)$$

Soit  $\mathcal{R} = ]0, T[ \times \Omega$ . Le problème (11, 12, 13) est remplacé par le problème

$$\begin{aligned} a \cdot \nabla_{t,x} u &= G(\cdot, \cdot, v) \text{ dans } \mathcal{R}, \\ u(t, \sigma) &= g(\sigma) \text{ sur } (\partial\mathcal{R})^- = (\{0\} \times \Omega) \cup (]0, T[ \times \Gamma^-), \end{aligned}$$

avec  $a = (1, v)$ ,  $\nabla_{t,x} = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_x)$  et  $(\partial\mathcal{R})^- = \{(t, x) \in \mathcal{R}; a \cdot n < 0\}$  où  $n = (n_t, n_x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$  désigne la normale unitaire sortant de  $\partial\mathcal{R}$ . Afin d'effectuer un changement d'inconnue pour se ramener à des conditions de bord de type Dirichlet homogène, on démontre le lemme suivant :

**Lemma 3.1** *Le vecteur  $v \in \mathbb{R}^3$  étant fixé, il existe  $g(t, x, v)$  solution du problème*

$$\begin{aligned} a \cdot \nabla_{t,x} g &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ g(0, x, v) &= u_0(x, v), \quad x \in \Omega, \\ g(t, \sigma, v) &= u_b(t, \sigma, v), \quad \sigma \in \Gamma^-, \quad t \in ]0, T[. \end{aligned}$$

*De plus, si  $u_0(\cdot, v) \in L^2(\Omega)$  et si  $u_b(\cdot, \cdot, v)$  se prolonge sur  $[0, T] \times \partial\Omega$  en une fonction  $\in L^2([0, T] \times \partial\Omega)$  alors  $g(\cdot, \cdot, v) \in L^2([0, T] \times \Omega)$ .*

Preuve (Lemme 3.1.) Soit  $(t, x) \in ]0, T[ \times \Omega = \mathcal{R}$  et  $\gamma(t, x)$  l'intersection entre la droite caractéristique passant par  $(t, x)$  et  $\partial\mathcal{R}^-$ . Soit  $g(t, x, v)$  définie par  $g(t, x, v) = u_0(\gamma(t, x), v)$  si  $\gamma(t, x) \in \{0\} \times \Omega$  et  $g(t, x, v) = u_b(\gamma(t, x), v)$  si  $\gamma(t, x) \in ]0, T[ \times \Gamma^-$ . Par construction de  $g$  on a

$$|g(t, x, v)| \leq \|u_0(\cdot, v)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_b(\cdot, \cdot, v)\|_{L^\infty([0, T] \times \partial\Omega)}.$$

Comme  $[0, T] \times \Omega$  est borné on obtient le résultat.  $\square$

Afin d'obtenir des conditions de bord de type Dirichlet homogène, on effectue le changement d'inconnu  $f = u - g$  où  $g$  est un relèvement défini au lemme 3.1.  $f$  devient alors solution du problème suivant

$$a \cdot \nabla_{t,x} f(t, x, v) = G(t, x, v) \tag{14}$$

$$f(t, \sigma, v) = 0, \tag{15}$$

On a alors proposition suivante

**Proposition 3.1** *Le problème (14, 15) possède une solution  $f$  vérifiant*

$$\|f\|_{L_{t,x}^2} \leq C \|G\|_{L_{t,x}^2} \tag{16}$$

où  $C$  est une constante strictement positive, indépendante de la variable  $v$  et majorée par  $2(T + R)$ .

*Remarque 1* Cette inégalité est obtenue dans l'esprit de la méthode STILS développée dans ([2], [3], [4]). Mais la preuve ci-dessous est simplifiée et adaptée au cadre cinétique. De plus, elle donne une constante  $C$  indépendante de la variable  $v$ , contrairement à ([2]).

Preuve (Proposition 3.1). Pour chaque  $v$  fixé, on considère alors la forme bilinéaire suivante :

$$\mathcal{B}(f, g) = \int \int_{\mathcal{R}} (a \cdot \nabla_{t,x} f) (a \cdot \nabla_{t,x} g) dt dx$$

et la forme linéaire  $L(g) = \int \int_{\mathcal{R}} G(a \cdot \nabla_{t,x} g)$ . La formulation STILS ([3, 2]) du problème s'écrit alors : Etant donné  $G \in L^2(\mathcal{R})$ , trouver  $f \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$  telle que

$$\mathcal{B}(f, g) = L(g), \quad \forall g \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-). \quad (17)$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré 2.1, la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  est coercive. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on obtient ainsi que le problème (17) possède une unique solution. Il reste à prouver que  $f$  vérifie (14, 15). Pour cela, il suffit de montrer que  $\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \varphi \in L^2_{t,x}; \varphi \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)\}$  est dense dans  $L^2_{t,x}$ . Nous reproduisons alors la preuve donnée dans [1] (théorème 16, pp. 83-84). Soit  $\psi \in L^2_{t,x}$  telle que

$$\int \int_{\mathcal{R}} \psi \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \varphi \right) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-).$$

On commence par prendre  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$  et on obtient immédiatement que  $\frac{\partial\psi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \psi = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$ . Puis on prend  $\varphi$  arbitraire dans  $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{R}})$ , nul sur  $\partial\mathcal{R}^-$  et on obtient que  $\psi(a \cdot n) = 0$  sur  $\partial\mathcal{R}^+$  donc que  $\psi \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^+)$ . Enfin, on applique l'inégalité de Poincaré oblique de la propriété 2.1 à l'écoulement *dual*, i.e.  $v$  remplacé par  $-v$ ,  $t$  remplacé par  $T - t$  de sorte que  $\partial\mathcal{R}^+$  soit remplacé par  $\partial\mathcal{R}^-$ . On obtient ainsi

$$\|\psi\|_{L^2_{t,x}} \leq 2(T + R) \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \psi \right\|_{L^2_{t,x}} = 0.$$

Ainsi,  $\psi = 0$  dans  $L^2_{t,x}$ . □

Fin de la preuve du théorème 1.1. Nous allons effectuer un adimensionnement en temps, en espace et en vitesse puis appliquer un théorème de point fixe. On pose  $t = \tau \hat{t}$ ,  $x = \lambda \hat{x}$ ,  $v = \frac{\lambda}{\tau} \hat{v}$ . On a alors  $\frac{\partial}{\partial t} = \tau \frac{\partial}{\partial \hat{t}}$  et  $\frac{\partial}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$ . Ainsi  $\hat{f}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}) = \hat{f}$  vérifie l'équation

$$\left( \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \cdot \nabla_{\hat{x}} \right) \hat{f}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}) = \tau \left( \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + v \cdot \nabla_x \right) f(t, x, v) = \tau G(t, x, v)$$

et l'opérateur de collision correspondant est alors

$$\mathcal{C}(\hat{g}) = \tau \mathcal{C}(g) = \left( \frac{\lambda^3}{\tau^2} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^3} \hat{k}(\hat{x}, \hat{v}, \hat{v}') \hat{g}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}') d\hat{v}' \right) - \tau \hat{v}(\hat{x}, \hat{v}) \hat{g}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}).$$

On prouve aisément que

$$\|\mathcal{C}(\hat{g})(\cdot, \cdot, \hat{v})\|_{L^2_{\hat{t}, \hat{x}}} \leq \frac{\lambda^3}{\tau^2} \|\hat{k}(\cdot, \hat{v}, \cdot)\|_{L^\infty_{\hat{x}} L^2_{\hat{v}'}} \|\hat{g}\|_{L^2_{\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}}} + \tau \|\hat{v}\|_{L^\infty_{\hat{x}, \hat{v}}} \|\hat{g}(\cdot, \cdot, \hat{v})\|_{L^2_{\hat{t}, \hat{x}}}.$$

Dans cette partie, on notera  $\|\cdot\|$  la norme  $L^2_{t,\hat{x},\hat{v}}$  prise sur  $(0, T/\tau) \times \Omega/\lambda \times \mathbb{R}^3$ . On considère ensuite l'application  $S : \hat{g} \mapsto \mathcal{C}(\hat{g})$  et  $\Lambda : \hat{G} \mapsto \hat{f}$ , où  $\hat{f}$  est solution du problème (14, 15) et on définit  $\Theta$  par  $\Theta = \Lambda \circ S$ . Nous allons prouver que  $\Theta$  applique  $\bar{B}(0, r)$  dans elle-même et est une contraction. Soit  $\hat{g} \in \bar{B}(0, r)$ . Appliquons la propriété 3.1 en prenant  $\hat{G} = \mathcal{C}(\hat{g})$ . Nous obtenons

$$\|\hat{f}\| \leq 2 \left( \frac{T}{\tau} + \frac{R}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda^3}{\tau^2} \|\hat{k}\|_{L^2_{\hat{v}}(L^\infty_{\hat{x}} L^2_{v'})} + \tau \|\hat{v}\|_{L^\infty_{\hat{x}, \hat{v}}} \right) \|\hat{g}\|.$$

Or la condition  $2 \left( \frac{T}{\tau} + \frac{R}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda^3}{\tau^2} \|\hat{k}\|_{L^2_{\hat{v}}(L^\infty_{\hat{x}} L^2_{v'})} + \tau \|\hat{v}\|_{L^\infty_{\hat{x}, \hat{v}}} \right) < 1$  revient après avoir posé  $X = \frac{\lambda}{\tau}$ ,  $K = \|\hat{k}\|_{L^2_{\hat{v}}(L^\infty_{\hat{x}} L^2_{v'})}$  et  $\eta = \|\hat{v}\|_{L^\infty_{\hat{x}, \hat{v}}}$  à trouver  $X > 0$  tel que

$$\frac{2TK}{R} X^4 + 2KX^3 + \frac{(2T\eta - 1)}{R} X + 2\eta < 0.$$

Or, la suite de polynômes  $P_\eta$  définie par

$$P_\eta(X) = \frac{2TK}{R} X^4 + 2KX^3 + \frac{(2T\eta - 1)}{R} X + 2\eta,$$

converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  lorsque  $\eta$  tend vers 0 vers la fonction polynôme  $P$  définie par

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{2TK}{R} X^4 + 2KX^3 - \frac{1}{R} X \\ &= X \left( \frac{2TK}{R} X^3 + 2KX^2 - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Or il existe  $X_0 > 0$  tel que  $P(X_0) < 0$ . Donc  $P_\eta(X_0) < 0$  pour  $\eta = \|\hat{v}\|_{L^\infty_{\hat{x}, \hat{v}}}$  suffisamment petit. D'où  $\hat{f} \in \bar{B}(0, r)$ . Par un raisonnement analogue, on obtient que  $\Theta$  est une contraction. Il suffit ensuite de revenir aux variables initiales  $t, x, v$  pour obtenir la solution  $f(t, x, v) = \hat{f}(\frac{t}{\tau}, \frac{x}{\lambda}, \frac{v}{\lambda})$  cherchée.  $\square$

*Remarque 2* Cette technique de preuve ne peut pas s'appliquer à l'équation de Boltzmann à cause de la non linéarité du terme de collision.

## Références

- [1] P. Azerad, *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport* Thèse, Université de Neuchâtel (1996) on line on <http://doc.rero.ch>.
- [2] P. Azerad, J. Pousin *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport* C.R.Acad.Sci.Paris 322 (1996), 721–727.
- [3] P. Perrochet, P. Azerad *Space-time integrated least squares : Solving a pure advection-diffusion equation with a pure diffusion operator* J.Comput.Phys. 117 (1995) 183–193.



- [4] O. Besson, J. Pousin *Solutions for linear conservation law with velocity field in  $L^\infty$* . Arch. Ration. Mech. Anal. 186, 2007, 159–175.
- [5] M. Cessenat *Théorème de trace pour les espaces de fonction de la neutronique*. C.R.Acad.Sci.Paris 300(1) 1985 89-92.
- [6] B. Lods *On linear kinetic equations involving unbounded cross-sections*. Math.Meth.Appl.Sci., 27, (2004) 1049-1075