



HAL
open science

Symétrie des grandes solutions d'équations elliptiques semi linéaire

Alessio Porretta, Laurent Veron

► **To cite this version:**

Alessio Porretta, Laurent Veron. Symétrie des grandes solutions d'équations elliptiques semi linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Paris I, 2006, 342, pp.483-487. hal-00281627

HAL Id: hal-00281627

<https://hal.science/hal-00281627>

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Symétrie des grandes solutions d'équations elliptiques semi linéaires ¹

Alessio Porretta ²

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italia

Email: porretta@mat.uniroma2.it

Laurent Véron

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS UMR 6083, Faculté des Sciences, 37200 Tours, France.

Email: veronl@univ-tours.fr

Résumé. Soit g une fonction localement lipschitzienne de la variable réelle. On suppose que g vérifie la condition de Keller et Osserman et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que g est convexe sur $[a, +\infty[$. Alors toute solution u de $-\Delta u + g(u) = 0$ dans une boule B de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, qui tend vers l'infini au bord de B , est une fonction radiale.

Symmetry of large solutions of semilinear elliptic equations

Abstract. Let g be a locally Lipschitz continuous function defined on \mathbb{R} . We assume that g satisfies the Keller-Osserman condition and there exists a positive real number a such that g is convex on $[a, \infty)$. Then any solution u of $-\Delta u + g(u) = 0$ in a ball B of \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, which tends to infinity on ∂B , is spherically symmetric.

Abridged English version

Let $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz continuous function and $B_R(0)$ the open N -ball ($N \geq 2$) of center 0 and radius $R > 0$. A classical result due to Gidas, Ni and Nirenberg [4] asserts that any positive solution u of

$$(1) \quad -\Delta u + g(u) = 0$$

in $B_R(0)$ which vanishes on $\partial B_R(0)$ is radial. A conjecture proposed by H. Brezis is that any *large solution* of (1), that is a solution which verifies

$$(2) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) = \infty,$$

is radial. The existence of such solution is ensured by the Keller-Osserman condition: there exists some $a > 0$ such that g is nondecreasing on $[a, \infty)$

¹A paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*.

²L'auteur a bénéficié du support du projet européen RTN: FRONTS-SINGULARITIES, RTN contract: HPRN-CT-2002-00274.

and

$$(3) \quad \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} < \infty \quad \text{where } G(s) = \int_a^s g(\sigma) d\sigma.$$

We prove two symmetry results dealing with this conjecture.

Theorem 1. *Assume g is locally Lipschitz continuous and let u be a large solution of (1) in a ball $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. If there holds*

$$(4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty \\ (ii) \quad & |\nabla_\tau u(x)| = o\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right) \quad \text{as } |x| \rightarrow R, \end{aligned}$$

then u is radial and $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ on $B_R(0) \setminus \{0\}$.

In this statement $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \langle Du(x), x/|x| \rangle$ is the radial derivative and $\nabla_\tau u(x) = Du(x) - |x|^{-2} \langle Du(x), x \rangle x$ is the tangential gradient. This result is settled upon an adaption of the key lemma of [4] in the framework of large solutions. Next we give a sufficient condition in order (4) to hold.

Theorem 2. *Assume g is locally Lipschitz continuous, convex on $[a, +\infty)$ for some $a > 0$ and satisfies (3). Then any large solution of (1) in a ball is a radial function.*

Remark. It is important to notice that this result is not related with uniqueness. For example, if $g(x) = x^2$ it is known that uniqueness may not hold if the radius of the ball is large enough. As a striking example, if g is any polynomial of degree larger than one with positive coefficient of higher order, any large solution of (1) in a ball is radial.

Résultats principaux

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et $B_R(0)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Un résultat classique du à Gidas, Ni et Nirenberg [4] affirme que si u est une solution positive de

$$(1) \quad -\Delta u + g(u) = 0$$

dans $B_R(0)$ qui s'annule sur $\partial B_R(0)$ alors elle est radiale. Si u prend la valeur k au bord le résultat reste valable pourvu que $u - k$ ne change pas de signe dans $B_R(0)$. Partant de cette observation, H. Brezis a conjecturé que si u est une *grande solution*, c'est à dire une solution qui vérifie

$$(2) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) = \infty,$$

alors elle est radiale. L'existence de grandes solutions est associée à la condition de Keller et Osserman qui est satisfaite si g est positive et croissante

sur $[a, +\infty[$ pour un $a > 0$ et y vérifie

$$(3) \quad \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} < +\infty \quad \text{où } G(s) = \int_a^s g(\sigma) d\sigma.$$

Nous donnons deux résultats qui confirment la validité de la conjecture de Brezis.

Théorème 1 *Supposons que g est localement lipschitzienne et soit u une grande solution de (1) dans la boule $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Si on a*

$$(4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty \\ (ii) \quad & |\nabla_\tau u(x)| = o\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right) \quad \text{as } |x| \rightarrow R, \end{aligned}$$

alors u est radiale et $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ dans $B_R(0) \setminus \{0\}$.

Dans cet énoncé $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \langle Du(x), x/|x| \rangle$ est la dérivée radiale de u et $\nabla_\tau u(x) = Du(x) - |x|^{-2} \langle Du(x), x \rangle x$ son gradient tangentiel.

Théorème 2 *Supposons que g est localement lipschitzienne et qu'il existe $a > 0$ tel que g est convexe sur $[a, +\infty[$ et y vérifie (3). Alors toute grande solution de (1) dans une boule est radiale.*

Remarque. Il est important de noter que ce résultat n'augure en rien de l'unicité des grandes solutions de (1). Ainsi, si $g(x) = x^2$, il est classique [10] que si le rayon de la boule est assez grand, il existe plusieurs grandes solutions, dont une seule positive. Par exemple, si g est un polynôme de degré > 1 dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif, alors le résultat du Théorème 2 s'applique.

Le résultat suivant étend aussi un autre théorème de [4].

Corollaire 1 *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème 2. Si u est une solution de (1) dans $\Gamma_{R,r} = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$ qui vérifie (2), alors $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ pour tout $x \in \Gamma_{R,(r+R)/2}$.*

Principe de la démonstration du Théorème 1. On commence par noter que pour tout $P \in \partial B^+ = \partial B_R(0) \cap \{x_1 > 0\}$, il existe $\delta \in]0, R[$ tel que

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(0) \cap B_\delta(P).$$

Ceci découle immédiatement de (4). La suite de la démonstration du Théorème 1 repose sur la méthode des plans mobiles comme dans [4]. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^N et (x_1, \dots, x_N) les coordonnées d'un

point x dans cette base. Pour $0 < \lambda < R$ on désigne par T_λ l'hyperplan $\{x : x_1 = \lambda\}$, $\Sigma_\lambda = \{x \in B_R(0) : \lambda < x_1 < R\}$, $\Sigma'_\lambda = \{x \in B_R(0) : 2\lambda - R < x_1 < \lambda\}$, par x_λ le symétrique de x , par rapport à T_λ , de coordonnées $(2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ et par u_λ la fonction réfléchie de u , définie par $u_\lambda(x) = u(x_\lambda)$. On applique (5) avec $P = P_0 = R\mathbf{e}_1$, $\delta_0 = \delta(P_0)$. On en déduit que pour tout $\lambda \in [\lambda_0, R[$ (où $\lambda_0 = R - \delta_0^2/2R$) on a

$$(6) \quad u(x_\lambda) < u(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in \Sigma_\lambda.$$

Soit $\mu = \inf\{\lambda > 0 : \text{t. q. (6) soit vérifiée}\}$. On suppose $\mu > 0$. Par définition $u \geq u_\mu$ dans Σ_μ . Soit $K_\mu = T_\mu \cap \partial B_R(0)$. Comme K_μ est compact, grace à (5) il existe un ϵ -voisinage U_ϵ de K_μ tel que

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in U_\epsilon \cap B_R(0).$$

On pose $D_\epsilon = B_{R-\epsilon/2}(0) \cap \Sigma_\mu$ et $a(x) = (g(u) - g(u_\mu))/(u - u_\mu)$. Comme $w = u - u_\mu$ vérifie

$$(8) \quad \Delta w - aw = 0 \quad \text{dans } D_\epsilon, \quad w \geq 0, \quad w \not\equiv 0,$$

on en déduit $w > 0$ par le principe du maximum fort, et $\partial u/\partial x_1 > 0$ sur $T_\mu \cap \partial D_\epsilon$ par le lemme de Hopf. La continuité de Du à l'intérieur et (7) impliquent qu'il existe $\sigma > 0$ tel que

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(0) \cap \{x : \mu - \sigma < x_1 < \mu + \sigma\}.$$

De plus, comme ϵ est arbitrairement petit, $u > u_\mu$ dans Σ_μ . La définition de μ implique qu'il existe une suite positive croissante $\{\lambda_n\}$ convergeant vers μ et une suite de points $\{x_n\}$ convergeant vers $\bar{x} \in \overline{\Sigma_\mu}$ telles que $u(x_n) \leq u((x_n)_{\lambda_n})$. Comme $u > u_\mu$ dans Σ_μ , \bar{x} ne peut appartenir à Σ_μ . Le théorème des accroissement fini et (9) impliquent que \bar{x} ne peut appartenir non plus à T_μ . Enfin \bar{x} ne peut appartenir à $\Sigma_\mu \setminus T_\mu$ puisque cela impliquerait que $u(x_n) - u((x_n)_{\lambda_n})$ tende vers $+\infty$. Par contradiction il s'ensuit que $\mu = 0$. Changeant x_1 en $-x_1$ puis permutant les directions, on en déduit que u est radiale.

Principe de la démonstration du Théorème 2. La clef est le résultat suivant.

Lemme 1 *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème 2, et que u est une grande solution de (1) dans $B_R(0)$. Alors*

$$(10) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \nabla_\tau u(x) = 0 \\ (ii) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty, \end{aligned}$$

et les deux limites ont lieu uniformément par rapport à $\{x : |x| = r\}$.

Démonstration. Soient $(r, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$ les coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^N , $\tilde{\sigma} \in S^{N-1}$ et $\{\gamma_j\}_{j=1}^{N-1}$ un ensemble de géodésiques de S^{N-1} se coupant

orthogonalement en $\tilde{\sigma}$, par exemple $\gamma_j(t) = e^{tA_j}(\tilde{\sigma})$ où les matrices $\{A_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont anti-symétriques et vérifient $\langle A_j \tilde{\sigma}, A_k \tilde{\sigma} \rangle = \delta_j^k$. Si Δ_S est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{N-1} , on a

$$(11) \quad \Delta_S u(r, \tilde{\sigma}) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{d^2 u(r, \gamma_j(t))}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

Par hypothèse $g = g_\infty + \tilde{g}$ où g_∞ est convexe et vérifie (3) et \tilde{g} est localement lipschitzien et identiquement nul sur $[M, +\infty[$ pour un $M > 0$. Sans restriction on peut supposer g_∞ croissante. Il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que $u(x) \geq M$ pour tout $|x| \geq r_0$. Ainsi

$$(12) \quad |\Delta u - g_\infty(u)| = |\tilde{g}(u)| = |\tilde{g}(u)\chi_{B_{r_0}(0)}| \leq K_0.$$

Soit $\phi(x) = (2N)^{-1}(R^2 - |x|^2)$. Comme $\Delta\phi = -1$ on déduit de (12)

$$\Delta(u - K_0\phi) \geq g_\infty(u) \geq g_\infty(u - K_0\phi),$$

et donc $u - K_0\phi$ est une sous-solution du problème

$$(13) \quad \begin{cases} -\Delta v + g_\infty(v) = 0 & \text{in } B_R(0) \\ \lim_{|x| \rightarrow R} v(x) = \infty. \end{cases}$$

Par convexité (voir par exemple [6], [7], même si il existe une démonstration plus directe dans le cas radial) ce problème admet une unique solution $v = U_R$. Comme $u + K_0\phi$ est une sur-solution, on en déduit

$$(14) \quad U_R - K_0\phi \leq u \leq U_R + K_0\phi.$$

Soit $h > 0$, $j = 1, \dots, N-1$ et $u^h(x) = u(e^{hA_j}(x)) = u(r, e^{hA_j}\sigma)$, où $x = (r, \sigma)$. Comme le problème est invariant par rotation, u^h vérifie aussi (14). Par suite

$$(15) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) - u^h(x) = 0.$$

De plus $\Delta u^h = g_\infty(u^h)$ dans $\Gamma_{R, r_0} = B_R(0) \setminus B_{r_0}(0)$ et il existe $L > 0$, indépendant de h , tel que $|(u - u^h)(x)| \leq L|h|$ pour $|x| = r_0$. Si Ψ est la fonction harmonique dans Γ_{R, r_0} , nulle sur $\partial B_R(0)$ et valant 1 sur $\partial B_{r_0}(0)$, et $v^h = u^h + |h|L\Psi$, alors

$$(16) \quad \Delta(v^h - u) \leq g_\infty(v^h) - g_\infty(u) \quad \text{dans } \Gamma_{R, r_0}.$$

La relation (15) implique que $v^h(x) - u(x) \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow R$. Par monotonie $v^h = u^h + |h|L\Psi \geq u$. Si on définit la dérivée de Lie selon le champ de vecteurs $\sigma \mapsto A_j\sigma$ par

$$L_{A_j} u(r, \sigma) = \frac{du(r, e^{tA_j}\sigma)}{dt} \Big|_{t=0},$$

alors

$$(17) \quad |L_{A_j} u(r, \tilde{\sigma})| \leq L\Psi(x) \leq C(R - r).$$

Cette relation implique (10)-i.

Pour démontrer (10)-ii, on pose $w^h = h^{-2}(u^h + u^{-h} - 2u)$. La convexité de g_∞ implique que w^h vérifie $\Delta w^h \geq \xi(x)w^h$ dans Γ_{R,r_0} , où $\xi(x) \geq 0$, et donc que w_+^h est sous-harmonique dans Γ_{R,r_0} . Comme u est de classe C^2 , il existe $\tilde{L} > 0$, indépendant de h , tel que $w^h \leq \tilde{L}$ sur $\partial B_{r_0}(0)$. Comme w^h et Ψ s'annulent sur $\partial B_R(0)$, $w_+^h \leq \tilde{L}\Psi$ dans Γ_{R,r_0} et donc

$$(18) \quad \frac{d^2 u(r, \gamma_j(t))}{dt^2} \Big|_{t=0} \leq \tilde{L}\Psi.$$

On déduit de (11) que $(\Delta_S u)_+(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow R$. En écrivant l'équation (1) en coordonnées sphériques, on obtient donc

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \geq r^{N-1} g_\infty(u) + o(1) \quad \text{uniformément quand } |x| \rightarrow R.$$

Clairement $u \geq z$ où z est la solution de

$$(20) \quad \begin{cases} -\Delta z + g_\infty(z) = 0 & \text{dans } \Gamma_{R,r_0} \\ \lim_{|x| \rightarrow R} z(x) = \infty \\ z = \min_{\partial B_{r_0}(0)} u & \text{sur } \partial B_{r_0}(0). \end{cases}$$

Donc $g_\infty(u) \geq g_\infty(z)$. Comme $g_\infty(z) \notin L^1(\Gamma_{R,r_0})$, on a

$$\lim_{r \rightarrow R} \int_{r_0}^r g_\infty(u(s, \sigma)) s^{N-1} ds = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1}.$$

Ceci implique

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \sigma) = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1},$$

et donc (10)-ii et le Lemme 1. Le théorème 2 en découle.

REFERENCES

- [1] Aftalion A., del Pino M. and Letelier R.: *Multiple boundary blow-up solutions for nonlinear elliptic equations* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **133** (2003), no. 2, 225–235.
- [2] Du, Y., Guo, Z.: *Boundary blow-up solutions and their applications in quasilinear elliptic equations*, J. Anal. Math. **89**, 277–302 (2003).
- [3] Du, Y., Guo, Z.: *Uniqueness and layer analysis for boundary blow-up solutions*, J. Math. Pures Appl. **83**, n. 6, 739–763 (2004).
- [4] Gidas B., Ni W. M. et Nirenberg L.: *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68**, 209–243 (1979).
- [5] Keller J.B.: *On solutions of $\Delta u = f(u)$* , Comm. Pure Appl. Math. **10**, 503–510 (1957).
- [6] Marcus M. et Veron L.: *Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré **14** (1997), 237–274.
- [7] Marcus M. et Véron L.: *Existence and uniqueness results for large solutions of general nonlinear elliptic equations*, J. Evolution Equ. **3** (2003), 637–652.
- [8] McKenna, P. J., Reichel, W., Walter, W.: *Symmetry and multiplicity for nonlinear elliptic differential equations with boundary blow-up*, Nonlinear Anal. **28**, n. 7, 1213–1225 (1997).
- [9] Osserman R.: *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Math. **7** (1957), 1641–1647.

- [10] Pohožaev, S. I. : *The boundary value problem for equation $\Delta U = U^2$* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **138**, 305-308 (1961).