



**HAL**  
open science

## Semi-continuité des cellules de Kazhdan-Lusztig

Cédric Bonnafé

► **To cite this version:**

| Cédric Bonnafé. Semi-continuité des cellules de Kazhdan-Lusztig. 2008. hal-00280925

**HAL Id: hal-00280925**

**<https://hal.science/hal-00280925>**

Preprint submitted on 20 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## SEMI-CONTINUITÉ DES CELLULES DE KAZHDAN-LUSZTIG

CÉDRIC BONNAFÉ

RÉSUMÉ. Des calculs dans les petits groupes de Coxeter et les groupes diédraux infinis suggèrent que les cellules de Kazhdan-Lusztig à paramètres inégaux obéissent à des phénomènes de semi-continuité (lorsque les paramètres varient). Le but de cet article est de fournir un cadre théorique rigoureux à cette intuition qui nous permettra d'énoncer des conjectures précises.

Soit  $(W, S)$  un groupe de Coxeter (où  $S$  est fini) et supposons pour simplifier dans cette introduction que  $S = S_1 \amalg S_2$ , où  $S_1$  et  $S_2$  sont deux sous-ensembles non vides de  $S$  tels que, si  $s_1 \in S_1$  et  $s_2 \in S_2$ , alors  $s_1$  et  $s_2$  ne sont pas conjugués dans  $W$ . Notons  $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction longueur,  $\ell_i : W \rightarrow \mathbb{N}$  la  $S_i$ -longueur (si  $w \in W$ ,  $\ell_i(w)$  désigne le nombre d'éléments de  $S_i$  apparaissant dans une décomposition réduite de  $w$  : ce nombre ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). Fixons deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  et posons  $L_{a,b} : W \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $w \mapsto a\ell_1(w) + b\ell_2(w)$ . Alors  $L_{a,b}$  est une fonction de poids (au sens de Lusztig [13, §3.1]) et il est donc possible de définir une partition de  $W$  en cellules de Kazhdan-Lusztig [13, chapitre 8]. Il est clair que cette partition ne dépend que de  $b/a$  (et non du couple  $(a, b)$ ) : nous la noterons  $\mathcal{L}_{b/a}(W)$ . L'expérience suggère la conjecture suivante :

**Conjecture 0.** *Il existe un entier naturel  $m$  et des nombres rationnels  $0 < r_1 < \dots < r_m$  (ne dépendant que de  $W$ ) tels que (en notant  $r_0 = 0$  et  $r_{m+1} = +\infty$ ), si  $\theta$  et  $\theta'$  sont deux nombres rationnels strictement positifs, alors :*

- (a) *Si  $0 \leq i \leq m$  et si  $r_i < \theta, \theta' < r_{i+1}$ , alors  $\mathcal{L}_\theta(W) = \mathcal{L}_{\theta'}(W)$ .*
- (b) *Si  $1 \leq i \leq m$  et si  $r_{i-1} < \theta < r_i < \theta' < r_{i+1}$ , alors  $\mathcal{L}_{r_i}(W)$  est la partition la plus fine de  $W$  qui soit à la fois moins fine que  $\mathcal{L}_\theta(W)$  et moins fine que  $\mathcal{L}_{\theta'}(W)$ .*

REMARQUES - (1) On peut évidemment énoncer des conjectures similaires concernant les partitions en cellules à droite et en cellules bilatères.

(2) Dans le cas où  $W$  est fini, l'existence des nombres rationnels  $0 < r_1 < \dots < r_m$  vérifiant (a) est facile. En revanche, même dans ce cas, la propriété (b) est encore à ce jour une conjecture. Une conjecture de Lusztig [13, §13.12] nous autorise à espérer qu'elle soit encore vraie pour des groupes infinis.  $\square$

---

*Date:* May 20, 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* According to the 2000 classification: Primary 20C08; Secondary 20C15.

On peut interpréter cette conjecture en termes topologiques : les cellules de Kazhdan-Lusztig devraient obéir à des phénomènes de semi-continuité. Le but de cet article est de fournir un cadre rigoureux à cette intuition en généralisant la conjecture 0 simultanément dans les deux directions suivantes:

- On peut très bien imaginer que la partition de  $S$  comporte plus de deux parties (cela ne se produit pas lorsque  $W$  est fini et irréductible).
- On peut aussi s'intéresser aux fonctions de poids à valeurs dans n'importe quel groupe abélien totalement ordonné, et dont les valeurs sur les réflexions simples ne sont pas nécessairement strictement positives.

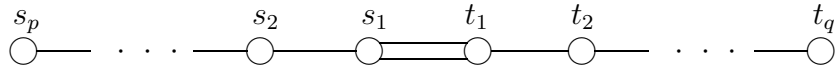
Ces deux généralisations nous conduisent à définir des classes d'équivalences de fonctions de poids (dans le cas facile détaillé dans l'introduction, cela a été fait en introduisant le rapport  $b/a$  à la place du couple  $(a, b)$ ) et à définir une topologie sur l'ensemble de ces classes d'équivalence. Cela sera fait dans un cadre abstrait dans les sections 1, 2 et 3. Dans les sections 4 et 5, nous rappelons les définitions et quelques propriétés des cellules de Kazhdan-Lusztig, en intégrant le formalisme des sections 1, 2 et 3. Nous énonçons nos conjectures dans la section 6, et nous les illustrerons dans la section 7 en détaillant les exemples suivants :

EXEMPLES - (1) *Groupes diédraux* : Si  $|S| = 2$  et si  $|S_1| = |S_2| = 1$ , alors la conjecture 0 est vérifiée en prenant  $m = 1$  et  $r_1 = 1$  (voir [13, §8.8]).

(2) *Type  $F_4$*  : Si  $(W, S)$  est de type  $F_4$  et si  $|S_1| = |S_2| = 2$ , alors la conjecture 0 est vérifiée en prenant  $m = 3$  et  $r_1 = 1/2$ ,  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 2$  (voir [9, Corollaire 4.8]).

(3) *Type  $B_n$*  : Supposons que  $(W, S)$  est de type  $B_n$  (avec  $n \geq 2$ ) et  $|S_1| = n - 1$  et  $|S_2| = 1$ . Dans [4, Conjectures A et B], la conjecture 0 est précisée : il devrait suffire de prendre  $m = n - 1$  et  $r_i = i$ . Cela a été vérifié pour  $n \leq 6$  (voir §7.E).

(4) *Type  $B(p, q)$*  : Soient  $p$  et  $q$  deux nombres naturels non nuls et supposons que  $|S| = p + q$ ,  $S_1 = \{s_1, \dots, s_p\}$ ,  $S_2 = \{t_1, \dots, t_q\}$  et supposons que le graphe de Coxeter de  $(W, S)$  soit le suivant



Nous dirons qu'il est de type  $B(p, q)$ . Notons que  $B(p, q) \simeq B(q, p)$ ,  $B(p, 1) \simeq B_{p+1}$ ,  $B(2, 2) \simeq F_4$  et  $B(3, 2) \simeq B(2, 3) \simeq \tilde{F}_4$ . On peut alors se demander si les exemples (2) et (3) précédents ne se généralisent pas ainsi : est-il vrai que la conjecture 0 est valide en prenant  $m = p + q - 1$  et, pour la suite  $r_1 < \dots < r_{p+q-1}$ , la suite croissante  $\frac{1}{q} < \frac{1}{q-1} < \dots < \frac{1}{2} < 1 < 2 < \dots < p-1 < p$  ?

## TABLE DES MATIÈRES

|   |    |
|---|----|
| <b>1. Parties positives d'un réseau</b>                     | 4  |
| 1.A. Définitions, préliminaires                             | 4  |
| 1.B. Conséquences du théorème de Hahn-Banach                | 5  |
| 1.C. Fonctorialité  | 10 |
| <b>2. Topologie sur <math>\mathcal{P}os(\Lambda)</math></b> | 11 |
| 2.A. Définition   | 11 |
| 2.B. Fonctorialité  | 14 |
| 2.C. Continuité   | 14 |
| <b>3. Arrangements d'hyperplans</b>                         | 17 |
| 3.A. Sous-espaces rationnels                                | 17 |
| 3.B. Demi-espaces   | 19 |
| 3.C. Arrangements   | 19 |
| <b>4. Algèbres de Hecke</b>                                 | 21 |
| 4.A. Préliminaires  | 21 |
| 4.B. Algèbres de Hecke                                      | 22 |
| 4.C. Algèbre de Hecke générique                             | 23 |
| <b>5. Cellules de Kazhdan-Lusztig</b>                       | 23 |
| 5.A. Base de Kazhdan-Lusztig                                | 23 |
| 5.B. Représentations cellulaires                            | 24 |
| 5.C. Morphismes strictement croissants                      | 24 |
| 5.D. Parties positives de $\mathbb{Z}[\tilde{\mathcal{S}}]$ | 25 |
| 5.E. Changement de signe                                    | 26 |
| 5.F. Paramètres nuls  | 27 |
| <b>6. Conjectures</b>                                       | 29 |
| <b>7. Exemples</b>  | 31 |
| 7.A. Groupes diédraux finis                                 | 31 |
| 7.B. Groupe diédral infini                                  | 33 |
| 7.C. Type $F_4$   | 34 |
| 7.D. Type $\tilde{G}_2$                                     | 35 |
| 7.E. Type $B$   | 36 |
| <b>Références</b>   | 36 |

## 1. PARTIES POSITIVES D'UN RÉSEAU

Fixons dans cette section un réseau  $\Lambda$  et notons  $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ .

Le but de cette section est d'étudier l'ensemble des parties positives (voir §1.A pour la définition) de  $\Lambda$ . Nous munirons cet ensemble d'une topologie dans la section suivante.

**1.A. Définitions, préliminaires.** Une partie  $X$  de  $\Lambda$  est dite *positive* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (P1)  $\Lambda = X \cup (-X)$ .
- (P2)  $X + X \subset X$ .
- (P3)  $X \cap (-X)$  est un sous-groupe de  $\Lambda$ .

Nous noterons  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  l'ensemble des parties positives de  $\Lambda$ . Donnons quelques exemples. Pour commencer, notons que  $\Lambda \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ . Soit  $\Gamma$  un groupe totalement ordonné et soit  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$  un morphisme de groupes. Posons

$$\text{Pos}(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) \geq 0\}$$

et

$$\text{Pos}^+(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) > 0\}.$$

Alors il est clair que

$$(1.1) \quad \text{Ker } \varphi = \text{Pos}(\varphi) \cap \text{Pos}(-\varphi) = \text{Pos}(\varphi) \cap -\text{Pos}(\varphi)$$

et que

$$(1.2) \quad \text{Pos}(\varphi) \text{ est une partie positive de } \Lambda.$$

**Lemme 1.3.** *Soit  $X$  une partie positive de  $\Lambda$ . Alors :*

- (a)  $-X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ .
- (b)  $0 \in X$ .
- (c) Si  $\lambda \in \Lambda$  et si  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$  est tel que  $r\lambda \in X$ . Alors  $\lambda \in X$ .
- (d)  $\Lambda/(X \cap (-X))$  est sans torsion.

*Démonstration.* (a) est immédiat. (b) découle de la propriété (P1) des parties positives. (d) découle de (c). Il nous reste à montrer (c). Soient  $\lambda \in \Lambda$  et  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que  $r\lambda \in X$ . Si  $\lambda \notin X$ , alors  $-\lambda \in X$  d'après la propriété (P1). D'où  $\lambda = r\lambda + (r-1)(-\lambda) \in X$  d'après (P2), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $\lambda \in X$ . □

Nous allons montrer une forme de réciproque facile à la propriété 1.2. Soit  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ . Notons  $\text{can}_X : \Lambda \rightarrow \Lambda/(X \cap (-X))$  le morphisme canonique. Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  appartiennent à  $\Lambda/(X \cap (-X))$ , nous écrirons  $\gamma \leqslant_X \gamma'$  s'il existe un représentant de  $\gamma' - \gamma$  appartenant à  $X$ . Il est facile de vérifier que

$$(1.4) \quad \gamma \leqslant_X \gamma' \text{ si et seulement si tout représentant de } \gamma' - \gamma \text{ appartient à } X.$$

On déduit alors facilement des propriétés (P1), (P2) et (P3) des parties positives que

$$(1.5) \quad (\Lambda/(X \cap (-X)), \leqslant_X) \text{ est un groupe abélien totalement ordonné}$$

et que

$$(1.6) \quad X = \text{Pos}(\text{can}_X).$$

**1.B. Conséquences du théorème de Hahn-Banach.** Si  $X$  est une partie positive de  $\Lambda$ , on pose  $X^+ = X \setminus (-X)$ . On a alors

$$(1.7) \quad \Lambda = X \dot{\cup} (-X^+) = X^+ \dot{\cup} (-X) = X^+ \dot{\cup} (X \cap (-X)) \dot{\cup} (-X^+),$$

où  $\dot{\cup}$  désigne l'union disjointe. De plus, si  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$  est un morphisme de groupes abéliens et si  $\Gamma$  est un groupe totalement ordonné, alors

$$(1.8) \quad \text{Pos}^+(\varphi) = \text{Pos}(\varphi)^+.$$

Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $V$ , nous noterons abusivement  $\text{Pos}(\varphi)$  et  $\text{Pos}^+(\varphi)$  les parties  $\text{Pos}(\varphi|_\Lambda)$  et  $\text{Pos}^+(\varphi|_\Lambda)$  de  $\Lambda$ .

**Lemme 1.9.** *Soit  $X$  une partie positive propre de  $\Lambda$ , soit  $\Gamma$  un groupe abélien totalement ordonné archimédien et soit  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$  un morphisme de groupes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ ;
- (2)  $X^+ \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ ;
- (3)  $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X^+$ ;
- (4)  $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$ .

*Démonstration.* Il est clair que (1) implique (2) et que (3) implique (4).

Montrons que (2) implique (3). Supposons donc que (2) est vérifiée. Soit  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\varphi(\lambda) > 0$  et supposons que  $\lambda \notin X^+$ . Alors, d'après 1.7,  $\lambda \in -X$ . Or, si  $\mu \in \Lambda$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  tel que  $\varphi(\mu - k\lambda) = \varphi(\mu) - k\varphi(\lambda) < 0$  (car  $\Gamma$  est archimédien). Donc  $\mu - k\lambda \notin X^+$  d'après (2). Donc  $\mu - k\lambda \in -X$  d'après 1.7. Donc,  $\mu = (\mu - k\lambda) + k\lambda \in (-X)$ . Donc  $\Lambda \subseteq -X$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Montrons que (4) implique (1). Supposons donc que  $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$ . En prenant le complémentaire dans  $\Lambda$ , on obtient  $(-X^+) = (-X)^+ \subseteq \text{Pos}(-\varphi)$  et donc, puisque

(2) implique (3), on a  $\text{Pos}^+(-\varphi) \subseteq -X^+$ . En reprenant le complémentaire dans  $\Lambda$ , on obtient  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ .  $\square$

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.10.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments de  $\Lambda$  et supposons trouvé un  $n$ -uplet  $t_1, \dots, t_n$  de nombres réels **strictement** positifs tels que  $t_1\lambda_1 + \dots + t_n\lambda_n = 0$ . Alors il existe des entiers naturels non nuls  $r_1, \dots, r_n$  tels que  $r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(u_1, \dots, u_n)$  de nombres réels qui satisfont

$$\begin{cases} u_1 + \dots + u_n = 1, \\ u_1\lambda_1 + \dots + u_n\lambda_n = 0. \end{cases}$$

Écrit dans une base de  $\Lambda$ , ceci est un système linéaire d'équations à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Le procédé d'élimination de Gauss montre que l'existence d'une solution *réelle* implique l'existence d'une solution *rationnelle*  $t^\circ = (t_1^\circ, \dots, t_n^\circ)$  et l'existence de vecteurs  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Q}^n$  tels que

$$\mathcal{S} = \{t^\circ + x_1v_1 + \dots + x_rv_r \mid (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r\}.$$

En particulier, il existe  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$  tels que

$$(t_1, \dots, t_n) = t^\circ + x_1v_1 + \dots + x_rv_r.$$

Puisque  $t_1, \dots, t_n$  sont strictement positifs, il existe  $x'_1, \dots, x'_r$  dans  $\mathbb{Q}$  tels que les coordonnées de  $t^\circ + x'_1v_1 + \dots + x'_rv_r$  soient strictement positives. Posons alors  $(u_1, \dots, u_n) = t^\circ + x'_1v_1 + \dots + x'_rv_r$ . On a donc  $u_i \in \mathbb{Q}_{>0}$  pour tout  $i$  et

$$u_1\lambda_1 + \dots + u_n\lambda_n = 0.$$

Quitte à multiplier par le produits des dénominateurs des  $u_i$ , on a trouvé  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que

$$r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0,$$

comme attendu.  $\square$

**Théorème 1.11.** *Soit  $X$  une partie positive de  $\Lambda$  différente de  $\Lambda$ . Alors :*

- (a) *Il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $V$  telle que  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ .*
- (b) *Si  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont deux formes linéaires sur  $V$  telles que  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi) \cap \text{Pos}(\varphi')$ , alors il existe  $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\varphi' = \kappa\varphi$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}^+$  l'enveloppe convexe de  $X^+$ . Notons que  $X^+$  (et donc  $\mathcal{C}^+$ ) est non vide car  $X \neq \Lambda$ . Nous allons commencer par montrer que  $0 \notin \mathcal{C}^+$ . Supposons donc que  $0 \in \mathcal{C}^+$ . Il existe donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $X^+$  et  $t_1, \dots, t_n$  dans  $\mathbb{R}_{>0}$  tels que

$$\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = 1, \\ t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n = 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.10, il existe  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que  $m_1 \lambda_1 = -(m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n)$ . Donc  $m_1 \lambda_1 \in X \cap -X$  (voir la propriété (P2)). Donc, d'après le lemme 1.3 (a) et (c), on a  $\lambda_1 \in X \cap -X$ , ce qui est impossible car  $\lambda_1 \in X^+ = X \setminus (-X)$ . Cela montre donc que

$$0 \notin \mathcal{C}^+.$$

L'ensemble  $\mathcal{C}^+$  étant convexe, il découle du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  sur  $V$  telle que

$$\mathcal{C}^+ \subseteq \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) \geq 0\}.$$

En particulier,

$$(*) \quad X^+ \subseteq \mathcal{C}^+ \cap \Lambda \subseteq \text{Pos}(\varphi).$$

D'après le lemme 1.9, et puisque  $\mathbb{R}$  est archimédien, on a bien  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ . Cela montre (a).

Soit  $\varphi'$  une autre forme linéaire telle que  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi')$ . Posons  $U = \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) > 0 \text{ et } \varphi'(\lambda) < 0\}$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $V$ . Fixons une  $\mathbb{Z}$ -base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\Lambda$ . Si  $U \neq \emptyset$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$  et  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$  tels que  $\lambda, \lambda + \varepsilon e_1, \dots, \lambda + \varepsilon e_d$  appartiennent à  $U$ . Quitte à multiplier par le produit des dénominateurs de  $\varepsilon$  et des coordonnées de  $\lambda$  dans la base  $(e_1, \dots, e_d)$ , on peut supposer que  $\lambda \in \Lambda$  et  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Mais il est clair que  $U \cap X^+ = \emptyset$  et  $U \cap (-X^+) = \emptyset$ . Donc  $U \cap \Lambda$  est contenu dans  $X \cap (-X)$ . Ce dernier étant un sous-groupe, on en déduit que  $\varepsilon e_i \in X \cap (-X)$  pour tout  $i$ . D'où, d'après le lemme 1.3 (c),  $e_i \in X \cap (-X)$  pour tout  $i$ . Donc  $X = \Lambda$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que  $U$  est vide, c'est-à-dire qu'il existe  $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\varphi' = \kappa \varphi$ . D'où (b).  $\square$

Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $V$ , nous noterons  $\bar{\varphi}$  sa classe dans  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ . Nous noterons  $p : V^* \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$  la projection canonique. L'application  $\text{Pos} : V^* \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  se factorise à travers  $p$  en une application  $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  rendant



le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V^* & & \\
 \downarrow p & \searrow \text{Pos} & \\
 V^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\overline{\text{Pos}}} & \mathcal{P}os(\Lambda)
 \end{array}$$

commutatif. D'autre part, si  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ , nous noterons  $\pi(X)$  l'unique élément  $\bar{\varphi} \in V^*/\mathbb{R}_{>0}$  tel que  $X \subseteq \overline{\text{Pos}}(\bar{\varphi})$  (voir le théorème 1.11). On a donc défini deux applications

$$V^*/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\overline{\text{Pos}}} \mathcal{P}os(\Lambda) \xrightarrow{\pi} V^*/\mathbb{R}_{>0}$$

et le théorème 1.11 (b) montre que

$$(1.12) \quad \pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}.$$

Donc  $\pi$  est surjective et  $\overline{\text{Pos}}$  est injective. En revanche, ni  $\pi$ , ni  $\overline{\text{Pos}}$  ne sont des bijections (sauf si  $\Lambda$  est de rang 1). Nous allons décrire les fibres de  $\pi$  :

**Proposition 1.13.** *Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $V$ . Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc}
 i_{\bar{\varphi}} : \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}) & \longrightarrow & \pi^{-1}(\bar{\varphi}) \\
 X & \longmapsto & X \cup \text{Pos}^+(\varphi)
 \end{array}$$

*est bien définie et bijective. Sa réciproque est l'application*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(\bar{\varphi}) & \longrightarrow & \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}) \\
 Y & \longmapsto & Y \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}.
 \end{array}$$

REMARQUE - Il est facile de voir que  $\pi^{-1}(\bar{0}) = \{\Lambda\}$ . Nous pouvons aussi définir une application  $i_{\bar{0}} : \mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  par la même formule que dans la proposition 1.13 : alors  $i_{\bar{0}}$  est tout simplement l'application identité mais on a dans ce cas-là  $\pi^{-1}(\bar{0}) \neq i_{\bar{0}}(\mathcal{P}os(\Lambda))$ .  $\square$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que l'application  $i_{\bar{\varphi}}$  est bien définie. Soit  $X \in \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ . Posons  $Y = X \cup \text{Pos}^+(\varphi)$ . Montrons que  $Y$  est une partie positive de  $\Lambda$ . Avant cela, notons que

$$(*) \quad Y \subseteq \text{Pos}(\varphi).$$

(1) Si  $\lambda \in \Lambda$ , deux cas se présentent. Si  $\varphi(\lambda) \neq 0$ , alors  $\lambda \in \text{Pos}^+(\varphi) \cup -\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y \cup (-Y)$ . Si  $\varphi(\lambda) = 0$ , alors  $\lambda \in \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ , donc  $\lambda \in X \cup (-X) \subseteq Y \cup (-Y)$  car  $X$  est une partie positive de  $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ . Donc  $\Lambda = Y \cup (-Y)$ .

(2) Soient  $\lambda, \mu \in Y$ . Montrons que  $\lambda + \mu \in Y$ . Si  $\varphi(\lambda + \mu) > 0$ , alors  $\lambda + \mu \in \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$ . Si  $\varphi(\lambda + \mu) = 0$ , alors il résulte de (\*) que  $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$ , donc

$\lambda, \mu \in \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ . En particulier,  $\lambda, \mu \in X$  et donc  $\lambda + \mu \in X + X \subseteq X \subseteq Y$ . Donc  $Y + Y \subseteq Y$ .

(3) On a  $Y \cap (-Y) = X \cap (-X)$ , donc  $Y \cap (-Y)$  est un sous-groupe de  $\Lambda$ .

Les points (1), (2) et (3) ci-dessus montrent que  $Y$  est une partie positive de  $\Lambda$ . L'inclusion (\*) montre que  $\pi(Y) = \bar{\varphi}$ , c'est-à-dire que  $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$ . Donc l'application  $i_{\bar{\varphi}}$  est bien définie.

Elle est injective car, si  $X \in \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ , alors  $X \cap \text{Pos}^+(\varphi) = \emptyset$ . Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit  $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$ . Posons  $X = Y \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ . Alors  $X$  est une partie positive de  $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$  d'après le corollaire 1.18. Posons  $Y' = X \cup \text{Pos}^+(\varphi)$ . Il nous reste à montrer que  $Y = Y'$ .

Tout d'abord,  $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$  car  $\pi(Y) = \bar{\varphi}$  par hypothèse et  $X \subseteq Y$ . Donc  $Y' \subseteq Y$ . Réciproquement, si  $\lambda \in Y$ , deux cas se présentent. Si  $\varphi(\lambda) > 0$ , alors  $\lambda \in \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y'$ . Si  $\varphi(\lambda) = 0$ , alors  $\lambda \in Y \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda} = X \subseteq Y'$ . Dans tous les cas,  $\lambda \in Y'$ .  $\square$

**EXEMPLE 1.14** - Si  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $V$ , alors  $\text{Pos}(\varphi) = i_{\bar{\varphi}}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant classifier les parties positives de  $\Lambda$  en termes de formes linéaires. Notons  $\mathcal{F}(\Lambda)$  l'ensemble des suites finies  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  telles que (en posant  $\varphi_0 = 0$ ), pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $\varphi_i$  soit une forme linéaire non nulle sur  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Lambda \cap \text{Ker } \varphi_{i-1})$ . Par convention, nous supposons que la suite vide, notée  $\emptyset$ , appartient à  $\mathcal{F}(\Lambda)$ .

Posons  $d = \dim V$ . Notons que, si  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$ , alors  $r \leq d$ . Nous définissons donc l'action suivante de  $(\mathbb{R}_{>0})^d$  sur  $\mathcal{F}(\Lambda)$  : si  $(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in (\mathbb{R}_{>0})^d$  et si  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$ , on pose

$$(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \cdot (\varphi_1, \dots, \varphi_r) = (\kappa_1 \varphi_1, \dots, \kappa_r \varphi_r).$$

Munissons  $\mathbb{R}^r$  de l'ordre lexicographique : c'est un group abélien totalement ordonné et  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^r$  est un morphisme de groupes. Donc  $\text{Pos}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ . En fait, toute partie positive de  $\Lambda$  peut être retrouvée ainsi :

**Proposition 1.15.** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{P}os(\Lambda) \\ \varphi & \longmapsto & \text{Pos}(\varphi) \end{array}$$

*est bien définie et induit une bijection  $\mathcal{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}os(\Lambda)$ .*

REMARQUE - Dans cette proposition, on a posé par convention  $\text{Pos}(\emptyset) = \Lambda$ .  $\square$

*Démonstration.* Cela résulte immédiatement d'un raisonnement par récurrence sur le rang de  $\Lambda$  en utilisant le théorème 1.11 et la proposition 1.13.  $\square$

Si  $\varphi \in \mathcal{F}(\Lambda)$ , nous noterons  $\bar{\varphi}$  sa classe dans  $\mathcal{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$  et nous poserons  $\overline{\text{Pos}(\varphi)} = \text{Pos}(\bar{\varphi})$ . Comme corollaire de la proposition 1.15, nous obtenons une classification des ordres totaux sur  $\Lambda$  (compatibles avec la structure de groupe). En fait, se donner un ordre total sur  $\Lambda$  est équivalent à se donner une partie positive  $X$  de  $\Lambda$  telle que  $X \cap (-X) = 0$ . Notons  $\mathcal{F}_0(\Lambda)$  l'ensemble des éléments  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$  tels que  $\Lambda \cap \text{Ker } \varphi_r = 0$ .

**Corollaire 1.16.** *L'application décrite dans la proposition 1.15 induit une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{F}_0(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$  et l'ensemble des ordres totaux sur  $\Lambda$  compatibles avec la structure de groupe.*

1.C. **Fonctorialité.** Soit  $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  un morphisme de groupes abéliens. Le résultat suivant est facile :

**Lemme 1.17.** *Si  $X$  est une partie positive de  $\Lambda$ , alors  $\sigma^{-1}(X)$  est une partie positive de  $\Lambda'$ .*

*Démonstration.* Soit  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ . Posons  $X' = \sigma^{-1}(X)$ . Montrons que  $X' \in \mathcal{P}os(\Lambda')$ .

(1) On a  $X' \cup (-X') = \sigma^{-1}(X \cup (-X)) = \sigma^{-1}(\Lambda) = \Lambda'$ .

(2) Si  $\lambda'$  et  $\mu'$  sont deux éléments de  $X'$ , alors  $\sigma(\lambda')$  et  $\sigma(\mu')$  appartiennent à  $X$ . Donc  $\sigma(\lambda') + \sigma(\mu') \in X$ . En d'autres termes,  $\lambda' + \mu' \in X'$ . Donc  $X' + X' \subseteq X'$ .

(3) On a  $X' \cap (-X') = \sigma^{-1}(X \cap (-X))$ , donc l'ensemble  $X' \cap (-X')$  est un sous-groupe de  $\Lambda'$ .  $\square$

**Corollaire 1.18.** *Si  $\Lambda'$  est un sous-groupe de  $\Lambda$  et si  $X$  est une partie positive de  $\Lambda$ , alors  $X \cap \Lambda'$  est une partie positive de  $\Lambda'$ .*

Si  $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  est un morphisme de groupes abéliens, nous noterons  $\sigma^* : \mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda')$ ,  $X \mapsto \sigma^{-1}(X)$  induite par le lemme 1.17. Si  $\tau : \Lambda'' \rightarrow \Lambda'$  est un morphisme de groupe abéliens, il est alors facile de vérifier que

$$(1.19) \quad (\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^*.$$

D'autre part, si on note  $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda'$ , alors  $\sigma$  induit une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\sigma_{\mathbb{R}} : V' \rightarrow V$  dont nous noterons  ${}^t\sigma_{\mathbb{R}} : V^* \rightarrow V'^*$  l'application duale et  ${}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow V'^*/\mathbb{R}_{>0}$  l'application (continue) induite. Il est alors facile de vérifier que le diagramme

$$(1.20) \quad \begin{array}{ccccc} V^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\overline{\text{Pos}}} & \mathcal{P}os(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & V^*/\mathbb{R}_{>0} \\ \downarrow {}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} & & \downarrow \sigma^* & & \downarrow {}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} \\ V'^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\overline{\text{Pos}'}} & \mathcal{P}os(\Lambda') & \xrightarrow{\pi'} & V'^*/\mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

est commutatif (où  $\overline{\text{Pos}'}$  et  $\pi'$  sont les analogues de  $\overline{\text{Pos}}$  et  $\pi$  pour le réseau  $\Lambda'$ ).

## 2. TOPOLOGIE SUR $\mathcal{P}os(\Lambda)$

Dans cette section, nous allons définir sur  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  une topologie et en étudier les propriétés. Nous allons notamment montrer que la plupart des applications introduites dans la section précédente ( $\overline{\text{Pos}}$ ,  $\pi$ ,  $i_{\bar{\varphi}}, \dots$ ) sont continues.

**2.A. Définition.** Si  $E$  est une partie de  $\Lambda$ , nous poserons

$$\mathcal{U}(E) = \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid X \cap E = \emptyset\}.$$

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des éléments de  $\Lambda$ , nous noterons pour simplifier  $\mathcal{U}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  l'ensemble  $\mathcal{U}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$ . Si cela est nécessaire, nous noterons ces ensembles  $\mathcal{U}_{\Lambda}(E)$  ou  $\mathcal{U}_{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On a alors

$$(2.1) \quad \mathcal{U}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathcal{U}(\lambda).$$

Notons que

$$(2.2) \quad \mathcal{U}(\emptyset) = \mathcal{P}os(\Lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\Lambda) = \{\emptyset\}.$$

D'autre part, si  $(E_i)_{i \in I}$  est une famille de parties de  $\Lambda$ , alors

$$(2.3) \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}(E_i) = \mathcal{U}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right).$$

Une partie  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  sera dite *ouverte* si, pour tout  $X \in \mathcal{U}$ , il existe une partie **finie**  $E$  de  $\Lambda$  telle que  $X \in \mathcal{U}(E)$  et  $\mathcal{U}(E) \subset \mathcal{U}$ . L'égalité 2.3 montre que cela définit bien une topologie sur  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .

**Proposition 2.4.** *Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  contenant  $\Lambda$ , alors  $\mathcal{U} = \mathcal{P}os(\Lambda)$ . En particulier,  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  est connexe. Si  $\Lambda \neq 0$ , alors il n'est pas séparé.*

*Démonstration.* Par définition, il existe une partie finie  $E$  de  $\Lambda \setminus \Lambda$  telle que  $\mathcal{U}(E) \subseteq \mathcal{U}$ . Mais on a forcément  $E = \emptyset$ , donc  $\mathcal{U} = \mathcal{P}os(\Lambda)$  d'après 2.2. D'où le résultat.

Le fait que  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  n'est pas séparé (lorsque  $\Lambda \neq 0$ ) en découle : le point  $\Lambda$  de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  ne peut être séparé d'aucun autre.  $\square$

**EXEMPLE 2.5** - L'espace topologique  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z})$  n'a que trois points :  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ . Sur ces trois points, seul  $\mathbb{Z}$  est un point fermé et  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$  sont des points ouverts (en effet,  $\{\mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathcal{U}(-1)$  et  $\{\mathbb{Z}_{\leq 0}\} = \mathcal{U}(1)$ ).  $\square$

Il est clair que la topologie sur  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  définie ci-dessus est la topologie induite par une topologie sur l'ensemble des parties de  $\Lambda$  (définie de façon analogue) : cette dernière est très grossière mais sa restriction à  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  est plus intéressante.

Nous aurons besoin de la propriété suivante des ensembles  $\mathcal{U}(E)$  :

**Lemme 2.6.** *Soit  $E$  une partie **finie** de  $\Lambda$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathcal{U}(E) = \emptyset$ .
- (2) Il existe  $n \geq 1$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$  et  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que  $\sum_{i=1}^n r_i \lambda_i = 0$ .
- (3) Il n'existe pas de forme linéaire  $\varphi$  sur  $V^*$  telle que  $\varphi(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$ .

*Démonstration.* S'il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $V^*$  telle que  $\varphi(E) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ , alors  $\mathcal{P}os(-\varphi) \in \mathcal{U}(E)$ , et donc  $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$ . Donc (1)  $\Rightarrow$  (3).

Supposons trouvés  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$  et  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que  $r_1 \lambda_1 + \dots + r_n \lambda_n = 0$ . Alors, si  $X \in \mathcal{U}(E)$ , on a  $-\lambda_2, \dots, -\lambda_n \in X$ . Mais  $r_1 \lambda_1 = -r_2 \lambda_2 - \dots - r_n \lambda_n \in X$ , donc  $\lambda_1 \in X$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc (2)  $\Rightarrow$  (1).

Il nous reste à montrer que (3)  $\Rightarrow$  (2). Supposons que (2) n'est pas vraie. Nous allons montrer qu'alors (3) n'est pas vraie en raisonnant par récurrence sur la dimension de  $V$  (c'est-à-dire le rang de  $\Lambda$ ). Posons

$$\mathcal{C} = \{t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n \mid n \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Alors  $\mathcal{C}$  est une partie convexe de  $V$  contenant  $E$  et, d'après le lemme 1.10 et le fait que (2) ne soit pas vraie, on a  $0 \notin \mathcal{C}$ . Par conséquent, il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  telle que  $\varphi(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Posons  $\Lambda' = (\text{Ker } \varphi) \cap \Lambda$  et  $E' = E \cap \Lambda$ . Alors l'assertion (2) pour  $E'$  n'est pas vraie elle aussi donc, par hypothèse de récurrence, il existe une forme linéaire  $\psi$  sur  $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda' \subseteq V$  telle que  $\psi(E') \subset \mathbb{R}_{>0}$ . Soit  $\tilde{\psi}$  une extension de  $\psi$  à  $V$ . Puisque

$\varphi(E \setminus E') \subset \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varphi(\lambda) + \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) > 0$  pour tout  $\lambda \in E \setminus E'$ . Mais on a aussi, si  $\lambda \in E'$ ,  $\varphi(\lambda) + \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) = \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) > 0$ . Donc  $(\varphi + \varepsilon\tilde{\psi})(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$ .  $\square$

Si  $\mathcal{E}$  est une partie de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ , nous noterons  $\overline{\mathcal{E}}$  son adhérence dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .

**Corollaire 2.7.** *Soit  $E$  une partie **finie** de  $\Lambda$  telle que  $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$ . Alors*

$$\overline{\mathcal{U}(E)} = \mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in E} \mathcal{U}(-\lambda) \right).$$

*Démonstration.* Posons

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\lambda \in E} \mathcal{U}(-\lambda)$$

et

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \mathcal{O}.$$

Alors  $\mathcal{F}$  est fermé dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  et contient  $\mathcal{U}(E)$ . Donc  $\overline{\mathcal{U}(E)} \subseteq \mathcal{F}$ .

Réciproquement, soit  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \overline{\mathcal{U}(E)}$ . Nous devons montrer que

$$(?) \quad X \in \mathcal{O}.$$

Puisque  $\mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \overline{\mathcal{U}(E)}$  est un ouvert, il existe une partie finie  $F$  de  $\Lambda$  telle que  $X \in \mathcal{U}(F)$  et  $\mathcal{U}(F) \subseteq \mathcal{O}$ . En particulier,  $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{U}(E) = \emptyset$ . En d'autres termes, d'après 2.3, on a  $\mathcal{U}(E \cup F) = \emptyset$ . Donc, d'après le lemme 2.6, il existe  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in E$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_n \in F$ ,  $r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tels que

$$r_1\lambda_1 + \dots + r_m\lambda_m + s_1\mu_1 + \dots + s_n\mu_n = 0$$

et  $m + n \geq 1$ . En fait, comme  $\mathcal{U}(E)$  et  $\mathcal{U}(F)$  sont toutes deux non vides, il découle du lemme 2.6 que  $m, n \geq 1$ .

Si  $X \notin \mathcal{O}$ , alors  $-\lambda_i \in X$  pour tout  $i$ , ce qui implique que  $s_1\mu_1 + \dots + s_n\mu_n \in X$ . Cela ne peut se produire que si au moins l'un des  $\mu_j$  appartient à  $X$ , mais c'est impossible car  $F \cap X = \emptyset$ . D'où (?).  $\square$

**EXEMPLE 2.8** - Le corollaire 2.7 n'est pas forcément vrai si  $\mathcal{U}(E) = \emptyset$ . En effet, si  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ , alors  $\mathcal{U}(\lambda, -\lambda) = \emptyset$  mais, du moins lorsque  $\dim V \geq 2$ , on a  $\mathcal{U}(\lambda) \cup \mathcal{U}(-\lambda) \neq \mathcal{P}os(\Lambda)$ .  $\square$

**2.B. Functorialité.** Si  $\Lambda'$  est un autre réseau et si  $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  est un morphisme de groupes et si  $E'$  est une partie de  $\Lambda'$ , alors

$$(2.9) \quad (\sigma^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda'}(E')) = \mathcal{U}_{\Lambda}(\sigma(E')).$$

*Preuve de 2.9.* Soit  $X$  une partie positive de  $\Lambda$ . Alors  $X \in (\sigma^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda'}(E'))$  (resp.  $X \in \mathcal{U}_{\Lambda}(\sigma(E'))$ ) si et seulement si  $\sigma^{-1}(X) \cap E' = \emptyset$  (resp.  $X \cap \sigma(E') = \emptyset$ ). Il est alors facile de vérifier que ces deux dernières conditions sont équivalentes.  $\square$

Cela implique le résultat suivant :

**Proposition 2.10.** *L'application  $\sigma^* : \mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda')$  est continue.*

**2.C. Continuité.** D'après la section 1, nous avons équipé l'espace topologique  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  de deux applications  $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  et  $\pi : \mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$  telles que  $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$ . Nous montrerons dans la proposition 2.11 que ces applications sont continues (lorsque  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$  est bien sûr muni de la topologie quotient) et nous en déduisons quelques autres propriétés topologiques de ces applications. Avant cela, introduisons la notation suivante : si  $E$  est une partie finie de  $\Lambda$ , on pose

$$\mathcal{V}(E) = \{\bar{\varphi} \in V^*/\mathbb{R}_{>0} \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Si cela est nécessaire, nous noterons  $\mathcal{V}_{\Lambda}(E)$  l'ensemble  $\mathcal{V}(E)$ . Alors

$$p^{-1}(\mathcal{V}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Donc  $p^{-1}(\mathcal{V}(E))$  est ouvert, donc  $\mathcal{V}(E)$  est ouvert dans  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$  par définition de la topologie quotient.

**Proposition 2.11.** *Les applications  $\overline{\text{Pos}}$  et  $\pi$  sont continues. De plus :*

- (a)  $\overline{\text{Pos}}$  induit un homéomorphisme sur son image.
- (b) L'image de  $\overline{\text{Pos}}$  est dense dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .

*Démonstration.* Soit  $E$  une partie finie de  $\Lambda$ . Alors

$$(2.12) \quad \overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{U}(E)) = \mathcal{V}(E).$$

Donc  $\overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{U}(E))$  est un ouvert de  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ . Donc  $\overline{\text{Pos}}$  est continue.

Montrons maintenant que  $\pi$  est continue. Nous procéderons par étapes :

**Lemme 2.13.** *Les  $\mathcal{V}(E)$ , où  $E$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $\Lambda$ , forment une base d'ouverts de  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ .*

*Preuve du lemme 2.13.* Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $V^*/\mathbb{R}_{>0}$  et soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $V$  telle que  $\bar{\varphi} \in \mathcal{U}$ . Nous devons montrer qu'il existe une partie finie  $E$  de  $V$  telle que  $\bar{\varphi} \in \mathcal{V}(E)$  et  $\mathcal{V}(E) \subset \mathcal{U}$ .

Si  $\varphi = 0$ , alors  $\mathcal{U} = V^*/\mathbb{R}_{>0}$  et le résultat est clair. Nous supposons donc que  $\varphi \neq 0$ . Il existe alors  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $\varphi(\lambda_0) > 0$ . Quitte à remplacer  $\varphi$  par un multiple positif, on peut supposer que  $\varphi(\lambda_0) = 1$ . Notons  $\mathcal{H}_0$  l'hyperplan affine  $\{\psi \in V^* \mid \psi(\lambda_0) = 1\}$ . Alors l'application naturelle  $\mathcal{H}_0 \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$  induit un homéomorphisme  $\nu : \mathcal{H}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(-\lambda_0)$ . De plus,  $\varphi = \nu^{-1}(\varphi) \in \mathcal{H}_0$ . Donc  $\varphi \in \nu^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}(-\lambda_0))$ . Il suffit donc de vérifier que les intersections finies de demi-espaces ouverts *rationnels* (i.e. de la forme  $\{\psi \in \mathcal{H}_0 \mid \psi(\lambda) > n\}$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{Z}\lambda_0$ ) forment une base de voisinages de l'espace affine  $\mathcal{H}_0$ , ce qui est immédiat.  $\square$

Compte tenu du lemme 2.13, il suffit de montrer que, si  $E$  est une partie finie de  $\Lambda$ , alors  $\pi^{-1}(\mathcal{V}(E))$  est un ouvert de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ . De plus,

$$\mathcal{V}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathcal{V}(\lambda).$$

Par conséquent, la continuité de  $\pi$  découlera du lemme suivant:

**Lemme 2.14.** *Si  $\lambda \in \Lambda$ , alors  $\pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$  est un ouvert de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .*

*Preuve du lemme 2.14.* Soit  $X \in \pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$  et soit  $\varphi = \pi(X)$ . Par définition,  $\varphi(\lambda) < 0$  et donc  $\lambda \notin X$ . Soit  $e_1, \dots, e_n$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$ . Il existe un entier naturel non nul  $N$  tel que  $\varphi(\lambda \pm \frac{1}{N}e_i) < 0$  pour tout  $i$ . Quitte à remplacer  $\lambda$  par  $N\lambda$ , on peut supposer que  $\varphi(\lambda \pm e_i) < 0$  pour tout  $i$ . On pose alors

$$E = \{\lambda + e_1, \lambda - e_1, \dots, \lambda + e_n, \lambda - e_n\}.$$

Alors  $X \in \mathcal{U}(E)$  par construction. Il reste à montrer que  $\mathcal{U}(E) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$ . Soit  $Y \in \mathcal{U}(E)$  et posons  $\psi = \pi(Y)$ . Supposons de plus que  $\psi \notin \mathcal{V}(\lambda)$ . On a alors  $\psi(\lambda) \geq 0$ . D'autre part,  $\psi(\lambda \pm e_i) \leq 0$  pour tout  $i$ . Cela montre que  $2\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_1) + \psi(\lambda - e_1) \leq 0$ , et donc  $\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_i) = 0$ , et donc  $\psi(e_i) = 0$  pour tout  $i$ . Donc  $\psi$  est nulle et donc  $Y = \Lambda$ , ce qui contredit le fait que  $Y \in \mathcal{U}(E)$ . Cela montre donc que  $\psi \in \mathcal{V}(\lambda)$ , comme attendu.  $\square$

Puisque  $\pi$  et  $\overline{\text{Pos}}$  sont continues et vérifient  $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$ ,  $\overline{\text{Pos}}$  induit un homéomorphisme sur son image. D'où (a).



L'assertion (b) découle du lemme suivant (qui est une conséquence immédiate de l'équivalence entre (1) et (3) dans le lemme 2.6) et de 2.12 :

**Lemme 2.15.** *Soit  $E$  une partie finie de  $\Lambda$  telle que  $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$ . Alors  $\mathcal{V}(E) \neq \emptyset$ .*

La preuve de la proposition 2.11 est terminée.  $\square$

Nous allons maintenant étudier les propriétés topologiques des applications  $i_{\bar{\varphi}}$ .

**Proposition 2.16.** *Soit  $\varphi \in V^*$  et supposons  $\varphi \neq 0$ . Alors :*

- (a) 
$$\bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ ouvert de } \mathcal{P}os(\Lambda) \\ \mathcal{P}os(\varphi) \in \mathcal{U}}} \mathcal{U} = i_{\bar{\varphi}}(\mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})) = \pi^{-1}(\bar{\varphi}).$$
- (d)  $i_{\bar{\varphi}}$  est continue et induit un homéomorphisme sur son image.

*Démonstration.* (a) Notons  $I_{\varphi}$  l'image de  $i_{\bar{\varphi}}$ . On a alors, d'après le lemme 1.9,

$$(*) \quad I_{\varphi} = \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X\}.$$

Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert contenant  $\text{Pos}(\varphi)$ , alors il existe une partie finie  $E$  de  $\Lambda \setminus \text{Pos}(\varphi)$  telle que  $\mathcal{U}(E) \subseteq \mathcal{U}$ . Mais, si  $X$  est dans l'image de  $i_{\bar{\varphi}}$ , alors  $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ , donc  $X \cap E = \emptyset$ . Et donc  $X \in \mathcal{U}$ , ce qui montre que

$$I_{\varphi} \subseteq \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ ouvert de } \mathcal{P}os(\Lambda) \\ \mathcal{P}os(\varphi) \in \mathcal{U}}} \mathcal{U}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$  tel que  $X \notin I_{\varphi}$ . Posons  $\psi = \pi(X)$ . Alors  $\bar{\psi} \neq \bar{\varphi}$  donc, d'après la preuve du théorème 1.11, il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\varphi(\lambda) < 0$  et  $\psi(\lambda) > 0$ . On a donc, d'après le lemme 1.9,  $X \notin \mathcal{U}(\lambda)$ . D'autre part,  $\text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{U}(\lambda)$ . D'où (a).

Montrons (b). On note  $\pi_{\bar{\varphi}} : I_{\varphi} \rightarrow \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ ,  $X \mapsto X \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ . D'après la proposition 1.13,  $\pi_{\bar{\varphi}}$  est la bijection réciproque de  $i_{\bar{\varphi}} : \mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}) \rightarrow I_{\varphi}$ . Il nous faut donc montrer que  $i_{\bar{\varphi}}$  et  $\pi_{\bar{\varphi}}$  sont continues. Si  $F$  est une partie finie de  $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ , nous noterons  $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(F)$  l'analogue de l'ensemble  $\mathcal{U}(F)$  défini à l'intérieur de  $\mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ .

Soit  $E$  une partie finie de  $\Lambda$ . Nous voulons montrer que  $i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}(E))$  est un ouvert de  $\mathcal{P}os(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$ . S'il existe  $\lambda \in E$  tel que  $\varphi(\lambda) > 0$ , alors  $\mathcal{U}(E) \cap I_{\varphi} = \emptyset$  (voir (\*)). On peut donc supposer que  $\varphi(\lambda) \leq 0$  pour tout  $\lambda \in E$ . Il est alors facile de vérifier que

$$i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}(E)) = \mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(E \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}).$$

Donc  $i_{\bar{\varphi}}$  est continue.

Soit  $F$  une partie finie de  $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$ . Alors

$$\pi_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(F)) = \mathcal{U}(F) \cap I_{\varphi}.$$

Donc  $\pi_{\bar{\varphi}}$  est continue.  $\square$

Nous allons résumer dans le théorème suivant la plupart des résultats obtenus dans cette sous-section.

**Théorème 2.17.** *Supposons  $\Lambda \neq 0$  et soit  $\varphi \in V^*$ ,  $\varphi \neq 0$ .*

- (a)  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  est connexe. Il n'est pas séparé si  $\Lambda \neq 0$ .
- (b) Les applications  $\pi : \mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$  et  $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  sont continues et vérifient  $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$ .
- (c)  $\overline{\text{Pos}}$  induit un homéomorphisme sur son image ; cette image est dense dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .
- (d)  $\pi^{-1}(\bar{\varphi})$  est l'intersection des voisinages de  $\text{Pos}(\varphi)$  dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .
- (e)  $i_{\bar{\varphi}}$  est un homéomorphisme.

### 3. ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS

L'application continue  $\text{Pos} : V^* \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  a une image dense. Nous allons étudier ici comment se transpose la notion d'arrangement d'hyperplans (et les objets attachés : facettes, chambres, support...) à l'espace topologique  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  à travers  $\text{Pos}$ . Cela nous permettra d'énoncer les conjectures sur les cellules de Kazhdan-Lusztig sous la forme la plus générale possible.

**3.A. Sous-espaces rationnels.** Si  $E$  est une partie de  $\Lambda$ , on pose

$$\mathcal{L}(E) = \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid E \subset X \cap (-X)\}.$$

Si cela est nécessaire, nous le noterons  $\mathcal{L}_{\Lambda}(E)$ . On appelle *sous-espace rationnel* de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  toute partie de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  de la forme  $\mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est une partie de  $\Lambda$ . Si  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ , on notera  $\mathcal{H}_{\lambda}$  le sous-espace rationnel  $\mathcal{L}(\{\lambda\})$  : un tel sous-espace rationnel sera appelé un *hyperplan rationnel*. Notons que

$$(3.1) \quad \mathcal{P}os(\Lambda) = \mathcal{U}(\lambda) \dot{\cup} \mathcal{H}_{\lambda} \dot{\cup} \mathcal{U}(-\lambda).$$

La proposition suivante justifie quelque peu la terminologie :

**Proposition 3.2.** *Soit  $E$  est une partie de  $\Lambda$ . Notons  $\Lambda(E)$  le sous-réseau  $\Lambda \cap \sum_{\lambda \in E} \mathbb{Q}E$  de  $\Lambda$  et soit  $\sigma_E : \Lambda \rightarrow \Lambda(E)$  l'application canonique. Alors :*

- (a)  $\mathcal{L}(E) = \bigcap_{\lambda \in E \setminus \{0\}} \mathcal{H}_{\lambda} = \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X\}$ .
- (b)  $\mathcal{L}(E)$  est fermé dans  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .

- (c)  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) = 0\} = E^\perp$ .
- (d)  $\overline{\text{Pos}}(\pi(\mathcal{L}(E))) \subseteq \mathcal{L}(E)$ .
- (e)  $\overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{L}(E)) = \pi(\mathcal{L}(E))$ .
- (f)  $\mathcal{L}(E) = \overline{\text{Pos}(\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)))}$ .
- (g) L'application  $\sigma_E^* : \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$  a pour image  $\mathcal{L}(E)$  et induit un homéomorphisme  $\mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E)$ .

*Démonstration.* La première égalité de (a) est immédiate. La deuxième découle de la proposition 1.3 (c). (b) découle de (a) et de 3.1. (c) est tout aussi clair.

(d) Si  $X \in \overline{\text{Pos}}(\pi(\mathcal{L}(E)))$ , alors il existe  $Y \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $X = \overline{\text{Pos}}(\pi(Y))$ . Posons  $\bar{\varphi} = \pi(Y)$ , où  $\varphi \in V^*$ . Alors  $E \subseteq Y \cap (-Y)$  et  $Y \subseteq \text{Pos}(\varphi)$ . Or,  $\varphi(\lambda) = 0$  si  $\lambda \in Y \cap (-Y)$ , donc  $X = \text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{L}(E)$ .

(e) D'après (d), on a  $\pi(\mathcal{L}(E)) \subseteq \overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{L}(E))$ . Réciproquement, soit  $\varphi$  un élément de  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E))$ , alors  $\bar{\varphi} = \pi(\overline{\text{Pos}}(\bar{\varphi})) \in \pi(\mathcal{L}(E))$ . D'où (e).

(f) Notons  $\mathcal{F}_E = \text{Pos}(\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)))$ . On a  $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{L}(E)$  donc il découle du (a) que  $\overline{\mathcal{F}_E} \subseteq \mathcal{L}(E)$ . Réciproquement, soit  $F$  une partie finie de  $\Lambda$  telle que  $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{F}_E = \emptyset$ . Nous devons montrer que  $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{L}(E) = \emptyset$ . Or, le fait que  $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{F}_E = \emptyset$  est équivalent à l'assertion suivante (voir (c)) :

$$\forall \varphi \in E^\perp, \forall \lambda \in F, \varphi(\lambda) \geq 0.$$

Or, si  $\varphi \in E^\perp$ , alors  $-\varphi \in E^\perp$ , ce qui implique que :

$$\forall \varphi \in E^\perp, \forall \lambda \in F, \varphi(\lambda) = 0.$$

En d'autres termes,  $F \subseteq (E^\perp)^\perp \cap \Lambda = \Lambda(E)$ . Mais, si  $X \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\Lambda(E) \subseteq X$  d'après (a). Donc  $X \notin \mathcal{U}(F)$ , comme espéré.

(g) Le fait que l'image de  $\sigma_E^*$  soit  $\mathcal{L}(E)$  découle de (a). D'autre part,  $\sigma_E^*$  est continue d'après la proposition 2.10. Notons

$$\begin{aligned} \gamma_E : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \\ X &\longmapsto X/\Lambda(E). \end{aligned}$$

Alors  $\gamma_E$  est la réciproque de  $\sigma_E^*$ . Il ne nous reste qu'à montrer que  $\gamma_E$  est continue. Soit donc  $F$  une partie finie de  $\Lambda/\Lambda(E)$  et notons  $\tilde{F}$  un ensemble de représentants des éléments de  $F$  dans  $\Lambda$ . On a

$$\begin{aligned} \gamma_E^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E)}(F)) &= \{X \in \mathcal{L}(E) \mid \forall \lambda \in F, \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ &= \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall \lambda \in F, \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ &= \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall \lambda \in \tilde{F}, \lambda \notin X\} \\ &= \{X \in \mathcal{L}(E) \mid \forall \lambda \in \tilde{F}, \lambda \notin X\} \\ &= \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{U}_\Lambda(\tilde{F}). \end{aligned}$$

Donc  $\gamma_E^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E)})$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E)$ . Cela montre la continuité de  $\gamma_E$ .  $\square$

**3.B. Demi-espaces.** Soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan rationnel de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  et soit  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$  tel que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda$ . D'après 3.1, l'hyperplan  $\mathcal{H}$  nous définit une unique relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{H}}$  sur  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  pour laquelle les classes d'équivalence sont  $\mathcal{U}(\lambda)$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{U}(-\lambda)$  : notons que cette relation ne dépend pas du choix de  $\lambda$ . De plus :

**Proposition 3.3.**  *$\mathcal{H}$  est un fermé de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  et  $\mathcal{U}(\lambda)$  et  $\mathcal{U}(-\lambda)$  sont les composantes connexes de  $\mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \mathcal{H}$ . De plus*

$$\overline{\mathcal{U}(\lambda)} = \mathcal{U}(\lambda) \cup \mathcal{H}_\lambda.$$

*Démonstration.* La dernière assertion est un cas particulier du corollaire 2.7.

Montrons pour finir que  $\mathcal{U}(\lambda)$  est connexe. Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux ouverts de  $\mathcal{U}(\lambda)$  tels que  $\mathcal{U}(\lambda) = \mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$ . Alors

$$\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda)) = \text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}) \amalg \text{Pos}^{-1}(\mathcal{V}).$$

Mais  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda)) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\lambda) < 0\}$ . Donc  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda))$  est connexe. Puisque  $\text{Pos}$  est continue, cela implique que  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$  ou  $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset$ . Le lemme 2.15 implique que  $\mathcal{U} = \emptyset$  ou  $\mathcal{V} = \emptyset$ .  $\square$

Si  $X \in \mathcal{P}os(\Lambda)$ , nous noterons  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)$  la classe d'équivalence de  $X$  sous la relation  $\sim_{\mathcal{H}}$ . Il résulte de la proposition 3.3 que  $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)}$  est une réunion de classes d'équivalences pour  $\sim_{\mathcal{H}}$ .

**3.C. Arrangements.** Nous travaillerons désormais sous l'hypothèse suivante :

*Fixons maintenant, et ce jusqu'à la fin de cette section, un ensemble fini  $\mathfrak{A}$  d'hyperplans rationnels de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ .*

Nous allons redéfinir, dans notre espace  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ , les notions de *facettes*, *chambres* et *faces* associées à  $\mathfrak{A}$ , de façon analogue à ce qui se fait pour les arrangements d'hyperplans dans un espace réel [7, Chapitre V, §1]. Les propriétés des applications  $\pi$  et  $\overline{\text{Pos}}$  établies précédemment permettent facilement de démontrer des résultats analogues en copiant presque mot à mot les preuves de [7, Chapitre V, §1].

Nous définissons la relation  $\sim_{\mathfrak{A}}$  sur  $\mathcal{P}os(\Lambda)$  de la façon suivante : si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments de  $\mathcal{P}os(\Lambda)$ , nous écrirons  $X \sim_{\mathfrak{A}} Y$  si  $X \sim_{\mathcal{H}} Y$  pour tout  $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}$ . Nous appellerons *facettes* (ou  *$\mathfrak{A}$ -facettes*) les classes d'équivalence pour la relation

$\sphericalangle_{\mathfrak{A}}$ . Nous appellerons *chambres* (ou  $\mathfrak{A}$ -*chambres*) les facettes qui ne rencontrent aucun hyperplan de  $\mathfrak{A}$ . Si  $\mathcal{F}$  est une facette, nous noterons

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{H} \in \mathfrak{A} \\ \mathcal{F} \subset \mathcal{H}}} \mathcal{H},$$

avec la convention habituelle que  $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \mathcal{P}os(\Lambda)$  si  $\mathcal{F}$  est une chambre. Nous l'appellerons le *support* de  $\mathcal{F}$  et nous appellerons *dimension* de  $\mathcal{F}$  l'entier

$$\dim \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}os^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})).$$

De même nous appellerons *codimension* de  $\mathcal{F}$  l'entier

$$\text{codim } \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim \mathcal{F}.$$

Avec ces définitions, une chambre est une facette de codimension 0.

**Proposition 3.4.** *Soit  $\mathcal{F}$  une facette et soit  $X \in \mathcal{F}$ . Alors :*

- (a)  $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)$ .
- (b)  $\overline{\mathcal{F}} = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathfrak{A}} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)}$ .
- (c)  $\overline{\mathcal{F}}$  est la réunion de  $\mathcal{F}$  et de facettes de dimension strictement inférieures.
- (d) Si  $\mathcal{F}'$  est une facette telle que  $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}'}$ , alors  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .

*Démonstration.* (a) est une conséquence des définitions. Montrons (b). Posons

$$\mathfrak{A}_1 = \{\mathcal{H} \in \mathfrak{A} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}\}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1.$$

Pour tout  $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}$ , on fixe un élément  $\lambda(\mathcal{H}) \in \Lambda$  tel que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\lambda(\mathcal{H})}$  : si de plus  $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}_2$ , on choisit  $\lambda(\mathcal{H})$  de sorte que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}(\lambda(\mathcal{H}))$ . On pose

$$E_i = \{\lambda(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H} \in \mathfrak{A}_i\}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{U}(E_i).$$

Puisque  $\mathcal{L}$  est fermé,  $\overline{\mathcal{F}}$  est aussi l'adhérence de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{L}$ . En utilisant alors l'homéomorphisme  $\sigma_{E_1}^* : \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$  de la proposition 3.2 (g), on se ramène à calculer l'adhérence de  $\sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{F})$  dans  $\mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1))$ . Mais

$$\sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{F}) = \sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{U}_{\Lambda}(E_2)) = \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2)).$$

Or, d'après le corollaire 2.7, on a

$$\overline{\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2))} = \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in E_2} \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda)) \right).$$

Par conséquent,

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{L} \cap \sigma_{E_1}^* \left( \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in E_2} \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda)) \right) \right),$$

et donc

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{L} \cap \left( \bigcap_{\lambda \in E_2} (\mathcal{P}os(\Lambda) \setminus \mathcal{U}_{\Lambda}(-\lambda)) \right) = \bigcap_{\lambda \in E_1 \cup E_2} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}_\lambda}(X)},$$

comme attendu.

Montrons maintenant (c). D'après (b),  $\overline{\mathcal{F}}$  est bien une réunion de facettes. Si de plus  $\mathcal{F}'$  est une facette différente de  $\mathcal{F}$  et contenue dans  $\overline{\mathcal{F}}$ , l'assertion (b) montre qu'il existe  $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}_2$  tel que  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{H}$ . Donc  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H}$ , et  $\dim \text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H}) = \dim \text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})) - 1$ . D'où (c).

L'assertion (d) découle immédiatement de (c).  $\square$

On définit une relation  $\preceq$  (ou  $\preceq_{\mathfrak{A}}$  s'il est nécessaire de préciser) entre les facettes : on écrit  $\mathcal{F} \preceq \mathcal{F}'$  si  $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}'}$  (c'est-à-dire si  $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}'}$ ). La proposition 3.4 (d) montre que :

**Corollaire 3.5.** *La relation  $\preceq$  entre les facettes est une relation d'ordre.*

#### 4. ALGÈBRES DE HECKE

**4.A. Préliminaires.** Soit  $(W, S)$  un groupe de Coxeter ( $S$  et, bien sûr,  $W$  pouvant être infinis). Si  $s, t \in S$ , nous écrirons  $s \sim t$  si  $s$  et  $t$  sont conjugués dans  $W$ . Posons  $\bar{S} = S/\sim$ . Si  $s \in S$ , nous noterons  $\bar{s}$  sa classe dans  $\bar{S}$ . Nous noterons  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\bar{S}$ .

Soit  $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction longueur associée à  $S$ . Si  $\omega \in \bar{S}$  et si  $w \in W$ , nous noterons  $\ell_\omega(w)$  le nombre d'apparitions d'éléments de  $\omega$  dans une expression réduite de  $w$  (il est bien connu que cela ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). Posons

$$\begin{aligned} \ell : W &\longrightarrow \mathbb{Z}[\bar{S}] \\ w &\longmapsto \sum_{\omega \in \bar{S}} \ell_\omega(w) \omega. \end{aligned}$$

Si  $\Gamma$  est un groupe abélien, une application  $\varphi : W \rightarrow \Gamma$  est appelée une *fonction de poids* si  $\varphi(ww') = \varphi(w) + \varphi(w')$  pour tous  $w, w' \in W$  tels que  $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$ . Les fonctions  $\ell_\omega$  (vues comme fonctions à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ ) et  $\ell$  sont des fonctions de poids. En fait, la fonction  $\ell$  est universelle dans le sens suivant :

**Lemme 4.1.** *Soit  $\varphi : W \rightarrow \Gamma$  une fonction de poids. Alors il existe un unique morphisme de groupes  $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}[\bar{S}] \rightarrow \Gamma$  tel que  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \ell$ .*

*Démonstration.* Claire. □

Notons  $\mathcal{F}(\bar{S}, \Gamma)$  l'ensemble des applications  $\bar{S} \rightarrow \Gamma$  et notons  $\text{Poids}(W, \Gamma)$  celui des fonctions de poids  $W \rightarrow \Gamma$ . Le lemme 4.1 montre qu'il existe des bijections canoniques

$$\text{Poids}(W, \Gamma) \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}(\bar{S}, \Gamma) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbb{Z}[\bar{S}], \Gamma).$$

Nous identifierons dans la suite ces trois ensembles. Plus précisément, nous travaillerons avec des applications  $\varphi : \bar{S} \rightarrow \Gamma$  que nous verrons indifféremment comme des morphismes  $\mathbb{Z}[\bar{S}] \rightarrow \Gamma$  ou des fonctions de poids  $W \rightarrow \Gamma$ . En particulier, nous pourrons parler aussi bien de  $\varphi(w)$  (pour  $w \in W$ ) que de  $\varphi(\lambda)$  (pour  $\lambda \in \mathbb{Z}[\bar{S}]$ ), en espérant que cela n'entraîne pas de confusion. Par exemple,  $\text{Ker } \varphi$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$  (et non pas de  $W$  !).

**4.B. Algèbres de Hecke.** Fixons tout d'abord les notations en vigueur jusqu'à la fin de cet article.

**Notations.** *Soit  $\Gamma$  un groupe abélien et soit  $\varphi : \bar{S} \rightarrow \Gamma$  une application.*

Adoptons une notation exponentielle pour l'algèbre de groupe de  $\Gamma$  :  $\mathbb{Z}[\Gamma] = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{Z}e^\gamma$ , où  $e^\gamma \cdot e^{\gamma'} = e^{\gamma+\gamma'}$  pour tous  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ . Nous noterons alors  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$  l'algèbre de Hecke de paramètre  $\varphi$ , c'est-à-dire le  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module libre de base  $(T_w)_{w \in W}$  muni d'une multiplication  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -bilinéaire totalement déterminée par les règles suivantes :

$$\begin{cases} T_w T_{w'} = T_{ww'} & \text{si } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w'), \\ (T_s - e^{\varphi(s)})(T_s + e^{-\varphi(s)}) = 0 & \text{si } s \in S. \end{cases}$$

S'il est nécessaire de préciser, nous noterons  $T_w^\varphi$  l'élément  $T_w$  pour rappeler qu'il vit dans l'algèbre de Hecke de paramètre  $\varphi$ .

Cette algèbre est munie de plusieurs involutions. Nous n'utiliserons que la suivante : si  $\gamma \in \Gamma$  et  $w \in W$ , posons  $\bar{e}^\gamma = e^{-\gamma}$  et  $\bar{T}_w = T_{w^{-1}}$  (notons que  $T_w$  est inversible). Ceci s'étend par  $\mathbb{Z}$ -linéarité en une application  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -antilinéaire  $\mathcal{H}(W, S, \varphi) \rightarrow \mathcal{H}(W, S, \varphi)$ ,  $h \mapsto \bar{h}$  qui est un automorphisme involutif d'anneau.

La construction précédente est fonctorielle. Si  $\rho : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  est un morphisme de groupes abéliens, alors  $\rho$  induit une application

$$\rho_* : \mathcal{H}(W, S, \varphi) \longrightarrow \mathcal{H}(W, S, \rho \circ \varphi)$$

définie comme étant l'unique application  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -linéaire envoyant  $T_w^\varphi$  sur  $T_w^{\rho \circ \varphi}$  (ici,  $\mathcal{H}(W, S, \rho \circ \varphi)$  est vu comme une  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbre à travers le morphisme  $\mathbb{Z}[\Gamma] \rightarrow \mathbb{Z}[\Gamma']$  induit par  $\rho$ ). Il est alors facile de vérifier que

$$(4.2) \quad \rho_* \text{ est un morphisme de } \mathbb{Z}[\Gamma]\text{-algèbres.}$$

Si  $h \in \mathcal{H}(W, S, \varphi)$ , alors

$$(4.3) \quad \overline{\rho_*(h)} = \rho_*(\bar{h}).$$

D'autre part, si  $\sigma : \Gamma' \rightarrow \Gamma''$  est un autre morphisme de groupes abéliens, alors

$$(4.4) \quad (\sigma \circ \rho)_* = \sigma_* \circ \rho_*.$$

Il en découle le lemme suivant :

**Lemme 4.5.** *Le morphisme de groupes  $\rho$  est injectif (respectivement surjectif, respectivement bijectif) si et seulement si le morphisme d'algèbres  $\rho_*$  l'est.*

**4.C. Algèbre de Hecke générique.** Soit  $R$  l'algèbre de groupe  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[\bar{S}]]$ . Notons  $i : \bar{S} \rightarrow \mathbb{Z}[\bar{S}]$  l'application canonique. L'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(W, S, i)$  sera alors notée  $\mathcal{H}(W, S)$  : elle est appelée l'*algèbre de Hecke générique*.

Elle est universelle dans le sens que, si on identifie l'application  $\varphi : \bar{S} \rightarrow \Gamma$  avec le morphisme  $\varphi : \mathbb{Z}[\bar{S}] \rightarrow \Gamma$ , l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$  se retrouve équipée d'un morphisme canonique de  $R$ -algèbres  $\varphi_* : \mathcal{H}(W, S) \rightarrow \mathcal{H}(W, S, \varphi)$ , qui fait de  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$  une spécialisation de  $\mathcal{H}(W, S)$ .

## 5. CELLULES DE KAZHDAN-LUSZTIG

**5.A. Base de Kazhdan-Lusztig.** Pour définir la base de Kazhdan-Lusztig, nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse et notations.** *Nous supposons jusqu'à la fin de cet article que  $\Gamma$  est équipé d'un ordre total  $\leq$  faisant de lui un groupe abélien totalement ordonné. Nous noterons respectivement  $\Gamma_{>0}$ ,  $\Gamma_{\geq 0}$ ,  $\Gamma_{<0}$  et  $\Gamma_{\leq 0}$  l'ensemble des éléments strictement positifs, positifs ou nuls, strictement négatifs et négatifs ou nuls de  $\Gamma$ .*

Si  $E$  est un sous-ensemble quelconque de  $\Gamma$ , nous poserons  $\mathbb{Z}[E] = \bigoplus_{\gamma \in E} \mathbb{Z}e^\gamma$ . Par exemple,  $\mathbb{Z}[\Gamma_{\leq 0}]$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  dont  $\mathbb{Z}[\Gamma_{<0}]$  est un idéal. Posons

$$\mathcal{H}_{<0}(W, S, \varphi) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\Gamma_{<0}] T_w.$$



Alors, si  $w \in W$ , il existe un unique élément  $C_w \in \mathcal{H}(W, S, \varphi)$  tel que

$$\begin{cases} \overline{C}_w = C_w, \\ C_w \in T_w + \mathcal{H}_{<0}(W, S, \varphi) \end{cases}$$

(voir [13, Théorème 5.2] en général). Encore une fois, s'il est nécessaire de préciser, l'élément  $C_w$  sera noté  $C_w^\varphi$ .

La famille  $(C_w)_{w \in W}$  forme alors une  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -base de  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$  (appelée *base de Kazhdan-Lusztig* [13, Theorem 5.2]). Nous noterons  $\leq_L^\varphi$ ,  $\leq_R^\varphi$  et  $\leq_{LR}^\varphi$  les préordres définis par Kazhdan et Lusztig [13, §8.1] et nous noterons  $\sim_L^\varphi$ ,  $\sim_R^\varphi$  et  $\sim_{LR}^\varphi$  les relations d'équivalence associées.

Si  $w \in W$ , et si  $? \in \{L, R, LR\}$ , nous noterons

$$\text{Cell}_?^\varphi(w) = \{x \in W \mid x \sim_?^\varphi w\}.$$

Si  $? = L, R$  ou  $LR$ , alors  $\text{Cell}_?(w)$  est appelée la *cellule à gauche*, la *cellule à droite* ou la *cellule bilatère* de  $w$  (pour  $(W, S, \varphi)$ ).

**5.B. Représentations cellulaires.** Si  $C$  est une cellule à gauche pour  $(W, S, \varphi)$ , on peut lui associer un  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$ -module  $M_C^\varphi$  [13, §8.3]. Notons  $\text{aug} : \mathbb{Z}[\Gamma] \rightarrow \mathbb{Z}$  le morphisme d'augmentation. Voyons  $\mathbb{Z}$  (ou  $\mathbb{Q}$ ) comme une  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbre à travers  $\text{aug}$ , on a un isomorphisme d'anneaux  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \mathcal{H}(W, S, \varphi) \simeq \mathbb{Z}W$ . Notons  $\mathbb{Z}M_C^\varphi$  (resp.  $\mathbb{Q}M_C^\varphi$ ) le  $\mathbb{Z}W$ -module (resp.  $\mathbb{Q}W$ -module)  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} M_C^\varphi$  (resp.  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} M_C^\varphi$ ).

Si  $W$  est *fini*, nous noterons  $\chi_C^\varphi$  le caractère de  $\mathbb{Q}M_C^\varphi$ .

**5.C. Morphismes strictement croissants.** L'objectif principal de cet article est d'étudier comment se comporte la partition en cellules lorsque le triplet  $(\Gamma, \leq, \varphi)$  varie. La première remarque facile est que cette partition ne change pas si on compose  $\varphi$  avec un morphisme strictement croissant:

**Proposition 5.1.** *Soit  $\Gamma'$  un groupe abélien totalement ordonné, soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un morphisme de groupes strictement croissant et soit  $? \in \{L, R, LR\}$ . Alors :*

- (a)  $\rho_*$  est injectif.
- (b) Si  $w \in W$ ,  $\rho_*(C_w^\varphi) = C_w^{\rho \circ \varphi}$ .
- (c) Les relations  $\leq_?^\varphi$  et  $\leq_?^{\rho \circ \varphi}$  sont égales (de même que les relations  $\sim_?^\varphi$  et  $\sim_?^{\rho \circ \varphi}$ ).
- (d) Si  $w \in W$ , alors  $\text{Cell}_?^\varphi(w) = \text{Cell}_?^{\rho \circ \varphi}(w)$ .

*Démonstration.* L'injectivité de  $\rho_*$  découle du fait que  $\rho$  lui-même est injectif (voir le lemme 4.5). D'où (a). Montrons (b). Posons  $C = \rho_*(C_w^\varphi)$ . Alors, d'après 4.3, on a  $\overline{C} = C$ . D'autre part, la stricte croissance de  $\rho$  implique que

$$(5.2) \quad \rho_*(\mathcal{H}_{<0}(W, S, \varphi)) \subseteq \mathcal{H}_{<0}(W, S, \rho \circ \varphi).$$

Par conséquent,  $C - T_w^{\rho \circ \varphi} \in \mathcal{H}_{<0}(W, S, \rho \circ \varphi)$ . Donc  $C = C_w^{\rho \circ \varphi}$  d'après la caractérisation des éléments de la base de Kazhdan-Lusztig.

Montrons maintenant (c). Si  $x, y$  et  $z \in W$ , alors il résulte de (b) que

$$(5.3) \quad \rho(h_{x,y,z}^\varphi) = h_{x,y,z}^{\rho \circ \varphi}$$

(il suffit d'appliquer  $\rho_*$  à la relation définissant les éléments  $h_{x,y,z}$ ). L'assertion (c) découle alors de cette observation, du fait que  $\rho : \mathbb{Z}[\Gamma] \rightarrow \mathbb{Z}[\Gamma']$  est injectif et de la définition des relations  $\leq_\varphi$  et  $\leq_{\rho \circ \varphi}$ .

L'assertion (d) découle immédiatement de (c).  $\square$

**5.D. Parties positives de  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$ .** Soit  $X$  une partie positive de  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$ . Posons  $\Gamma_X = \mathbb{Z}[\bar{S}]/(X \cap (-X))$  et notons  $\leq_X$  l'ordre total sur  $\Gamma_X$  défini dans 1.5. Notons  $\varphi_X : \bar{S} \rightarrow \Gamma_X$  l'application canonique. Pour simplifier, les relations  $\leq_\varphi^X$  et  $\sim_\varphi^X$  seront notées  $\leq_\varphi^X$  et  $\sim_\varphi^X$ . De même, si  $w \in W$ , nous noterons  $\text{Cell}_\varphi^X(w)$  l'ensemble  $\text{Cell}_\varphi^X(w)$  et, si  $C$  est une cellule pour  $(W, S, \varphi_X)$ , nous noterons  $\mathbb{Z}M_C^X$  le  $\mathbb{Z}W$ -module  $\mathbb{Z}M_C^{\varphi_X}$  (et, si  $W$  est *fini*, nous noterons  $\chi_C^X$  le caractère  $\chi_C^{\varphi_X}$ ).

La proposition suivante montre que la famille de triplets  $((\Gamma_X, \leq_X, \varphi_X))_{X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])}$  est essentiellement exhaustive :

**Proposition 5.4.** *Posons  $X = \text{Pos}(\varphi)$ . Alors il existe un unique morphisme de groupes  $\bar{\varphi} : \Gamma_X \rightarrow \Gamma$  tel que  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \varphi_X$ . Ce morphisme  $\bar{\varphi}$  est strictement croissant.*

*Démonstration.* En effet,  $\text{Ker } \varphi = X \cap (-X)$  donc l'existence et l'unicité de  $\bar{\varphi}$  est assurée. L'injectivité de  $\bar{\varphi}$  est immédiate. D'autre part, si  $\gamma, \gamma' \in \Gamma_X$  sont tels que  $\gamma \leq \gamma'$  et si  $\lambda \in \mathbb{Z}[\bar{S}]$  est un représentant de  $\gamma' - \gamma$ , alors  $\lambda \in X$  d'après 1.4. Donc  $\varphi(\lambda) \geq 0$ . En d'autres termes  $\bar{\varphi}(\gamma' - \gamma) \geq 0$ , c'est-à-dire  $\bar{\varphi}(\gamma) \leq \bar{\varphi}(\gamma')$ . Donc  $\bar{\varphi}$  est croissant : la croissance stricte résulte de l'injectivité.  $\square$

**Corollaire 5.5.** *Posons  $X = \text{Pos}(\varphi)$  et soit  $? \in \{L, R, LR\}$ . Alors :*

- (a) *Les relations  $\leq_\varphi$  et  $\leq_\varphi^X$  sont égales (de même que les relations  $\sim_\varphi$  et  $\sim_\varphi^X$ ).*
- (b) *Si  $w \in W$ , alors  $\text{Cell}_\varphi(w) = \text{Cell}_\varphi^X(w)$ .*
- (c) *Si  $C = \text{Cell}_\varphi(w)$ , alors  $\mathbb{Z}M_C^\varphi \simeq \mathbb{Z}M_C^X$ .*

**REMARQUE 5.6** - Soient  $\lambda \in \mathbb{Z}[\bar{S}]$  et  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ . On a alors les équivalences suivantes :

- (a)  $X \in \mathcal{U}(\lambda)$  si et seulement si  $\varphi_X(\lambda) < 0$ .
- (b)  $X \in \mathcal{H}_\lambda$  si et seulement si  $\varphi_X(\lambda) = 0$ .
- (c)  $X \in \overline{\mathcal{U}(\lambda)}$  si et seulement si  $\varphi_X(\lambda) \leq 0$ .  $\square$

**5.E. Changement de signe.** Avant d'énoncer quelques conjectures sur le comportement des relations  $\sim_{\varphi}^X$  lorsque  $X$  varie dans  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ , nous allons étudier l'effet du changement de signes de certaines valeurs de  $\varphi$ . Nous travaillerons ici sous l'hypothèse suivante :

*Soit  $S = S_+ \dot{\cup} S_-$  une partition de  $S$  telle que, si  $s \in S_+$  et  $t \in S_-$ , alors  $s$  et  $t$  ne sont pas conjugués dans  $W$ . Soit  $\varphi' : \bar{S} \rightarrow \Gamma$  l'application définie par*

$$\varphi'(\bar{s}) = \begin{cases} \varphi(\bar{s}) & \text{si } s \in S_+, \\ -\varphi(\bar{s}) & \text{si } s \in S_-. \end{cases}$$

Si  $w \in W$ , on pose

$$\ell_{\pm}(w) = \sum_{\omega \in \bar{S}_{\pm}} \ell_{\omega}(w),$$

de sorte que  $\ell(w) = \ell_+(w) + \ell_-(w)$ . On note  $\theta : \mathcal{H}(W, S, \varphi) \longrightarrow \mathcal{H}(W, S, \varphi')$  l'unique application  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -linéaire telle que

$$\theta(T_w^{\varphi}) = (-1)^{\ell_-(w)} T_w^{\varphi'}.$$

Un calcul élémentaire montre que :

**Proposition 5.7.** *L'application  $\theta : \mathcal{H}(W, S, \varphi) \longrightarrow \mathcal{H}(W, S, \varphi')$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbres. De plus, si  $h \in \mathcal{H}(W, S, \varphi)$ , alors  $\theta(\bar{h}) = \overline{\theta(h)}$ . Par conséquent, si  $w \in W$ , alors*

$$\theta(C_w^{\varphi}) = (-1)^{\ell_-(w)} C_w^{\varphi'}.$$

**Corollaire 5.8.** *Si  $? \in \{L, R, LR\}$ , alors les relations  $\leq_{?}^{\varphi}$  et  $\leq_{?}^{\varphi'}$  coïncident. De même, les relations  $\sim_{?}^{\varphi}$  et  $\sim_{?}^{\varphi'}$  coïncident.*

Si  $\omega \in \bar{S}$ , on note  $\tau_{\omega}$  la symétrie  $\mathbb{Z}$ -linéaire sur  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$  telle que  $\tau_{\omega}(\omega) = -\omega$  et  $\tau_{\omega}(\omega') = \omega'$  si  $\omega' \neq \omega$ . C'est un automorphisme de  $\mathbb{Z}[\bar{S}]$  : il induit donc un homéomorphisme  $\tau_{\omega}^*$  de  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ .

**Corollaire 5.9.** *Si  $\omega \in \bar{S}$ , si  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$  et si  $? \in \{L, R, LR\}$ , alors les relations  $\sim_{?}^X$  et  $\sim_{?}^{\tau_{\omega}^*(X)}$  coïncident.*

*Démonstration.* L'application  $\tau_\omega$  induit un isomorphisme strictement croissant

$$\tau_\omega : \Gamma_{\tau_\omega^*(X)} \xrightarrow{\sim} \Gamma_X.$$

Par conséquent, les relations  $\sim_{\tau_\omega^*(X)}^{\varphi}$  et  $\sim_X^{\tau_\omega \circ \varphi}$  coïncident (voir la proposition 5.1). Posons  $\varphi'_X = \tau_\omega \circ \varphi_{\tau_\omega^*(X)} : \bar{S} \rightarrow \Gamma_X$ . Or,

$$\varphi'_X(s) = \begin{cases} \varphi_X(s) & \text{si } s \notin \omega, \\ -\varphi_X(s) & \text{si } s \in \omega. \end{cases}$$

Donc le résultat découle du corollaire 5.8.  $\square$

Notons  $\gamma : W \rightarrow \{1, -1\}$  l'unique caractère linéaire de  $W$  tel que

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in S_+, \\ -1 & \text{si } s \in S_-. \end{cases}$$

Notons  $\mathbb{Z}_\gamma$  le  $\mathbb{Z}W$ -module (irréductible) de dimension 1 sur lequel  $W$  agit via le caractère  $\gamma$ . Si  $C$  est une cellule à gauche pour  $(W, S, \varphi)$ , alors un calcul élémentaire utilisant l'isomorphisme  $\theta$  montre que

$$(5.10) \quad \mathbb{Z}M_C^\varphi \simeq \mathbb{Z}_\gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}M_C^{\varphi'}.$$

**5.F. Paramètres nuls.** Il résulte du corollaire 5.8 que le calcul des cellules de Kazhdan-Lusztig peut se ramener au cas où  $\varphi$  est à valeurs dans  $\Gamma_{\geq 0}$ . Nous allons étudier ici ce qu'il se passe lorsque certains paramètres sont nuls. Nous travaillerons sous les hypothèses suivantes :

*Dans cette sous-section, et dans cette sous-section seulement, nous fixons une partition  $S = I \dot{\cup} J$  de  $S$  telle que, si  $s \in I$  et  $t \in J$ , alors  $s$  et  $t$  ne sont pas conjugués dans  $W$ . On note  $W_I$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $I$  et on pose*

$$\tilde{J} = \{wtw^{-1} \mid w \in W_I, t \in J\}.$$

*Soit  $\tilde{W}$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $\tilde{J}$ . Nous supposons de plus que,*

$$(*) \quad \text{si } s \in I, \text{ alors } \varphi(s) = 0.$$

D'après [3, théorème 1],  $(\tilde{W}, \tilde{J})$  est un groupe de Coxeter et

$$(5.11) \quad W = W_I \times \tilde{W}$$

Si  $\tilde{t} \in \tilde{J}$ , on notera  $\nu(\tilde{t})$  l'unique élément de  $J$  tel que  $\tilde{t}$  soit conjugué à  $\nu(\tilde{t})$  (voir [3]). On pose

$$\tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \varphi(\nu(\tilde{t})).$$

Il résulte de [3, (4)] que, si  $\tilde{t}$  et  $\tilde{t}'$  sont deux éléments de  $\tilde{J}$  qui sont conjugués sous  $\tilde{W}$ , alors

$$(5.12) \quad \tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}').$$

Cela montre que l'on peut définir une  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(\tilde{W}, \tilde{J}, \tilde{\varphi})$ . Le groupe  $W_I$  agit sur  $\tilde{W}$  en stabilisant  $\tilde{J}$  et la fonction  $\tilde{\varphi}$ , donc il agit naturellement sur l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(\tilde{W}, \tilde{J}, \tilde{\varphi})$ . On peut alors former le produit semi-direct

$$W_I \ltimes \mathcal{H}(\tilde{W}, \tilde{J}, \tilde{\varphi}).$$

C'est une  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbre de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -base  $(x \cdot T_w^\varphi)_{x \in W_I, w \in \tilde{W}}$ . Pour finir, posons

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{w \in \tilde{W}} \mathbb{Z}[\Gamma] T_w^\varphi \subseteq \mathcal{H}(W, S, \varphi).$$

**Proposition 5.13.** *Rappelons que  $\varphi(s) = 0$  si  $s \in I$ . Alors :*

- (a)  $\tilde{\mathcal{H}}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}(W, S, \varphi)$ .
- (b) L'unique application  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -linéaire  $\theta : W_I \ltimes \mathcal{H}(\tilde{W}, \tilde{J}, \tilde{\varphi}) \longrightarrow \mathcal{H}(W, S, \varphi)$  qui envoie  $x \cdot T_w^\varphi$  sur  $T_{xw}^\varphi$  ( $x \in W_I, w \in \tilde{W}$ ) est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -algèbres. Il envoie  $\mathcal{H}(\tilde{W}, \tilde{J}, \tilde{\varphi})$  isomorphiquement sur  $\tilde{\mathcal{H}}$ .
- (c) Si  $x \in W_I$  et  $w \in W$ , alors  $C_x^\varphi = T_x^\varphi$ ,  $C_{xw}^\varphi = T_x^\varphi C_w^\varphi$ ,  $C_{wx}^\varphi = C_w^\varphi T_x^\varphi$ . Si de plus  $w \in \tilde{W}$ , alors  $\theta(C_w^\varphi) = C_w^\varphi$ .

*Démonstration.* Puisque  $\varphi(I) = \{0\}$ , on a, pour tout  $s \in I$ ,

$$(T_s^\varphi)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \overline{T_s^\varphi} = T_s^\varphi.$$

Cela montre que, si  $x \in W_I$  et  $w \in W$ , alors  $T_x^\varphi T_w^\varphi = T_{xw}^\varphi$  et  $T_w^\varphi T_x^\varphi = T_{wx}^\varphi$ . On en déduit que  $C_x^\varphi = T_x^\varphi$ ,  $C_{xw}^\varphi = T_x^\varphi C_w^\varphi$ ,  $C_{wx}^\varphi = C_w^\varphi T_x^\varphi$ . C'est la première assertion du (c).

D'autre part, si  $x \in W_I$  et  $t \in J$ , alors

$$T_{xtx^{-1}}^\varphi = T_x^\varphi T_t^\varphi (T_x^\varphi)^{-1}$$

et donc, en posant  $\tilde{t} = xtx^{-1}$ , on a

$$(T_{\tilde{t}}^\varphi - e^{\tilde{\varphi}(\tilde{t})})(T_{\tilde{t}}^\varphi + e^{-\tilde{\varphi}(\tilde{t})}) = 0.$$

Pour montrer les assertions (a) et (b), il ne reste qu'à montrer l'assertion suivante : si  $w$  et  $w'$  sont deux éléments de  $\tilde{W}$  tels que  $\tilde{\ell}(ww') = \tilde{\ell}(w) + \tilde{\ell}(w')$  (ici,  $\tilde{\ell}$  désigne la fonction longueur sur  $\tilde{W}$  associée à  $\tilde{J}$ ), alors

$$(?) \quad T_w^\varphi T_{w'}^\varphi = T_{ww'}^\varphi.$$

Un raisonnement par récurrence (sur  $\tilde{\ell}(w)$ ) élémentaire permet de se ramener au cas où  $\tilde{\ell}(w) = 1$ , c'est-à-dire  $w \in \tilde{J}$ . Dans ce cas,  $w = xtx^{-1}$ , avec  $t \in J$  et  $x \in W_I$ . La

fonction  $\tilde{\ell}$  étant  $W_I$ -invariante, on a  $\tilde{\ell}(tx^{-1}w'x) = 1 + \tilde{\ell}(x^{-1}w'x)$ . Donc, d'après le [3, corollaire 7], on a  $\ell(tx^{-1}w'x) = 1 + \ell(x^{-1}w'x)$ . Il en résulte que

$$T_t^\varphi T_{x^{-1}w'x}^\varphi = T_{tx^{-1}w'x}^\varphi.$$

On obtient alors (?) en conjuguant cette égalité par  $T_x^\varphi$ . D'où (a) et (b).

Pour montrer la dernière assertion de (c), il suffit de remarquer que, si  $h \in \mathcal{H}(\widetilde{W}, \widetilde{J}, \widetilde{\varphi})$ , alors  $\theta(\overline{h}) = \overline{\theta(h)}$ , et d'utiliser la caractérisation de la base de Kazhdan-Lusztig.  $\square$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 5.14.** *Supposons que  $\varphi(I) = \{0\}$ . Alors les cellules à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) pour  $(W, S, \varphi)$  sont de la forme  $W_I \cdot C$  (resp.  $C \cdot W_I$ , resp.  $W_I \cdot C \cdot W_I$ ), où  $C$  est une cellule à gauche (resp. droite, resp. bilatère) pour  $(\widetilde{W}, \widetilde{J}, \widetilde{\varphi})$ .*

## 6. CONJECTURES

Nos conjectures portent sur le comportement des relations  $\sim_{?}^X$  lorsque  $X$  varie dans l'espace topologique  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\overline{S}])$ . On notera  $\mathbb{R}[\overline{S}]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\overline{S}]$ . Un arrangement d'hyperplans rationnels  $\mathfrak{A}$  de  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\overline{S}])$  sera dit *complet* si  $\mathcal{H}_\omega \in \mathfrak{A}$  pour tout  $\omega \in \overline{S}$  (rappelons que  $\mathcal{H}_\omega$  est l'ensemble des  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\overline{S}])$  tels que  $\omega \in X \cap -X$ ). Si  $\mathfrak{A}$  est un arrangement complet et si  $\mathcal{F}$  est une  $\mathfrak{A}$ -facette, nous noterons  $W_{\mathcal{F}}$  le sous-groupe parabolique standard de  $W$  engendré par la réunion des orbites  $\omega \in \overline{S}$  telles que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}_\omega$ .

**Conjecture A.** *Il existe un arrangement complet fini  $\mathfrak{A}$  d'hyperplans rationnels de  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\overline{S}])$  vérifiant les propriétés suivantes (pour  $? \in \{L, R, LR\}$ ) :*

- (a) *Si  $X$  et  $Y$  sont deux parties positives de  $\mathbb{Z}[\overline{S}]$  appartenant à la même  $\mathfrak{A}$ -facette  $\mathcal{F}$ , alors les relations  $\sim_{?}^X$  et  $\sim_{?}^Y$  coïncident. Nous la noterons  $\sim_{?}^{\mathcal{F}}$ .*
- (b) *Soit  $\mathcal{F}$  une  $\mathfrak{A}$ -facette. Alors les cellules (i.e. classes d'équivalence) pour la relation  $\sim_{?}^{\mathcal{F}}$  sont les parties minimales  $C$  de  $W$  satisfaisant aux conditions suivantes :*
  - (b1) *Pour toute chambre  $\mathcal{C}$  telle que  $\mathcal{F} \preceq \mathcal{C}$ ,  $C$  est une réunion de cellules pour la relation  $\sim_{?}^{\mathcal{C}}$  ;*
  - (b2)  *$C$  est stable par translation par  $W_{\mathcal{F}}$  (à gauche si  $? = L$ , à droite si  $? = R$ , à gauche et à droite si  $? = LR$ ).*

Si la conjecture  $A$  est vraie pour  $(W, S)$  et deux arrangements complets finis  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}'$  d'hyperplans rationnels de  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ , alors elle est vraie pour  $(W, S)$  et l'arrangement complet fini  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ . Cela montre que, si la conjecture  $A$  est vraie pour  $(W, S)$ , il existe un arrangement complet fini d'hyperplans rationnels qui est minimal et pour lequel les assertions de la conjecture  $A$  sont vraies : nous les appellerons *hyperplans essentiels* (en référence aux travaux de M. Chlouveraki sur les blocs de Rouquier des algèbres de Hecke cyclotomiques [8, §4.4]) de  $(W, S)$ .

Le corollaire 5.9 montre que, si la conjecture  $A$  est vraie pour  $(W, S)$ , alors l'ensemble des hyperplans essentiels de  $(W, S)$  est stable par l'action de toutes les symétries  $\tau_\omega^*$  ( $\omega \in \bar{S}$ ).

REMARQUE - Fixons  $w \in W$ . La condition (a) de la conjecture  $A$  dit que l'application  $\mathcal{P}os(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ ,  $X \mapsto \text{Cell}_?^X(w)$  est constante sur les facettes. La condition (b1) dit que cette même application est semi-continue supérieurement (rappelons qu'une application  $f : \mathcal{B} \rightarrow B$ , où  $\mathcal{B}$  est un espace topologique et  $B$  est un ensemble ordonné, est dite *semi-continue supérieurement* si, pour tout  $b \in B$ , l'ensemble  $\{x \in \mathcal{B} \mid f(x) < b\}$  est ouvert). Notons pour finir que toute cellule pour  $\sim_{\mathcal{F}}^?$  est forcément stable par translation par  $W_{\mathcal{F}}$  (voir le corollaire 5.14 : en effet, si  $X \in \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}_\omega$ , alors  $\varphi_X(s) = 0$  pour tout  $s \in \omega$ ) : cela justifie la propriété (b2).

En revanche, la condition de minimalité dans (b) apporte une précision étonnante : pour connaître les cellules de  $W$  pour un choix de fonction  $\varphi$ , il suffirait de connaître les relations  $\sim_{\mathcal{C}}^?$ , lorsque  $\mathcal{C}$  est une chambre.  $\square$

Il semble raisonnable d'imaginer que la Conjecture  $A$  est compatible avec la construction des représentations cellulaires :

**Conjecture B.** *Supposons la conjecture  $A$  vraie pour  $(W, S)$  et notons  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des hyperplans essentiels de  $(W, S)$ . Soit  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ , soit  $C$  une cellule à gauche pour  $(W, S, \varphi_X)$  et soit  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -chambre dans  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$  telle que  $X \in \overline{\mathcal{C}}$ . Soit  $Y \in \mathcal{C}$ . D'après la conjecture  $A$ , il existe des cellules à gauche  $C_1, \dots, C_d$  pour  $(W, S, \varphi_Y)$  telles que  $C = C_1 \dot{\cup} C_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_d$ . Alors il existe une filtration  $M_0 = 0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_d = \mathbb{Z}M_{\mathcal{C}}^X$  du  $\mathbb{Z}W$ -module  $\mathbb{Z}M_{\mathcal{C}}^X$  et une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  telle que*

$$M_i/M_{i-1} \simeq \mathbb{Z}M_{\mathcal{C}_{\sigma(i)}}^Y$$

Une version (beaucoup) plus faible est donnée par :

**Conjecture B<sup>-</sup>.** *Supposons  $W$  fini. Supposons la conjecture  $A$  vraie pour  $(W, S)$  et notons  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des hyperplans essentiels de  $(W, S)$ . Soit  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ , soit*

$C$  une cellule à gauche pour  $(W, S, \varphi_X)$  et soit  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -chambre dans  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$  telle que  $X \in \bar{\mathcal{C}}$ . Soit  $Y \in \mathcal{C}$ . D'après la conjecture A, il existe des cellules à gauche  $C_1, \dots, C_d$  pour  $(W, S, \varphi_Y)$  telles que  $C = C_1 \dot{\cup} C_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_d$ . Alors

$$\chi_C^X = \sum_{i=1}^d \chi_{C_i}^Y.$$

## 7. EXEMPLES

**7.A. Groupes diédraux finis.** Supposons dans cette sous-section, et dans cette sous-section seulement, que  $S = \{s, t\}$  et que  $st$  est d'ordre fini  $2m$  avec  $m \geq 2$ . Notons  $w_0 = (st)^m = (ts)^m$  l'élément le plus long de  $W$  : il est central. Si  $w \in W$ , on pose  $\mathcal{R}(w) = \{u \in S \mid wu < w\}$ . Posons

$$C_s = \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) = \{s\}\} \quad \text{et} \quad C_t = \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) = \{t\}\}.$$

Un calcul facile [13, §8.7] montre que la partition de  $W$  en cellules à gauche pour  $(W, S, \varphi)$  est donnée par le tableau suivant (lorsque  $\varphi$  est à valeurs dans  $\Gamma_{\geq 0}$ ) :

| $\varphi$                     | Cellules à gauche  |
|-------------------------------|--|
| $0 = \varphi(s) = \varphi(t)$ | $W$  |
| $0 = \varphi(s) < \varphi(t)$ | $\{1, s\}, C_s \setminus \{s\}, C_t \setminus \{sw_0\}, \{sw_0, w_0\}$         |
| $0 < \varphi(s) < \varphi(t)$ | $\{1\}, \{s\}, C_s \setminus \{s\}, C_t \setminus \{sw_0\}, \{sw_0\}, \{w_0\}$ |
| $0 < \varphi(s) = \varphi(t)$ | $\{1\}, C_s, C_t, \{w_0\}$   |
| $0 < \varphi(t) < \varphi(s)$ | $\{1\}, \{t\}, C_s \setminus \{tw_0\}, C_t \setminus \{t\}, \{tw_0\}, \{w_0\}$ |
| $0 = \varphi(t) < \varphi(s)$ | $\{1, t\}, C_s \setminus \{tw_0\}, C_t \setminus \{t\}, \{tw_0, w_0\}$         |

Par conséquent :

**Proposition 7.1.** *Les conjectures A et  $B^-$  sont vraies lorsque  $|S| = 2$  et  $|W| < \infty$ . Les hyperplans essentiels de  $(W, S)$  sont  $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_{s-t}$  et  $\mathcal{H}_{s+t}$ .*

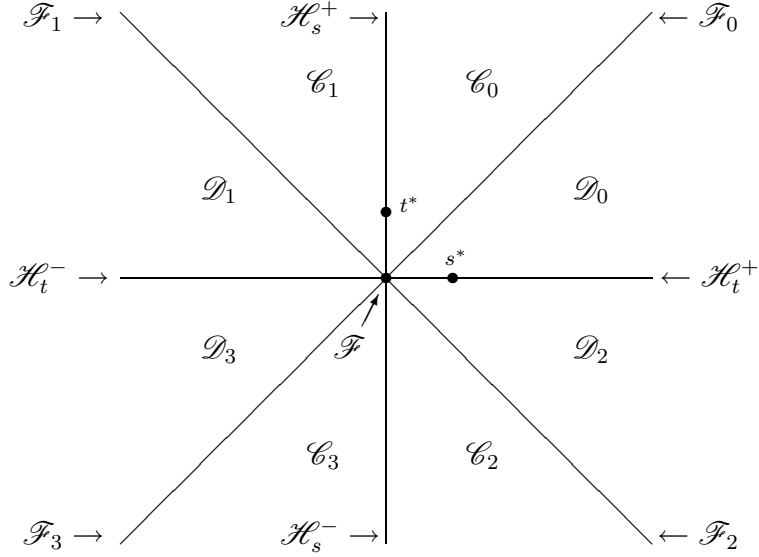
*Démonstration.* L'énoncé des conjectures faisant apparaître la topologie exotique sur  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ , nous allons ici détailler le passage de la table précédente à la preuve des conjectures A et B.



Tout d'abord, on identifie  $\bar{S}$  à  $S$ , ce qui permet décrire

$$\mathbb{Z}[\bar{S}] = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}t.$$

Si on note  $\mathfrak{A} = \{\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_{s-t}, \mathcal{H}_{s+t}\}$ , alors  $\mathfrak{A}$  est un arrangement complet fini d'hyperplans rationnels de  $\mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ . Dessinons l'image inverse dans  $\mathbb{R}[\bar{S}]^*$  (sous l'application Pos) de l'arrangement d'hyperplans et de ses facettes. Pour cela, notons  $(s^*, t^*)$  la base duale de la base  $(s, t)$  de  $\mathbb{R}[\bar{S}]$ .



Les  $\mathfrak{A}$ -facettes sont donc

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{Z}[\bar{S}]\}, \quad \mathcal{H}_s^\pm, \quad \mathcal{H}_t^\pm, \quad \mathcal{F}_i, \quad \mathcal{C}_i, \quad \mathcal{D}_i \quad (0 \leq i \leq 3).$$

Si l'on veut une définition formelle, voici quelques exemples, qui montrent que l'on a bien défini ainsi des facettes :

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_s \cap \mathcal{H}_t \cap \mathcal{H}_{s-t} \cap \mathcal{H}_{s+t},$$

$$\mathcal{H}_t^+ = \mathcal{H}_t \cap \mathcal{U}(-s) = \mathcal{H}_t \cap \mathcal{U}(-s) \cap \mathcal{U}(t-s) \cap \mathcal{U}(-t-s),$$

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{U}(-s) \cap \mathcal{H}_{s-t} = \mathcal{U}(-s) \cap \mathcal{U}(-t) \cap \mathcal{H}_{s-t} \cap \mathcal{U}(-s-t),$$

et  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{U}(-s) \cap \mathcal{U}(s-t) = \mathcal{U}(-s) \cap \mathcal{U}(-t) \cap \mathcal{U}(s-t) \cap \mathcal{U}(-s-t).$

Soit  $X \in \mathcal{P}os(\mathbb{Z}[\bar{S}])$ . D'après la remarque 5.6, on a les équivalences suivantes :

- (a)  $0 = \varphi_X(s) = \varphi_X(t)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{F}$ .
- (b)  $0 = \varphi_X(s) < \varphi_X(t)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{H}_s^+$ .
- (c)  $0 < \varphi_X(s) < \varphi_X(t)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{C}_0$ .
- (d)  $0 < \varphi_X(s) = \varphi_X(t)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{F}_0$ .
- (e)  $0 < \varphi_X(t) < \varphi_X(s)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{D}_0$ .
- (f)  $0 = \varphi_X(t) < \varphi_X(s)$  si et seulement si  $X \in \mathcal{H}_t^+$ .

En utilisant la table précédente, les assertions (a)–(f) ci-dessus et les symétries  $\tau_s^*$  et  $\tau_t^*$  (voir Corollaire 5.9), on obtient la table suivante qui donne la répartition en cellules à gauche pour  $(W, S, X)$  selon la facette à laquelle appartient  $X$  :

| $X \in ?$                         | Cellules à gauche  |
|-----------------------------------|--|
| $\{Z[\bar{S}]\}$                  | $W$  |
| $\mathcal{H}_s^\pm$               | $\{1, s\}, C_s \setminus \{s\}, C_t \setminus \{sw_0\}, \{sw_0, w_0\}$         |
| $\mathcal{C}_i (1 \leq i \leq 4)$ | $\{1\}, \{s\}, C_s \setminus \{s\}, C_t \setminus \{sw_0\}, \{sw_0\}, \{w_0\}$ |
| $\mathcal{F}_i (1 \leq i \leq 4)$ | $\{1\}, C_s, C_t, \{w_0\}$   |
| $\mathcal{D}_i (1 \leq i \leq 4)$ | $\{1\}, \{tw_0\}, C_s \setminus \{tw_0\}, C_t \setminus \{t\}, \{t\}, \{w_0\}$ |
| $\mathcal{H}_t^\pm$               | $\{1, t\}, C_s \setminus \{tw_0\}, C_t \setminus \{t\}, \{tw_0, w_0\}$         |

On peut alors vérifier sur cette table les faits suivants :

- Si  $X$  et  $X'$  appartiennent à la même facette, alors les relations  $\sim_L^X$  et  $\sim_L^{X'}$  coïncident.
- Si  $X \in \mathcal{F}_i$ , alors les seules chambres  $\mathcal{C}$  telles que  $X \in \overline{\mathcal{C}}$  sont  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{D}_i$  : il est alors facile de voir que  $\sim_L^{\mathcal{F}_i}$  est effectivement engendrée par  $\sim_L^{\mathcal{C}_i}$  et  $\sim_L^{\mathcal{D}_i}$ .
- Si  $X \in \mathcal{H}_s^+$ , alors les seules chambres  $\mathcal{C}$  telles que  $X \in \overline{\mathcal{C}}$  sont  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  : il est alors facile de voir qu'une cellule à gauche pour  $(W, S, \varphi_X)$  est bien une partie minimale de  $W$  qui est stable par translation à gauche par  $\langle s \rangle$  tout en étant réunion de cellules à gauche pour  $(W, S, \mathcal{C}_0)$  (et réunion de cellules à gauche pour  $(W, S, \mathcal{C}_1)$ , mais, par symétrie, ce sont aussi des cellules à gauche pour  $(W, S, \mathcal{C}_0)$ ).

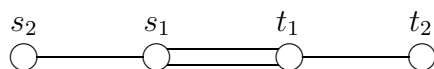
Pour obtenir les autres énoncés de la conjecture A concernant les cellules à gauche, on peut alors utiliser les symétries (via le corollaire 5.9) et l'automorphisme de  $W$  échangeant  $s$  et  $t$ . Les énoncés correspondants pour les cellules à droite ou bilatères se montrent de même. Cela montre la conjecture A.

La conjecture B<sup>-</sup> découle de considérations similaires.  $\square$

**7.B. Groupe diédral infini.** Le même raisonnement que dans le cas fini permet de montrer facilement la proposition suivante :

**Proposition 7.2.** *Si  $S = \{s, t\}$  et  $st$  est d'ordre infini dans  $W$ , alors les conjectures  $A$  et  $B$  sont vraies pour  $(W, S)$ . Les hyperplans essentiels de  $(W, S)$  sont  $\mathcal{H}_s$ ,  $\mathcal{H}_t$ ,  $\mathcal{H}_{s-t}$  et  $\mathcal{H}_{s+t}$ .*

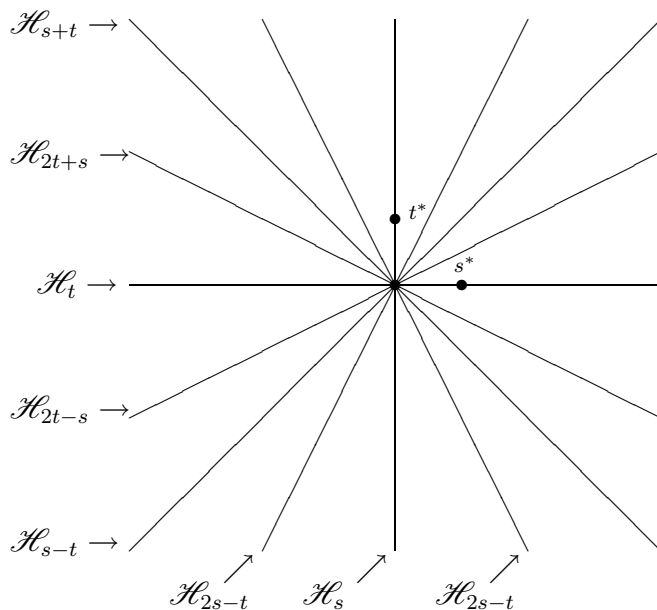
**7.C. Type  $F_4$ .** Supposons dans cette sous-section, et dans cette sous-section seulement, que  $(W, S)$  est de type  $F_4$ . Posons  $S = \{s_1, s_2, t_1, t_2\}$  de telle sorte que le graphe de Coxeter de  $(W, S)$  soit



Notons  $s = \{s_1, s_2\}$  et  $t = \{t_1, t_2\}$ , de sorte que  $\bar{S} = \{s, t\}$ .

**Théorème 7.3 (Geck).** *Si  $(W, S)$  est de type  $F_4$ , alors les conjectures  $A$  et  $B^-$  sont vraies pour  $(W, S)$ . Avec les notations précédentes, les hyperplans essentiels de  $(W, S)$  sont  $\mathcal{H}_s$ ,  $\mathcal{H}_t$ ,  $\mathcal{H}_{s-2t}$ ,  $\mathcal{H}_{s-t}$ ,  $\mathcal{H}_{2s-t}$ ,  $\mathcal{H}_{s+2t}$ ,  $\mathcal{H}_{s+t}$  et  $\mathcal{H}_{2s+t}$ .*

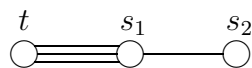
Le dessin de l'arrangement d'hyperplans du théorème précédent (du moins, de son image inverse sous Pos dans  $\mathbb{R}[\bar{S}]^*$ ) est le suivant :



**REMARQUE -** Tels quels, les résultats de Geck [9] ne démontrent pas complètement les conjectures  $A$  et  $B^-$  en type  $F_4$ . Ses résultats ne sont pas non plus énoncés sous cette forme. Néanmoins, comme le lecteur pourra le vérifier dans le schéma de la preuve que nous donnons ci-dessous, Geck avait fait l'essentiel du travail: il a déterminé les hyperplans essentiels. Nous avons de plus utilisé ses programmes GAP/CHEVIE pour terminer le calcul lorsque certains paramètres sont nuls.  $\square$

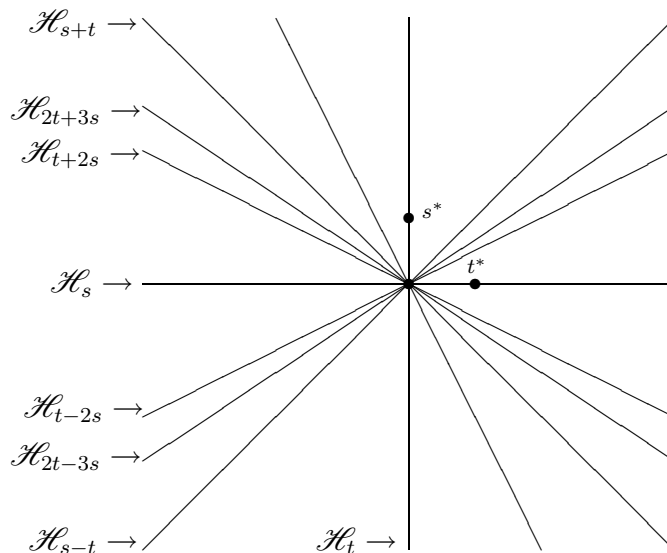
*Démonstration.* Dans [9], M. Geck calcule les cellules de  $W$  pour tous les choix de fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi(S) \subseteq \Gamma_{>0}$ . Pour obtenir les cellules lorsque  $\varphi(S) \subseteq \Gamma_{\geq 0}$ , il suffit alors d'utiliser le corollaire 5.14 (et la décomposition  $W = \mathfrak{S}_3 \times W(D_4)$ , voir 5.11) ainsi que la connaissance des cellules pour un groupe de Weyl de type  $D_4$ , ce qui se calcule grâce à GAP : nous l'avons fait en utilisant les programmes de M. Geck. Le corollaire 5.9 permet alors de déterminer les cellules pour tous les choix de fonction  $\varphi$ . Une discussion similaire à celle du cas diédral, tenant compte de tous les calculs effectués, permet de vérifier les conjectures A et B<sup>-</sup> : elle est simplifiée par la présence de l'automorphisme de  $W$  échangeant  $s_i$  et  $t_i$ .  $\square$

7.D. **Type  $\tilde{G}_2$ .** Supposons ici que  $S = \{t, s_1, s_2\}$ , que  $(W, S)$  est un système de Coxeter de type  $\tilde{G}_2$ , et que le graphe de Coxeter est donné par



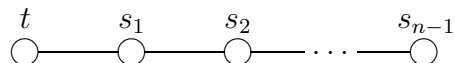
Posons  $s = \{s_1, s_2\}$  et identifions  $t$  et  $\{t\}$ , de sorte que  $\bar{S} = \{s, t\}$ . Les différents calculs effectués par J. Guilhot (voir [10] et [11]) l'ont conduit à proposer la conjecture suivante :

**Conjecture G (Guilhot).** *Si  $(W, S)$  est un groupe de Weyl affine de type  $\tilde{G}_2$ , alors la conjecture A est vraie. Avec les notations précédentes, les hyperplans essentiels sont  $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_{s-t}, \mathcal{H}_{s+t}, \mathcal{H}_{2t-3s}, \mathcal{H}_{2t+3s}, \mathcal{H}_{t-2s}$  et  $\mathcal{H}_{t+2s}$ .*



COMMENTAIRE - Le lecteur pourra se reporter à l'article [5] pour des résultats partiels récents corroborant la conjecture G.  $\square$

7.E. **Type B.** Nous supposons ici que  $(W, S) = (W_n, S_n)$ , où  $W_n$  est un groupe de Weyl de type  $B_n$  ( $n \geq 2$ ) et  $S_n = \{t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ , de sorte que le graphe de Coxeter de  $(W_n, S_n)$  soit



Identifions  $t$  et  $\{t\}$  et posons  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ . On a ainsi  $\bar{S} = \{s, t\}$ . Dans ce cas, les conjectures de Geck, Iancu, Lam et l'auteur [4, Conjectures A et B] suggèrent la conjecture suivante :

**Conjecture C.** *Les conjectures A et B sont vraies pour  $(W_n, S_n)$ . Les hyperplans essentiels sont  $\mathcal{H}_s$ ,  $\mathcal{H}_t$ ,  $\mathcal{H}_{t-is}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) et  $\mathcal{H}_{t+is}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ).*

COMMENTAIRE - Le lecteur pourra se reporter aux articles [6], [1], [4], [2] et [5] (dans l'ordre chronologique) pour des résultats corroborant la conjecture C.  $\square$

#### RÉFÉRENCES

- [1] C. BONNAFÉ, Two-sided cells in type  $B$  (asymptotic case), *J. Algebra* **304** (2006), 216-236.
- [2] C. BONNAFÉ, On Kazhdan-Lusztig cells in type  $B$ , en préparation.
- [3] C. BONNAFÉ & M. DYER, Semidirect product decomposition of Coxeter groups, en préparation.
- [4] C. BONNAFÉ, M. GECK, L. IANCU & T. LAM, On domino insertion and Kazhdan-Lusztig cells in type  $B_n$ , à paraître dans *Progress in Mathematics* (Birkhäuser), disponible sur [arXiv:math/0609279](https://arxiv.org/abs/math/0609279).
- [5] C. BONNAFÉ & J. GUILHOT, On Kazhdan-Lusztig cells in the asymptotic case, en préparation.
- [6] C. BONNAFÉ & L. IANCU, Left cells in type  $B_n$  with unequal parameters, *Represent. Theory* **7** (2003), 587-609.
- [7] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI*, Hermann, Paris, 1968.
- [8] M. CHLOUVERAKI, *On the cyclotomic Hecke algebras of complex reflection groups*, Ph. D. Thesis, Université Paris VII (2007), disponible sur [arXiv:0710.0776](https://arxiv.org/abs/0710.0776).
- [9] M. GECK, Computing Kazhdan-Lusztig cells for unequal parameters, *J. Algebra* **281** (2004), 342-365.
- [10] J. GUILHOT, Generalized induction of Kazhdan-Lusztig cells, preprint (2008), disponible sur [arXiv:0802.1408](https://arxiv.org/abs/0802.1408).
- [11] J. GUILHOT, Computations of Kazhdan-Lusztig cells in type  $\tilde{G}_2$ : the unequal parameter case, *private communication*.
- [12] D. A. KAZHDAN AND G. LUSZTIG, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* **53** (1979), 165-184.
- [13] G. LUSZTIG, *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM Monograph Series **18**, American Mathematical Society, Providence, RI (2003), 136 pp.
- [14] T. PIETRAHO, Notes on combinatorial cells and constructible representations in Type  $B$ , preprint (2007), disponible sur [arXiv:0710.3846](https://arxiv.org/abs/0710.3846).

LABO. DE MATH. DE BESANÇON (CNRS: UMR 6623), UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ,  
16 ROUTE DE GRAY, 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* [cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr](mailto:cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr)