



**HAL**  
open science

# Sur la géométrie systolique des variétés de Bieberbach

Chady Elmir, Jacques Lafontaine

► **To cite this version:**

Chady Elmir, Jacques Lafontaine. Sur la géométrie systolique des variétés de Bieberbach. 2008.  
hal-00271304v2

**HAL Id: hal-00271304**

**<https://hal.science/hal-00271304v2>**

Preprint submitted on 3 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la géométrie systolique des variétés de Bieberbach

Chady El Mir

Jacques Lafontaine

June 3, 2008

Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier  
CNRS, UMR 5149  
Université Montpellier 2  
CC 0051, Place Eugène Bataillon  
F-34095 Montpellier Cedex 5, France

## Abstract

The *systole* of a compact non simply connected Riemannian manifold is the smallest length of a non-contractible closed curve ; the *systolic ratio* is the quotient  $(\text{systole})^n/\text{volume}$ . Its supremum, on the set of all the riemannian metrics, is known to be finite for a large class of manifolds, including the  $K(\pi, 1)$ .

We study the optimal systolic ratio of compact, 3-dimensional non orientable Bieberbach manifolds, and prove that it cannot be realized by a flat metric.

*Key words and phrases.* Systole; systolic ratio; singular Riemannian metric; Bieberbach manifold.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation du résultat

Un invariant naturel d'une variété riemannienne compacte (non simplement connexe)  $(M^n, g)$  est sa *systole*, notée  $\text{sys}(g)$ . C'est la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile.

Pour avoir un invariant homogène, on introduit le *quotient systolique*  $\frac{\text{sys}(g)^n}{\text{vol}(g)}$ .

Un résultat fondamental de M. Gromov (cf. [8]), faisant suite à une propagande inlassable de M. Berger (voir [3]), assure que *si  $M^n$  est essentielle la borne supérieure des quotients systoliques, quand  $g$  parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes sur  $M^n$  est finie*. Une variété compacte  $M$  est dite *essentielle* s'il existe une application continue de  $M$  dans un  $K(\pi, 1)$  qui envoie la classe fondamentale sur une classe non triviale. Concernant la géométrie systolique, deux références incontournables sont le rapport [4] de M. Berger et la monographie [11] de M. Katz.

Les surfaces compactes autres que  $S^2$  sont essentielles, et le théorème de Gromov est une généralisation profonde de résultats antérieurs concernant le tore  $T^2$  (C. Loewner, voir [7] p.95-96 ou [9] p.295-296 pour une preuve), et le plan projectif (P.M. Pu, voir [13]).

Pour ces deux variétés, le résultat est beaucoup plus précis : on a en fait

$$\frac{(\text{sys}(g))^2}{\text{aire}(g)} \leq \frac{(\text{sys}(g_0))^2}{\text{aire}(g_0)}$$

où  $g_0$  est plate hexagonale (cas du tore) ou à courbure constante positive (cas du plan projectif). De plus, dans les deux cas, l'égalité caractérise les métriques homothétiques à  $g_0$ .

Il existe un troisième cas, élucidé par C. Bavard dans [1] puis par T. Sakai dans [14] où la borne supérieure du quotient systolique est connue, et réalisée, celui de la bouteille de Klein. Mais la métrique optimale est singulière, plus précisément  $C^1$  par morceaux. Voir 3.1 ci-dessous. Cet exemple joue ici un rôle décisif.

Pour les variétés essentielles de dimension supérieure, on ne connaît que très peu de choses. On ignore par exemple, pour des variétés apparemment aussi simples que les tores et les projectifs réels, si les métriques à courbure constante sont optimales. L'argument de Gromov, puissant mais très général, ne donne qu'une majoration très grossière du quotient systolique. A fortiori, on a très peu d'informations sur les métriques qui pourraient réaliser sa borne supérieure. Ivan Babenko nous a communiqué le résultat suivant :

*si  $g$  est une métrique optimale (éventuellement singulière) sur  $M$ , les courbes systoliques (c'est-à-dire les courbes fermées non contractiles de longueur  $\text{sys}(g)$ ) recouvrent  $M$ .*

Cette propriété est satisfaite par les tores plats, et par les projectifs réels munis de leur métrique à courbure constante. Sur les variétés compactes de dimension 3 qui portent une métrique plate, les métriques qui optimisent le quotient systolique *parmi les métriques plates* vérifient aussi cette propriété, à l'exception d'une d'entre elles. (Il s'agit de la variété dont le groupe fondamental est le groupe appelé  $G_6$  par J.A. Wolf, cf. [16] p.117-118, et le dessin très suggestif de [15], p.236 ; ce groupe est engendré par trois symétries glissées par rapport à trois droites deux à deux orthogonales).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux *variétés de Bieberbach*, c'est-à-dire aux variétés compactes qui portent une métrique riemannienne plate. Ces variétés sont des  $K(\pi, 1)$ , donc le théorème de Gromov s'applique. L'exemple de la bouteille de Klein, et celui de la variété de dimension 3 que nous venons d'évoquer, conduisent à penser que, au moins pour celles de ces variétés qui ne sont pas des tores, il ne faut pas s'attendre à ce que les métriques plates soient optimales. Notre résultat est le suivant.

*Soit  $M$  une variété de Bieberbach de dimension 3 non orientable. Alors il existe sur  $M$  une métrique riemannienne  $g$  telle que, pour toute métrique plate  $h$ ,*

$$\frac{(\text{sys}(h))^3}{\text{aire}(h)} < \frac{(\text{sys}(g))^3}{\text{vol}(g)}$$

## 1.2 Résumé de la preuve

Nous commençons par vérifier (cf. 2) que nos métriques plates s'obtiennent par des suspensions de la bouteille de Klein. Dans 3, nous étudions d'un peu plus près la métrique singulière sur la bouteille de Klein découverte par C. Bavard, et en particulier ses isométries. Celles-ci

permettent de construire par suspension des métriques singulières en dimension 3. Le calcul direct des systoles, fait dans 4, met en évidence des métriques singulières pour lesquelles le quotient systolique est supérieur à celui de toute métrique plate sur la même variété.

Pour conclure, il suffit d'approcher la métrique singulière obtenue par une métrique lisse, et d'utiliser la continuité de la systole pour la topologie  $C^0$  (voir les détails dans 4.2).

### 1.3 Notations

Si  $V$  est un sous-espace affine d'un espace affine euclidien  $E$ , et  $a$  un vecteur parallèle à  $V$ , on note  $\sigma_{V,a}$  la symétrie glissée produit de la réflexion orthogonale par rapport à  $V$  et de la translation de vecteur  $a$ .

Quand une isométrie de  $\mathbb{R}^n$  passe au quotient, nous la noterons par le même symbole.

On appelle *déplacement* d'une isométrie  $\gamma$  d'un espace métrique (qui sera ici une variété riemannienne, éventuellement singulière), le nombre

$$\mathbf{d}(\gamma) = \inf_{p \in M} \text{dist}(p, \gamma(p)).$$

Rappelons que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte, de revêtement riemannien  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , le groupe fondamental opère sur  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  par isométries, et

$$\text{sys}(M, g) = \inf_{\gamma \in \pi_1(M)} \mathbf{d}(\gamma)$$

Ce résultat s'étend immédiatement aux métriques singulières considérées ci-dessous.

## 2 Rappels et compléments sur les variétés plates

### 2.1 Variétés plates

Les variétés compactes et plates sont les quotients  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un sous groupe discret  $\Gamma$ , cocompact et sans points fixes d'isométries affines de  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème de Bieberbach assure que  $\Gamma$  est une extension d'un groupe fini  $G$  par un réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ce réseau est le sous-groupe des éléments de  $\Gamma$  qui sont des translations. Nous l'appellerons dans la suite le *réseau associé* à  $\Gamma$ . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow e$$

(En fait, ce résultat se démontre sans supposer que  $\Gamma$  opère librement). Dans la situation qui nous intéresse, la variété est le quotient du tore plat  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  par un groupe d'isométries isomorphe à  $G$ .

Deux variétés compactes plates  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  et  $\mathbb{R}^n/\Gamma'$  sont homéomorphes si et seulement si les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont isomorphes. Ces groupes sont alors conjugués par un isomorphisme affine de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui montre que deux variétés compactes plates homéomorphes sont affinement difféomorphes. Ces variétés seront isométriques si et seulement si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont conjugués par une isométrie affine.

Un procédé classique de construction de variétés est la *suspension* par un difféomorphisme  $\varphi$  d'une variété  $K$  : il s'agit du quotient de  $K \times \mathbb{R}$  par le groupe engendré par  $(p, t) \mapsto (\varphi(p), t + 1)$ .

Si maintenant  $(K^n, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n$  et si  $\varphi \in \text{Isom}(K^n, g)$ , le quotient *riemannien* de  $K \times \mathbb{R}$  par le groupe engendré par  $(p, t) \mapsto (\varphi(p), t + a)$ , où  $a$  est un paramètre  $> 0$ , définit sur cette suspension une métrique riemannienne (bien sûr plate si  $g$  est plate). Cette construction sera utilisée systématiquement dans 2.3 puis dans 4.

## 2.2 Folklore kleinien

Le plan euclidien étant rapporté à une base orthonormée, les bouteilles de Klein plates sont les variétés  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est engendré par la symétrie glissée  $(x, y) \mapsto (x + \frac{a}{2}, -y)$  et la translation  $(x, y) \mapsto (x, y + b)$ . Nous noterons  $K_{a,b}$  (ou simplement  $K$  quand la donnée de  $a$  et  $b$  est sous-entendue ou inutile), la variété riemannienne plate ainsi obtenue.

Rappelons que les géodésiques “horizontales” de  $K_{a,b}$  sont fermées de longueur  $a$ , à l’exception de deux d’entre elles qui sont de longueur  $\frac{a}{2}$  (cf. [7] p.82-83). Cela permet de voir  $K_{a,b}$  comme le recollement de deux rubans de Möbius plats de largeur  $\frac{b}{2}$  le long de leur bord. Cette identification n’est pas seulement topologique mais aussi riemannienne : la réflexion orthogonale par rapport au bord commun est une isométrie qui échange les deux rubans.

La composante neutre de  $\text{Isom}(K)$  est formée des translations horizontales  $r_\alpha : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y)$  ( $\alpha$  étant pris modulo  $a$ ). A signaler : la translation  $(x, y) \mapsto (x + \frac{a}{2}, y)$  qui coïncide avec  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . Elle laisse fixes les deux géodésiques horizontales courtes  $y = 0$  et  $y = b/2$ . C’est la symétrie orthogonale par rapport à ces *deux* géodésiques simultanément.

Le quotient  $\text{Isom}(K)/\text{Isom}_0(K)$  est isomorphe au groupe du matelas, appelé aussi groupe de Klein (c’est plus qu’une coïncidence !).

Les trois éléments non triviaux de ce quotient peuvent être représentés par

1. une réflexion par rapport à une géodésique verticale, qui est aussi une symétrie par rapport à un point d’une géodésique horizontale courte (en fait, une telle transformation, que nous noterons  $S_1$ , est à la fois une réflexion par rapport à deux géodésiques verticales et une symétrie par rapport à deux points distincts).
2. une symétrie par rapport à un point du bord commun des deux rubans. Nous noterons  $S_2$  une telle symétrie.
3. la réflexion par rapport à ce bord commun, ou la transformation obtenue par passage au quotient de  $(x, y) \mapsto (x, y + b/2)$ . Nous noterons  $T$  cette dernière transformation.

Notons enfin qu’un difféomorphisme affine d’une bouteille de Klein plate est une isométrie.

## 2.3 Une description géométrique des variétés plates non orientables de dimension 3

Nous allons voir que toute variété compacte plate non orientable de dimension 3 peut s’obtenir par suspension d’une bouteille de Klein plate par une isométrie.

Cela se voit en interprétant convenablement (et plus géométriquement) la description faite par J. Wolf (voir [16], p.120-123, dont nous suivons les notations) des variétés de Bieberbach de dimension 3. Voir aussi [15], 4.2.

i) Type  $B_1$ . On se donne un plan  $P$ , deux vecteurs indépendants  $a_1$  et  $a_2$  de  $P$ , et un vecteur  $a_3$  orthogonal à  $P$ . Le groupe  $\Gamma$  est engendré par la symétrie glissée  $\sigma_{P,a_1/2}$  et les translations de vecteurs  $a_2$  et  $a_3$ . Notons que  $\Gamma$  est d'indice 2 dans le réseau  $\Lambda$  engendré par  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , et que la variété est difféomorphe au produit d'une bouteille de Klein et d'un cercle. Les différents types métriques s'obtiennent en faisant varier les vecteurs  $a_i$  avec les contraintes ci-dessous.

Pour réaliser ces métriques comme des suspensions, on écrit  $a_2 = \lambda a_1 + v$ , où  $v$  est parallèle à  $P$  et orthogonal à  $a_1$ , et on vérifie que  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  est le quotient riemannien de  $K_{|a_1|,|a_3|} \times \mathbb{R}$  par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (r_\alpha(p), t + |v|), \quad \text{avec } \alpha = \lambda|a_1|.$$

ii) Type  $B_2$ . On se donne deux plans parallèles  $P_1$  et  $P_2$ , et deux vecteurs indépendants  $a_1$  et  $a_2$  parallèles à ces plans. Le groupe  $\Gamma$  est engendré par les symétries glissées  $\sigma_{P_1,a_1/2}$  et  $\sigma_{P_2,a_2/2}$ . Soit  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire orthogonal à ces plans, et  $d\mathbf{k}$  le vecteur de la translation qui envoie  $P_1$  sur  $P_2$ . Alors  $\sigma_{P_2,a_2/2} \circ \sigma_{P_1,a_1/2}$  est la translation de vecteur  $a_3 = \frac{a_1+a_2}{2} + 2d\mathbf{k}$ . Le réseau  $\Lambda$  associé à  $\Gamma$  est engendré par  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Les différents types métriques s'obtiennent en faisant varier  $a_1$ ,  $a_2$  et  $d = \text{dist}(P_1, P_2)$ .

Cette variété est difféomorphe à la suspension d'une bouteille de Klein par  $T$ . En effet, le sous-groupe engendré par  $\sigma_{P_1,a_1/2}$  et la translation de vecteur  $4d\mathbf{k}$  est distingué dans  $\Gamma$  ; il est isomorphe au groupe fondamental de la bouteille de Klein, et le quotient est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

Pour expliciter cette identification au niveau des métriques, on écrit comme plus haut  $a_2 = \lambda a_1 + v$ , avec  $v$  orthogonal à  $a_1$ , et on vérifie que  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  est le quotient riemannien de  $K_{|a_1|,4d} \times \mathbb{R}$  par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto \left( r_\alpha(T(p)), t + \frac{|v|}{2} \right), \quad \text{avec } \alpha = |a_1| \frac{\lambda - 1}{2}.$$

iii) Type  $B_3$ . On se donne un plan  $P$ , une droite  $D$  de  $P$ , et une base orthogonale  $(a_1, a_2, a_3)$ , telle que  $a_1$  et  $a_2$  soient parallèles à  $D$  et  $P$  respectivement. Le groupe  $\Gamma$  est engendré par  $\sigma_{D,a_1/2}$ ,  $\sigma_{P,a_2/2}$  et la translation de vecteur  $a_3$ . On peut aussi obtenir cette métrique par suspension de la bouteille de Klein : c'est le quotient riemannien de  $K_{|a_2|,|a_3|} \times \mathbb{R}$  par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (S_1(p), t + |a_1|/2) \quad (\text{voir 2.2}).$$

iv) Type  $B_4$ . On se donne un plan  $P$ , une droite  $D$  parallèle à  $P$  mais non incluse dans  $P$ , deux vecteurs orthogonaux  $a_1$  et  $a_2$  parallèles à  $D$  et  $P$  respectivement. Le groupe  $\Gamma$  est engendré par  $\sigma_{D,a_1/2}$  et  $\sigma_{P,a_2/2}$ .

Le réseau associé à  $\Gamma$  est engendré par la base orthogonale  $(a_1, a_2, a_3)$ , avec  $|a_3| = 4\text{dist}(P, D)$ . Cette fois, la métrique est le quotient riemannien de  $K_{|a_2|,|a_3|} \times \mathbb{R}$  par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (S_2(p), t + |a_1|/2) \quad (\text{voir encore 2.2}).$$

**Remarque 1.** Cette discussion montre que chaque classe de difféomorphisme de variété plate compacte non orientable de dimension 3 est associée à un élément de du groupe des transformations affines de  $K$  quotienté par sa composante neutre.

### 3 Métriques singulières

#### 3.1 Présentation de la bouteille de Klein–Bavard

Nous travaillerons avec des métriques riemanniennes *singulières* dans le sens suivant.

1. Elles sont continues, c'est-à-dire que les coefficients  $g_{ij}$ , exprimés en cartes locales, sont continus.
2. La variété est une réunion de domaines à bord d'intérieurs deux à deux disjoints, tels qu'à l'intérieur de chaque domaine la métrique est lisse.

Une telle métrique définit un espace de longueur (voir [5] pour des détails sur cette notion). On peut donc parler de géodésiques. De plus, la mesure riemannienne se définit exactement comme dans le cas lisse.

Pour les métriques qui nous intéressent, le modèle local est le suivant. On part de la sphère ronde, et on repère les points par la latitude  $\phi$  et la longitude  $\theta$ . Pour  $\phi_o \in ]0, \pi/2[$ , soit  $\Sigma_{\phi_o}$  le domaine défini par  $|\phi| \leq \phi_o$ . Sur  $\Sigma_{\phi_o}$ , la métrique ronde est donnée par  $d\phi^2 + \cos^2 \phi d\theta^2$ . A partir de là, on introduit sur  $\mathbb{R}^2$  la métrique riemannienne singulière (au sens précédent)

$$d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2, \tag{1}$$

où  $f$  est la fonction  $2\phi_o$ -périodique qui coïncide avec  $\cos \phi$  sur l'intervalle  $[-\phi_o, \phi_o]$  (comparer à [1]).

**Exemple 1.** La métrique sur la bouteille de Klein qui donne le quotient systolique optimal s'obtient pour  $\phi_o = \frac{\pi}{4}$  en quotientant le plan muni de la métrique 1 par l'action du groupe engendré par

$$(\theta, \phi) \mapsto (\theta + \pi, -\phi) \quad \text{et} \quad (\theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi + 4\phi_o).$$

Nous noterons  $(\mathbf{K}, b)$  la bouteille de Klein munie de cette métrique,  $(\mathbf{T}^2, b)$  son revêtement orientable. Il se trouve que  $(\mathbf{K}, b)$  a le même groupe d'isométries que celui d'une bouteille de Klein plate (attention, la propriété analogue pour  $(\mathbf{T}^2, b)$  est fautive !). Cela peut se voir par un calcul direct, mais il sera utile de voir les choses géométriquement : le domaine sphérique à bord  $\Sigma_{\phi_o}$  vu plus haut peut se voir comme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, |z| \leq \sin \phi_o\}.$$

Le cylindre obtenu en prenant tous les tranlatés de vecteur  $2n \sin \phi_o \vec{k}$  de  $\Sigma_{\phi_o}$ , muni de la structure de longueur induite par la métrique euclidienne, est un revêtement riemannien de  $(\mathbf{T}^2, b)$  (et donc de  $(\mathbf{K}, b)$ ). Nous le noterons  $(\mathbf{C}, b)$ .

On récupère  $(\mathbf{K}, b)$  en quotientant  $(\mathbf{C}, b)$  par le groupe engendré par les antipodias par rapport aux centres des sphères portant ces domaines (deux domaines contigus suffisent). On notera  $\sigma$  l'une quelconque de ces antipodias.

Alors les isométries suivantes de ce cylindre passent au quotient. Si on adopte la formulation analytique de (1), elles sont les exactes analogues des isométries décrites en 2.2.

1. les rotations autour de l'axe (analogues aux translations "horizontales").
2. les réflexions par rapport à un plan méridien (analogues aux réflexions par rapport à une géodésique "verticale", c'est-à-dire aux transformations de type  $S_1$ ).
3. les réflexions par rapport à un diamètre d'un cercle singulier (analogues aux symétries par rapport à un point du bord commun des deux rubans, c'est-à-dire aux transformations de type  $S_2$ ).
4. la réflexion par rapport à un plan d'un cercle singulier (qui donne par passage au quotient une transformation équivalente (modulo  $\text{Isom}_o$ ) à celle obtenue en faisant passer au quotient la translation de vecteur  $2 \sin \phi_0 \vec{k}$ . Cette dernière transformation est l'analogue de  $(x, y) \mapsto (x, y + \frac{b}{2})$ .

### 3.2 Quelques propriétés géométriques de la bouteille singulière

**Proposition 1.** *Localement, une géodésique de  $(\mathbf{C}, b)$ ,  $(\mathbf{T}^2, b)$  ou  $(\mathbf{K}, b)$  est de l'un des types suivants :*

- 1) un arc de grand cercle (éventuellement tangent à une ligne singulière).
- 2) la juxtaposition d'un arc de grand cercle tangent à une ligne singulière, et d'un arc de cette ligne singulière.
- 3) la juxtaposition de deux arcs de grand cercle ayant une extrémité commune  $r$  sur une ligne singulière, localement de part et d'autre de cette ligne, qui fait avec ces deux arcs des angles dont la somme est  $\pi$ .

*Preuve.* Il suffit de juxtaposer les remarques suivantes :

1. Les courbes contenues dans l'intérieur d'un  $\Sigma$  sont des géodésiques si et seulement si ce sont des arcs de grand cercle, d'après la théorie classique.
2. Une courbe contenue dans un  $\Sigma$  et dont les extrémités  $p$  et  $q$  sont sur la ligne singulière est plus longue que le plus court des deux arcs de la ligne singulière qui joignent  $p$  et  $q$ . Pour le voir, il suffit d'expliciter la longueur en utilisant la formule (1) et de remarquer que la fonction  $\cos \phi$  est décroissante.
3. Soit  $c$  une courbe  $C^1$  par morceaux, paramétrée par longueur d'arc, qui est la juxtaposition d'une courbe  $c_1$  contenue dans un  $\Sigma$ , ayant une extrémité  $r$  sur une ligne singulière, et d'une courbe  $c_2$  partant de  $r$  et contenue dans cette ligne singulière. Si  $c'_1(r) \neq c'_2(r)$ , d'après la formule de variation première,  $c$  peut être raccourcie en gardant les mêmes extrémités.



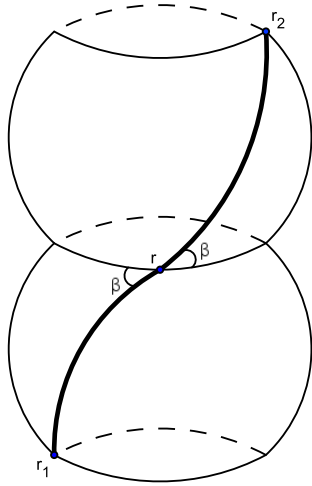


Fig. 1. Géodésique de type 3

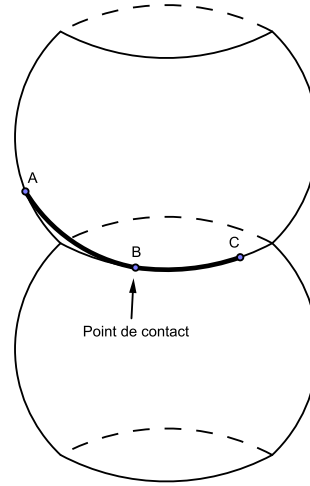


Fig. 2. Géodésique de type 2

4. soit enfin une courbe dont les extrémités  $p$  et  $q$  sont dans deux exemplaires contigus de  $\Sigma$ , et qui intersecte la ligne singulière en un point. Si elle minimise la longueur des courbes joignant  $p$  et  $q$ , elle est nécessairement du troisième type décrit dans l'énoncé en raison de la formule de variation première.

■

**Remarque 2.** A partir de là, on voit que deux points appartenant à des domaines  $\Sigma$  contigus sont joints en général par un segment géodésique unique, éventuellement par deux. Ce dernier cas n'arrive que pour des points ayant des latitudes opposées : la réflexion orthogonale par rapport au plan défini par l'axe des  $z$  et les deux points échange alors ces segments.

Désignons par  $T_\delta$  le déplacement hélicoïdal obtenu en composant la translation de vecteur  $2\sin\phi_0\vec{k}$  et la rotation d'angle  $\delta$  autour de l'axe des  $z$ , *considéré comme isométrie du cylindre*  $(\mathbf{C}, b)$ . Nous avons vu que cette isométrie passe au quotient pour  $(\mathbf{T}, b)$  comme pour  $(\mathbf{K}, b)$ .

**Proposition 2.** *Sur  $(\mathbf{T}, b)$ , la fonction  $\text{dist}(p, (T_\delta(p)))$  est constante.*

*Preuve.* On vérifie facilement qu'il suffit de faire la preuve pour  $(\mathbf{C}, b)$ . On remarque que  $T_\delta$  est la restriction au cylindre d'un déplacement de  $\mathbb{R}^3$  qui est le produit de deux réflexions par rapport à des droites orthogonales à l'axe des  $z$ , faisant entre elles un angle égal à  $\delta/2$ , et de plus courte distance (dans l'espace euclidien)  $\sin\phi_0$ . Soit  $\gamma$  une géodésique minimisante joignant  $p$  et  $T_\delta(p)$ . Admettons un instant que cette géodésique rencontre une ligne singulière en un unique point  $r$ , et que l'on se trouve donc dans la troisième situation de la proposition 1. Cet arc est inclus dans la juxtaposition de deux arcs de grand cercle  $r_1r$  et  $rr_2$ , contenus dans deux domaines sphériques contigus  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , et faisant le même angle  $\beta$  avec les lignes singulières en  $r, r_1, r_2$  (voir figure 1). Notons aussi que  $\gamma$  se prolonge en une géodésique de  $(\mathbf{C}, b)$  formée de tels arcs de grand cercle, et que  $T_\delta(r_1) = r, T_\delta(r) = r_2$ . Choisissons les réflexions dont la composée est  $T_\delta$

comme suit : l'axe de la première passant par le milieu de l'arc  $r_1r$ , l'axe de la seconde passant par  $r$ . Cela permet de voir que  $T_\delta$  laisse la géodésique qui prolonge  $\gamma$  globalement invariante. Comme il n'y a pas de point fixe, c'est une translation le long de cette géodésique. L'assertion de l'énoncé en résulte, puisque toute la situation est invariante par rotation autour de l'axe des  $z$ .

Reste à justifier notre affirmation sur  $\gamma$ . Elle est clairement vraie pour  $\delta = 0$  et donc pour  $\delta$  assez petit. Dans ce cas, un calcul explicite que nous laissons au lecteur montre que

$$\tan \delta = \frac{-2\sqrt{2} \cot \beta}{\cot^2 \beta - 2},$$

et donc que tous les  $\delta$  possibles peuvent être obtenus ainsi. On applique alors la remarque qui suit la proposition précédente. ■

Dorénavant, nous supposons que  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Pour les rotations  $r_\alpha$  on a la propriété suivante.

**Proposition 3.** *Soit  $p$  un point du tore  $(\mathbf{T}, b)$  et  $p_0$  un point d'une ligne singulière. Alors*

$$\text{dist}_{(\mathbf{T}, b)}(p, r_\alpha(p)) \geq \text{dist}_{(\mathbf{T}, b)}(p_0, r_\alpha(p_0))$$

pour tout  $\alpha \in [0, \pi]$

Ainsi, le minimum est obtenu pour les points de la ligne singulière.

*Preuve.* On utilise la proposition 1, en remarquant qu'il suffit de faire le calcul dans  $(\mathbf{C}, b)$ . Soit  $\Sigma$  le domaine sphérique où se trouve  $p$  (et donc  $q = r_\alpha(p)$ ). Tant que le grand cercle passant par ces deux points est entièrement dans  $\Sigma$  (ce qui est le cas si leur latitude commune  $\beta$  est assez petite), la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne

$$\text{dist}(p, r_\alpha(p)) = \arccos(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin \alpha),$$

et cette distance est une fonction décroissante de  $\beta$ .

Si ce n'est pas le cas, on est dans le deuxième cas de la Proposition 1. Le segment géodésique qui joint  $p$  et  $q$  est formé de deux arcs de grand cercle ayant une extrémité en  $p$  (resp.  $q$ ), et tangents en leur autre extrémité, que nous noterons  $p'$  et  $q'$ , à une ligne singulière. Si  $\psi$  est la différence de longitude entre  $p$  et  $p'$  (ou entre  $q$  et  $q'$ ) on vérifie que  $\cos \psi = \tan \beta$ . On a alors

$$\text{dist}(p, p') = \text{dist}(q, q') = \arccos\left(\frac{\cos \beta \cos \psi}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}\right) = \arccos(\sqrt{2} \sin \beta)$$

et

$$\text{dist}(p', q') = \frac{\alpha - 2\psi}{\sqrt{2}}$$

(on vérifie au passage que l'on est dans cette situation si  $\beta \geq \arctan(\cos \alpha/2)$ ).

Finalement dans ce cas

$$\text{dist}((p, r_\alpha(p))) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \arccos(\tan \beta) + 2 \arccos(\sqrt{2} \sin \beta).$$

La fonction de  $\beta$  ainsi obtenue a pour dérivée

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta \sqrt{1 - 2 \sin^2 \beta}} (1 - 2 \cos^2 \beta).$$

Les expressions de  $\text{dist}((p, r_\alpha(p)))$  pour  $\beta \in [0, \beta_0]$ , puis pour  $\beta \in [\beta_0, \pi/4]$  montrent que l'on a une fonction décroissante de  $\beta$ . Son minimum est atteint quand  $p$  est sur une ligne singulière. Il vaut  $\alpha\sqrt{2}$ . ■

En passant au quotient, on déduit de ce qui précède les résultats analogues pour la bouteille de Klein.

**Corollaire 1.** *Pour  $(\mathbf{K}, b)$ , on a*

$$\mathbf{d}(r_\alpha) = \inf \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \pi - \alpha \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}(T_\delta) = \inf \left\{ \frac{\pi - \delta}{\sqrt{2}}, \arccos \frac{\cos \delta - 1}{2} \right\}$$

*Proof.* En fait,

$$\mathbf{d}(r_\alpha) = \inf_{p \in \Sigma} \{ \text{dist}(p, r_\alpha(p)), \text{dist}(\sigma(p), r_\alpha(p)) \}.$$

Mais comme les points  $\sigma(p)$  et  $r_\alpha(p)$  sont situés de part et d'autre de l'équateur de  $\Sigma$ , le segment géodésique qui les joint est contenu dans  $\Sigma$  (premier cas de la proposition 1). On vérifie alors que  $\text{dist}(\sigma(p), r_\alpha(p))$ , est une fonction décroissante de la latitude, d'où le résultat pour  $r_\alpha$ .

Pour étudier  $\mathbf{d}(T_\delta)$ , il suffit de considérer deux exemplaires contigus  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , et de calculer l'infimum analogue au précédent quand  $p$  parcourt  $\Sigma_1$ . On sait déjà d'après la Proposition 2 que  $\text{dist}(p, T_\delta(p))$  est constante (et égale à  $\arccos \frac{\cos \delta - 1}{2}$ ). Passons à  $\text{dist}(T_\delta(p), \sigma(p))$ . Soit  $c$  le segment géodésique qui joint ces points. On est dans le deuxième ou le troisième cas de la Proposition 1. Dans tous les cas, soit  $r$  son premier point de rencontre avec la ligne singulière, et  $q$  le symétrique de  $T_\delta(p)$  par rapport à cette ligne singulière.

Dans  $\Sigma_1$ , on passe de  $q$  à  $\sigma(p)$  par une rotation d'angle  $\pi - \delta$ . Par ailleurs, ces deux points sont reliés par la courbe  $\tilde{c}$  obtenue en prenant la symétrique de la partie de  $c$  de  $T_\delta(p)$  à  $r$ , puis  $c$  elle-même de  $r$  à  $\sigma(p)$ . On a alors

$$\text{longueur}(c) = \text{longueur}(\tilde{c}) \geq \frac{\pi - \delta}{\sqrt{2}}$$

d'après la Proposition 3. ■

## 4 Fin de la preuve

### 4.1 Calcul des systoles dans le cas plat et dans le cas singulier

**Lemme 1.** *Pour toute métrique plate  $g$  sur une variété  $N$  de type  $B_1$ , on a*

$$\frac{(\text{sys}(N, g))^3}{\text{vol}(N, g)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

avec égalité si et seulement si le réseau associé admet une base  $(a_1, a_2, a_3)$  telle que  $|a_1| = 2|a_2| = 2|a_3|$ , l'angle des vecteurs  $a_1$  et  $a_2$  étant égal à  $\pi/3$ . Il existe sur  $N$  une métrique  $g_0$ , continue sur  $N$  et lisse en dehors d'une hypersurface, localement isométrique à  $S^2 \times \mathbb{R}$  là où elle est lisse, de quotient systolique strictement supérieur à  $2/\sqrt{3}$ .

*Preuve.* Dans le cas plat, le volume est égal à  $\frac{1}{2} \det(a_1, a_2) |a_3|$ , la systole à  $\inf\{|a_3|, s\}$ , où  $s$  est la systole du tore plat de dimension 2 défini par le réseau de base  $\frac{a_1}{2}, a_2$ . Normalisons de façon que  $|a_3| = 1$ . Alors le quotient systolique vaut

$$\frac{2s^3}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \leq 1, \quad \text{et} \quad \frac{2}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \geq 1,$$

ce qui donne la première partie d'après les résultats classiques sur les réseaux en dimension 2.

Pour la construction de  $g_0$ , on part de la métrique sur la bouteille de Klein singulière vue en 3, dont la systole est égale à  $\pi$  et le volume à  $2\pi\sqrt{2}$ , et on procède par suspension : d'après 2.3 et 3.1 le quotient de  $(\mathbf{K}, b) \times \mathbb{R}$  par  $\langle (r_\alpha, t_d) \rangle$  est une variété homéomorphe à une variété de type  $B_1$ . Son volume est égal à  $2\pi\sqrt{2}d$ , et sa systole à

$$\inf\{\pi, \sqrt{\mathbf{d}(r_\alpha)^2 + d^2}\}.$$

D'après le Corollaire 1,  $\mathbf{d}(r_\alpha)$  est égal à

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{si } \alpha \leq \pi(2 - \sqrt{2}), \quad \text{et} \quad \pi - \alpha \quad \text{si } \pi(2 - \sqrt{2}) < \alpha < \pi$$

Pour obtenir le meilleur quotient systolique en faisant cette construction, c'est-à-dire en faisant varier  $\alpha$  et  $d$ , on fixe  $\text{sys} = \pi$ , et on essaie de minimiser  $d$ . Pour le faire il faut maximiser  $\mathbf{d}(r_\alpha)$ , donc choisir  $\alpha = \pi(2 - \sqrt{2})$  et  $d = \pi(2\sqrt{2} - 2)^{\frac{1}{2}}$ .

Pour ces valeurs de  $\alpha$  et  $d$  on a  $\frac{\text{sys}^3}{\text{Vol}} = \frac{\pi}{4(\sqrt{2}-1)^{1/2}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$  ■

**Lemme 2.** *Pour toute métrique plate  $(N, g)$  de type  $B_3$  ou  $B_4$ , on a*

$$\frac{\text{sys}(N, g)^3}{\text{vol}(N, g)} \leq 1,$$

avec égalité si et seulement si  $|a_1| = |a_2| = 2|a_3|$ . Dans les deux cas, il existe sur  $N$  une métrique  $g_0$  continue, lisse et localement isométrique à  $S^2 \times \mathbb{R}$  sur le complémentaire d'une hypersurface, de quotient systolique strictement supérieur à 1.

*Preuve.* Dans les deux cas, le réseau associé est orthogonal et d'indice 4 dans  $\Gamma$ , si bien que

$$\text{vol}(N, g) = |a_1||a_2||a_3|/4 \quad \text{et} \quad \text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, |a_2|/2, |a_3|\},$$

d'où la première partie. Pour la deuxième partie, on procède par suspension, en partant de la bouteille  $(K, b)$  comme précédemment, et en quotientant  $K \times \mathbb{R}$  par le groupe  $\langle (S_1, t_\pi) \rangle$  (pour le type  $B_3$ ) ou  $\langle (S_2, t_\pi) \rangle$  (type  $B_4$ ). Comme  $S_1$  et  $S_2$  ont des points fixes, la systole reste égale à  $\pi$ . Le volume vaut  $2\pi^2\sqrt{2}$ , et le quotient  $(\text{sys})^3/\text{vol}$  est égal à  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ . ■

**Lemme 3.** *Pour toute métrique plate  $g$  sur une variété riemannienne  $N$  de type  $B_2$  on a*

$$\frac{\text{sys}(N, g)^3}{\text{vol}(N, g)} \leq \frac{8}{\sqrt{39}}$$

*L'égalité est réalisée si et seulement si*

- i)  $|a_1| = |a_2| = 8d$ , où  $d$  est la distance entre les plans  $P_1$  et  $P_2$  des symétries glissées qui engendrent  $\Gamma$  (cf. 2.3) ;*
- ii) l'angle  $\alpha$  des vecteurs  $a_1$  et  $a_2$  est égal à  $\arccos(-15/24)$ .*

*Preuve.* On a  $(N, g) = \mathbb{R}^3/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est décrit dans la définition de  $B_2$ . On note  $\Lambda$  le réseau associé à  $\Gamma$  et  $L$  le réseau 2-dimensionnel engendré par  $(a_1, a_2)$ . Le volume est égal à  $\det(a_1, a_2)d$ . Dans la suite on identifie un réseau  $\Lambda$  avec ses éléments. On sait que

$$\text{sys}(N, g) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{d}(\gamma).$$

En regroupant les éléments de  $\Gamma$  en trois catégories, les symétries glissées de vecteur  $a_1 + v$  ou  $a_2 + v$  ( $v \in L$ ), et les éléments de  $\Lambda$  c'est à dire les translations pures de  $\Gamma$ , on obtient

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1/2 + \Lambda|, |a_2/2 + \Lambda|, |\Lambda|\}.$$

En faisant intervenir le réseau  $L$ , on obtient

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1/2 + L|, |a_2/2 + L|, 4d, \sqrt{|\frac{(a_1 + a_2)}{2} + L|^2 + 4d^2}, |L|\}$$

a) si  $(a_1, a_2)$  est une base minimale du réseau  $L$  (les vecteurs  $a_1$  et  $a_2$  sont non colinéaires et minimaux dans  $L$ ), alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, |a_2|/2, 4d\}, \quad \text{vol}(N, g) = |a_1||a_2|d \sin \alpha,$$

d'où  $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} \leq 2/\sqrt{3}$  avec égalité si  $|a_1| = |a_2| = 8d$  et  $\alpha = \pi/3$

b) si  $(a_1, a_1 + a_2)$  est une base minimale de  $L$  et  $|a_1| \leq |a_1 + a_2|$  alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, 4d\} \text{ et } \text{vol}(N, g) = |a_1||a_2|d \sin \alpha$$

et on se ramène au cas précédent.

c) si  $(a_1, a_1 + a_2)$  est une base minimale de  $L$  et  $|a_1| \geq |a_1 + a_2|$  alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, 4d, \sqrt{\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} + 4d^2}, |a_1 + a_2|\}.$$

On adopte les normalisations d'usage concernant les réseaux de dimension 2, en rapportant le plan à une base orthonormée  $(u, v)$  telle que  $u = a_1 + a_2$ ,  $a_1 = xu + yv$ . Ainsi,  $x^2 + y^2 \geq 1$ ,  $|x| \leq 1/2$ , et

$$\text{vol}(N, g) = \frac{1}{2} \det(a_1, a_2, \frac{a_1 + a_2}{2} + 2dk) = dy.$$

On discute alors suivant les valeurs de  $d$ .

- si  $0 < d \leq 1/8$  alors la systole vaut  $4d$  et

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{64d^2}{y} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- si  $1/8 \leq d \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}$  alors  $\text{sys} = \inf\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, 4d\}$  et deux cas se présentent :

- Premier cas :  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geq 4d$ . Alors  $\text{sys} = 4d$  et  $y \geq \frac{\sqrt{256d^2-1}}{2}$ , d'où

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{64d^2}{y} \leq \frac{128d^2}{\sqrt{256d^2-1}} \leq \frac{8}{\sqrt{39}}$$

L'égalité est réalisée si  $d = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ ,  $x = 1/2$  et  $y = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

- Second cas :  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq 4d$ . Alors  $\text{sys} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$  et le quotient systolique est égal à  $\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{8yd}$ . Il faut maximiser cette fonction sur le domaine

$$\{(x, y, d) : x^2 + y^2 \geq 1, x \leq 1/2, 1/8 \leq d \leq 1/4\sqrt{3}, 4d \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\}$$

Une étude directe donne le même maximum qu'auparavant (mêmes valeurs de  $d$ ,  $x$ ,  $y$ ).

- si  $\frac{1}{4\sqrt{3}} \leq d \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$  alors  $\text{sys}(N, g) = \inf\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}\}$

- Premier cas:  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geq \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}$ . Alors

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{(16d^2 + 1)^{3/2}}{8yd}$$

Mais  $y^2 \geq 16d^2 + 3/4$  d'où  $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} \leq 8d \frac{(16d^2+1)^{3/2}}{\sqrt{16d^2+3/4}}$ . Sur l'intervalle considéré, cette fonction atteint son maximum en  $d = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ . On retombe sur  $8/\sqrt{39}$ .

- Second cas:  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}$ . Alors

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{8yd}$$

Comme précédemment, le maximum est réalisé en un point de la frontière du domaine de définition. Il est atteint lorsque  $d = 1/4\sqrt{3}$ ,  $x = 1/2$  et  $4d = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$  : c'est toujours  $\frac{8}{\sqrt{39}}$ .

- si  $d \geq \sqrt{3}/4$  alors  $\text{sys} = \inf\{1, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\}$

- Premier cas: si  $1 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$  alors  $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{1}{yd} \leq \frac{2}{d\sqrt{15}} \leq \frac{8}{\sqrt{45}}$

- Second cas: si  $1 \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$  alors  $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{8yd} \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{2\sqrt{3}y}$ . Dans le domaine  $\{4 \geq x^2 + y^2\}$ , cette fonction atteint son maximum lorsque  $x^2 + y^2 = 4$ . Ce maximum est aussi égal à  $\frac{8}{\sqrt{45}}$ . ■

**Lemme 4.** *Si  $N$  est une variété de type  $B_2$ , il existe sur  $N$  une métrique  $g_0$  continue et lisse en dehors d'une hypersurface, localement isométrique à  $S^2 \times \mathbb{R}$ , dont le quotient systolique est strictement supérieur à  $8/\sqrt{39}$ .*

*Preuve.* La construction de  $g_0$  se fait comme précédemment en partant de la bouteille de Klein singulière de Bavard. On fait le quotient de  $(\mathbf{K}, b) \times \mathbb{R}$  par  $(T_\delta, t_d)$ , où  $(T_\delta, t_d)$  est la transformation  $T_\delta$  déjà définie sur la composante  $(\mathbf{K}, b)$  et la translation de vecteur  $d$  sur  $\mathbb{R}$ . Cela donne bien une variété homéomorphe à une variété de type  $B_2$ , munie d'une métrique singulière isométrique localement à  $S^2 \times \mathbb{R}$  là où elle est lisse. On normalise en supposant que la systole vaut  $\pi$ . Cela impose l'inégalité  $(\mathbf{d}(T_\delta, t_d))^n \geq \pi$  pour tout  $n$ . Le volume est égal à  $2\pi\sqrt{2}d$ . Pour obtenir le plus grand quotient systolique il faut que  $d$  soit minimal. On commence par étudier l'inéquation  $\mathbf{d}(T_\delta, t_d) \geq \pi$ , qui est équivalente à  $(\mathbf{d}(T_\delta))^2 + d^2 \geq \pi^2$ . La valeur maximale de  $\mathbf{d}(T_\delta)$  est obtenue lorsque  $\delta$  vérifie  $\frac{\cos \delta - 1}{2} = \cos \frac{\pi - \delta}{\sqrt{2}}$ . On note  $\delta_0$  la solution de cette équation. Le  $d$  minimal est obtenu lorsque l'égalité est réalisée dans l'inéquation précédente, on le note  $d_0$ . on a bien  $\mathbf{d}((T_{\delta_0}, t_{d_0})^n) \geq \pi$  pour tout  $n$  : comme  $d_0$  est de l'ordre de 2,641,  $nd$  est supérieur à  $\pi$  pour  $n \geq 2$ . Ainsi, ces deux constantes donnent le plus grand quotient systolique parmi ceux de toutes les constructions similaires. Il est égal à  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}d_0} > 8/\sqrt{39}$ . ■

Le tableau suivant permet de faire la comparaison entre les plus grands quotients systoliques des métriques plates ( $\tau(\text{plates})$ ) et les plus grands quotients systoliques des métriques singulières que nous venons de construire ( $\tau(\text{singulières})$ ) sur chaque type de variété de Bieberbach non-orientables de dimension 3. Ici,  $d_0$  désigne la valeur de  $d$  obtenue à la fin de la preuve ci-dessus.

type	$\tau(\text{plates})$	valeur approchée	$\tau(\text{singulières})$	valeur approchée
$B_1$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 1,154$	$\frac{\pi}{4(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\approx 1,220$
$B_2$	$\frac{8}{\sqrt{39}}$	$\approx 1,281$	$\frac{\pi^2}{2d_0\sqrt{2}}$	$\approx 1,321$
$B_3$	1	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\approx 1,110$
$B_4$	1	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\approx 1,110$

## 4.2 Des métriques singulières aux métriques lisses

Les métriques que nous venons de construire sont seulement continues. Pour obtenir des métriques lisses ayant les mêmes propriétés, on utilise des arguments de continuité et d'approximation.

Si  $M$  est une variété compacte, l'espace des sections continues de n'importe quel fibré tensoriel sur  $M$  peut être muni de la topologie *compacte ouverte*, cf. [10], ch. 2. Pour cette topologie, le sous-espace  $\mathcal{M}$  des métriques riemanniennes est ouvert dans l'espace  $C^0(S^2M)$  des 2-tenseurs

symétriques. Pour la topologie induite sur  $\mathcal{M}$ , on peut vérifier que tout ouvert est une réunion d'ensembles de la forme

$$A(g, \epsilon) = \{h \in \mathcal{M}, \forall x \in M, (1 - \epsilon)g_x < h_x < (1 + \epsilon)g_x\},$$

où  $g \in \mathcal{M}$  et  $\epsilon \in ]0, 1[$ , ces inégalités étant prises au sens des formes quadratiques sur  $T_x M$ .

La propriété suivante est folklorique. Faute de pouvoir en donner une référence écrite, nous la démontrons.

**Théorème 1.** *L'application  $h \mapsto \text{sys}(h)$  est continue sur  $\mathcal{M}$  muni de la topologie compacte ouverte.*

*Preuve.* Il suffit de travailler avec un  $A(g, \epsilon)$ . Pour  $h \in A(g, \epsilon)$ , la systole peut être réalisée par une courbe paramétrée  $c : [0, 1] \rightarrow M$  prise dans l'ensemble

$$\mathcal{C} = \cup_{h \in A(g, \epsilon)} \mathcal{C}_h,$$

où  $\mathcal{C}_h$  est l'ensemble des lacets  $c : [0, 1] \rightarrow M$  non contractiles,  $C^1$  par morceaux, paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc pour  $h$ , et de  $h$ -longueur inférieure ou égale à  $2\text{diam}(M, h)$ .

Dans ces conditions, l'ensemble des longueurs des courbes de  $\mathcal{C}$ , prises pour toutes les métriques de  $A(g, \epsilon)$ , est majoré par  $2(1 + \epsilon)\text{diam}(M, g)$ , et l'ensemble

$$\bigcup \{(c(t), \dot{c}^\pm(t))\} \quad \text{avec } c \in \mathcal{C}, t \in [0, 1]$$

est relativement compact dans  $TM$ . Il en résulte que la famille (indexée par  $\mathcal{C}$ ) de fonctions qui à une métrique  $h$  associe la longueur de  $c$  pour  $h$  est *équicontinue* sur  $A(g, \epsilon)$ . Mais la borne inférieure d'une famille de fonctions équicontinue est continue. ■

Enfin (voir encore [10]), l'espace des sections lisses de n'importe quel fibré vectoriel de base compacte est dense pour la topologie compacte ouverte dans l'espace des sections continues. Dans la situation qui nous intéresse, il suffit en fait d'approcher uniformément la fonction  $f$  par une fonction lisse.

## 5 Remarques diverses

Une métrique de la forme  $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2$  est localement conforme à une métrique plate, même si  $f$  est seulement continue : il suffit de mettre  $f^2$  en facteur. Le même procédé montre de plus que la métrique de C. Bavard est globalement conforme à une métrique plate sur la bouteille de Klein. Cette métrique est facile à expliciter (voir [2] pour les détails).

Ici, comme nous travaillons en dimension 3, la situation est différente. Le modèle local est de la forme  $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2 + dt^2$ . Il s'avère que si  $g$  est une métrique riemannienne  $C^3$  en dimension 2,  $g + dt^2$  est conformétement plate si et seulement si  $g$  est à courbure constante. Par conséquent, les métriques que nous avons introduites en 4 sont bien conformétement plates *en dehors de la surface singulière*. Il ne faut pas s'attendre à ce qu'elles soient conformétement plates au voisinage d'un point d'une surface singulière, mais la métrique étant seulement continue, un argument spécifique est nécessaire.



**Proposition 4.** *La métrique  $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2 + dt^2$ , où  $f$  est la fonction donnée dans (1), n'est pas conformément plate.*

*Preuve.* Soit  $p$  un point de l'hypersurface singulière  $S$  d'équation  $\phi = \phi_0$ , et  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un difféomorphisme conforme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Quitte à diminuer  $U$ , on peut le supposer invariant par la transformation  $s : (\phi, \theta, t) \mapsto (2\phi_0 - \phi, \theta, t)$ , qui est une isométrie de  $U$  fixant  $S$ . D'après le théorème de Liouville (voir par exemple [12], p.12), la conjuguée de  $s$  par  $h$  est la restriction d'une transformation de Möbius. Mais une telle transformation ne peut exister : l'ensemble de ses points fixes contient  $h(S \cap U)$ , qui devrait être une portion de 2-sphère. Pour voir que c'est impossible, on introduit l'application conforme  $h_1$  de  $U' = U \cap \{\phi < \phi_0\}$  dans  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$h_1(\phi, \theta, t) = (e^t \cos \phi \cos \theta, e^t \cos \phi \sin \theta, e^t \sin \phi)$$

(comparer à [12], p.76–77). Toujours d'après le théorème de Liouville, il existe une transformation de Möbius  $h_2$  telle qu'en restriction à  $U'$  on ait  $h = h_2 \circ h_1$ . Par continuité, cette propriété reste vraie sur  $S \cap U$ . Ainsi, l'ensemble des points fixes de la transformation de Möbius  $hsh^{-1}$  contient  $h_2(h_1(S \cap U))$ . On aboutit à la contradiction cherchée, car  $h_1(S)$  est une portion de cône de révolution. ■

Pour plus de détails sur les résultats de géométrie conforme utilisés ici, voir les contributions de R. Kulkarni et du second auteur dans [12].

Notons enfin que pour celles de ces métriques qui donnent le meilleur quotient systolique, la variété est encore recouverte par les géodésiques systoliques. Il n'y a donc pas d'obstacle "évident(!)" à ce que ces métriques soient optimales, même si nous sommes loin de pouvoir le montrer.

**Remerciements.** C'est un plaisir de remercier le referee pour ses critiques constructives.

## References

- [1] Bavard, C., Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein, *Math. Ann.* 274, 439–441(1986)
- [2] Bavard, C., Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein, *Geom. Dedicata* 27, 349–355 (1988),
- [3] Berger, M., Quelques problèmes de géométrie riemannienne ou deux variations sur les espaces compacts symétriques de rang 1, *L'Ens.Math.* (2) 16 73–96 (1970).
- [4] Berger, M., Systoles et applications selon Gromov, *Séminaire N. Bourbaki*, exposé 771, *Astérisque* 216, 279–310 (1993).
- [5] Burago D., Burago, Y.D., Ivanov, S., *A course in metric geometry*, Graduate studies in Mathematics (33), Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 2001.
- [6] Charlap, L.S., *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*, Universitext, Berlin 1986.
- [7] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, 3rd edition, Springer, Berlin Heidelberg 2004.

- [8] Gromov, M., Filling Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* 18, 1–147(1983)
- [9] Gromov M., Systoles and intersystolic inequalities, in : Besse, A.L. (ed.), *Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger*, Société Mathématique de France, Séminaires et Congrès no. 1, p. 291–362.
- [10] Hirsch M., *Differential Topology*, Springer, Berlin Heidelberg 1976
- [11] Katz, M.G, *Systolic Geometry and Topology*, Math. Surveys and Monographs 137, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 2007.
- [12] Kulkarni, R.S., Pinkall, U. (Eds), *Conformal Geometry*, Aspects of Mathematics vol.12, Vieweg, Braunschweig 1988
- [13] Pu, P.M., Some inequalities in certain non-orientable riemannian manifolds. *Pacific J.Math.* 2, 55–71(1952)
- [14] Sakai, T., A proof of the isosystolic inequality for the Klein bottle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 589–590 (1988)
- [15] Thurston, W.P., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, edited by S. Levy, Princeton University Press, Princeton (1997)
- [16] Wolf, J.A., *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Boston 1974