HAL open science

Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés

David Bourqui

To cite this version:

David Bourqui. Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés. Annales de l'Institut Fourier, 2009, 59 (5), pp.1847-1895. hal-00268204v2

HAL Id: hal-00268204

https://hal.science/hal-00268204v2

Submitted on 4 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés

David Bourqui

Résumé : Nous établissons une version de la conjecture de Manin pour le plan projectif éclaté en trois points alignés, le corps de base étant un corps global de caractéristique positive.

Abstract : We prove a version of Manin's conjecture for the projective plane blown up in three collinear points, the base field being a global field of positive characteristic.

Vers la fin des années 1980, une série de questions a été soulevée par Manin et ses collaborateurs (cf. [BM90, FMT89]) sur le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée des variétés de Fano définies sur un corps global, ce qui a initié de nombreux travaux. Ces dernières années, ces questions ont notamment été étudiées de manière intensive pour les surfaces de del Pezzo généralisées définies sur un corps de nombres, en suivant la stratégie initiée par Salberger dans [Sal98], dont le principe consiste à relever le décompte des points de hauteur bornée à un certain torseur sous un tore au-dessus de la variété étudiée (en général un torseur universel). Dans de nombreux cas de surfaces, le problème de comptage « relevé » peut alors se traiter par des techniques de théorie analytique des nombres. Un des points cruciaux pour l'efficacité de la méthode est que l'on dispose d'équations explicites pour les torseurs considérés. Voici un très bref aperçu des résultats obtenus dans ce contexte (nous renvoyons au survol [Bro07] pour plus de détails). Le premier exemple de surface de del Pezzo non torique à avoir été traité est dû à de la Bretèche : il s'agit de l'éclaté du plan projectif en 4 points en position générale, *i.e.* de la surface de del Pezzo (lisse) de degré 5 ([dlB02]). Par la suite, un certain nombre d'exemples de surfaces de del Pezzo singulières de degré 3, 4, 5 ou 6 ont été traités, essentiellement par de la Bretèche, Browning et Derenthal (*cf.* par exemple [dlBBD07, dlBB07]). L'obtention d'un équivalent asymptotique pour le nombre de points de hauteur bornée dans le cas des surfaces cubiques lisses semble notamment hors

de portée pour l'instant.

Dans ce texte, nous étudions le problème dans le cas où la surface X considérée est le plan projectif éclaté en trois points aligné, le corps de base étant un corps global de caractéristique positive. Nous établissons une version de la conjecture de Manin dans ce cas (théorème 2.3). Dans ce cadre, le problème a une reformulation géométrique simple : on cherche à évaluer le nombre de morphismes d'une courbe fixée $\mathscr{C}$ vers X de degré donné, quand le degré devient grand. Soulignons que la courbe $\mathscr{C}$ est supposée de genre quelconque dans notre étude, alors que les travaux cités précédemment sur les surfaces de del Pezzo généralisées se limitent en général au cas où le corps de base est le corps des rationnels.

Nous suivons également la stratégie de Salberger : la première étape de la démonstration consiste à relever le problème de comptage au torseur universel au-dessus de X. Nous décrivons cette étape dans la section 1, où nous nous plaçons en fait dans le cadre plus général d'une variété X dont l'anneau de Cox est supposé de type fini. De façon informelle, ceci permet de ramener le dénombrement des morphismes de $\mathscr{C}$ vers X de degré donné à celui de certaines familles de sections globales de fibrés en droites, sections astreintes à satisfaire deux types de conditions : elles doivent satisfaire les « mêmes » équations que le torseur universel et leurs diviseurs doivent satisfaire certaines conditions de coprimalité (conditions entièrement explicites en termes des données décrivant le torseur universel). On se reportera à la proposition 1.20 pour un énoncé précis. Une technique standard d'inversion de Möbius permet d'« oublier » la condition de coprimalité. Le plus ardu est de tenir compte des équations satisfaites par les sections dans le dénombrement. À cet égard, le cas le plus simple apparaît comme étant celui des variétés toriques, où il n'y a pas d'équations. On est alors ramené à estimer la dimension de certains espaces de sections globales, ce qui peut se faire via le théorème de Riemann-Roch, et mène à la démonstration de la conjecture de Manin dans ce cas. Ceci est fait dans [Bou03]. Dans cet article nous expliquons comment traiter la première condition dans le cas où X est le plan projectif éclaté en trois points alignés, où il n'y a qu'une équation pour le torseur universel, qui plus est particulièrement simple. Les techniques utilisées sont élémentaires et susceptibles de s'adapter à d'autres surfaces de del Pezzo généralisées dont le torseur universel est donné par une seule équation (*cf.* [Der06] pour la classification de ces surfaces).

Nous terminons cette introduction par quelques remarques : dans le cas où le corps de base est le corps des rationnels, l'étude du nombre de points de hauteur bornée sur le plan projectif éclaté en trois points alignés est traité via l'usage du torseur universel par Browning dans [Bro07]. Dans ce cas, le résultat découle aussi d'un théorème plus général de Chambert-Loir et

Tschinkel sur la validité des conjectures de Manin pour les compactifications équivariantes d'espaces affines définies sur un corps de nombres (*cf.* [CLT00, CLT02]). Ces derniers auteurs utilisent des techniques d'analyse harmonique. Il est probable que leurs arguments s'adaptent dans le cas d'un corps global de caractéristique positive, mais ceci resterait à mettre en œuvre.

1 Relèvement du problème de comptage au torseur universel

1.1 Quelques rappels sur la théorie des anneaux de Cox

Nous faisons quelques rappels sur la théorie des anneaux de Cox, initiée par Cox dans [Cox95b] dans le cas des variétés toriques. On peut la voir comme une généralisation des coordonnées homogènes sur les espaces projectifs. Hassett et Tschinkel ont montré qu'elle fournissait un outil efficace pour la détermination explicite des équations de certains torseurs universels (*cf.* [Has04]).

Soit k un corps et X une variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k. On suppose que le groupe de Picard de X est libre de rang fini et déployé, *i.e.* $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ coïncide avec $\mathrm{Pic}(X_{k^{\mathrm{sep}}})$ et l'action du groupe de Galois absolu est triviale. On suppose en outre que l'anneau de Cox de X (*cf.* [Has04]), noté $\mathrm{Cox}(X)$, est de type fini. Soit $(s_i)_{i\in I}$ une famille finie de sections globales (non constantes) qui engendrent $\mathrm{Cox}(X)$. Pour $i \in I$, soit $\mathcal{D}_i$ le diviseur des zéros de s_i. On note $D_i = [\mathcal{D}_i]$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(X)$. On définit une $\mathrm{Pic}(X)$-graduation sur $k[(s_i)_{i\in I}]$ en posant $\deg(s_i) = D_i$.

Soit $\mathscr{I}_X$ l'idéal $\mathrm{Pic}(X)$-homogène noyau du morphisme naturel $k[s_i] \to \mathrm{Cox}(X)$, de sorte qu'on a un isomorphisme $\mathrm{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[(s_i)]/\mathscr{I}_X$.

Soit X_0 le complémentaire de la réunion des $\mathcal{D}_i$ pour $i \in I$. On a la suite exacte classique

$$0 \longrightarrow k[X_0]^\times/k^\times \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}\,\mathcal{D}_i \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

D'après le lemme de Rosenlicht, $k[X_0]^\times/k^\times$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini.

Notation 1.1
On note N_X le $\mathbf{Z}$-module $k[X_0]^\times/k^\times$.

Dans la suite, on choisit arbitrairement une identification de N_X à un sous-groupe de $k[X_0]^\times$.

Remarque 1.2 : Comme les sections s_i engendrent $\mathrm{Cox}(X)$, le cône effectif de X, noté $C_{\mathrm{eff}}(X)$, est l'image du cône $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{R}_{\geqslant 0}\mathcal{D}_i$. En particulier, il est de type fini. $\square$

Le tore de Néron-Severi $T_{\mathrm{NS}} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(X), \mathbf{G}_m)$ agit naturellement sur $k[s_i]$ via

$$t.s_i = t(D_i).s_i \tag{1.2}$$

et cette action induit une action de T_{NS} sur $\mathrm{Cox}(X)$.

Soit D une classe ample de $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathcal{T}_X$ l'ensemble des points de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ semi-stables vis-à-vis de la T_{NS}-linéarisation sur le fibré trivial de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ donnée par D (vu comme caractère de T_{NS}). C'est un ouvert non vide T_{NS}-stable. La théorie géométrique des invariants permet alors de montrer que le quotient géométrique de $\mathcal{T}_X$ par T_{NS} existe et s'identifie naturellement à X. On montre en outre que $\mathcal{T}_X \to X$ représente l'unique classe de torseurs universels au-dessus de X (*cf.* [Has04, HK00]).

Ainsi, si D est une classe ample de $\mathrm{Pic}(X)$, $\mathcal{T}_X$ est le complémentaire du fermé dont l'idéal est engendré par les éléments de $\mathrm{Cox}(X)$ homogènes de degrés $(m\,D)_{m\geqslant 1}$. En considérant des générateurs monomiaux de cet idéal, on voit que, pour un certain ensemble $\mathcal{I}_X$ de parties de I, $\mathcal{T}_X$ est la réunion des ouverts de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ d'équation

$$\prod_{i\in I'} s_i \neq 0 \tag{1.3}$$

pour I' décrivant $\mathcal{I}_X$. Par ailleurs l'ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ d'équation $\prod_{i\in I} s_i \neq 0$ est un ouvert non vide inclus dans $\mathcal{T}_X$. On le note $\mathcal{T}_{X,0}$. Pour tout $i \in I$, l'image réciproque du support du diviseur $\mathcal{D}_i$ est l'intersection du fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ d'équation $s_i = 0$ avec $\mathcal{T}_X$. En particulier le fermé d'équation $s_i = 0$ rencontre $\mathcal{T}_X$. On a donc

$$\bigcap_{I'\in\mathcal{I}_X} I' = \varnothing. \tag{1.4}$$

On a $X_0 = \mathcal{T}_{X,0}/T_{\mathrm{NS}}$.

Notation 1.3
On note T_{N_X} le tore $\mathrm{Hom}(N_X, \mathbf{G}_m)$. La suite exacte (1.1) induit donc une suite exacte de tores déployés

$$1 \longrightarrow T_{NS} \longrightarrow \mathbf{G}_m^I \xrightarrow{\pi_X} T_{N_X} \longrightarrow 1. \tag{1.5}$$

Notation 1.4
On note $\mathbf{N}_X^I$ *le sous-ensemble de* $\mathbf{N}^I$ *formé des éléments* $\boldsymbol{d}$ *vérifiant*

$$\forall \boldsymbol{n} \in N_X, \quad \sum_{i \in I} n_i \, d_i = 0. \tag{1.6}$$

Remarque 1.5 : D'après la suite exacte (1.1) et la remarque 1.2, $\mathbf{N}_X^I$ s'identifie à l'image dans $\mathbf{Z}^I$ de l'intersection de $C_{\text{eff}}(X)$ avec $\text{Pic}(X)^\vee$. □

1.2 Application à la description du foncteur des points

On se place toujours dans le cadre de la section 1.1, dont on conserve les notations. Nous allons utiliser la description de X comme le quotient géométrique $\mathcal{T}_X/T_{\text{NS}}$ pour expliciter le foncteur des points de X. Le résultat est en fait une généralisation immédiate et naturelle de la description de Cox du foncteur des points d'une variété torique projective et lisse donnée dans [Cox95a].

Définition 1.6
Soit S *un schéma et* $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ *une famille de fibrés en droites sur* S*. Une* N_X-trivialisation *de* $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ *est la donnée d'une famille* $(c_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in N_X}$ *d'isomorphismes*

$$c_{\boldsymbol{n}} \, : \, \bigotimes_i \mathcal{L}_i^{n_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S \tag{1.7}$$

vérifiant la conditions suivante : pour tout $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ *dans* N_X*, on a*

$$c_{\boldsymbol{n}} \otimes c_{\boldsymbol{n}'} = c_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}'}. \tag{1.8}$$

Remarque 1.7 : Deux N_X-trivialisations $(c_{\boldsymbol{n}})$ et $(c'_{\boldsymbol{n}})$ de $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ diffèrent par une unique famille d'isomorphismes $c''_{\boldsymbol{n}} \, : \, \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ vérifiant la condition (1.8), *i.e.* par un morphisme de groupe $N_X \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S)^\times$. En d'autres termes, l'ensemble des N_X-trivialisations de $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ est un espace principal homogène sous l'action du groupe $T_{N_X}(H^0(S, \mathcal{O}_S))$. □

Notation 1.8
Pour tout élément D *de* $\text{Pic}(X)$ *on note*

$$\mathbf{N}_D^I \overset{\text{déf}}{=} \{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I, \quad \sum_i d_i \, D_i = D\}. \tag{1.9}$$

Soit F *un polynôme* $\text{Pic}(X)$*-homogène de* $k[s_i]$*, de degré* D*. Écrivons*

$$F = \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_D^I} \alpha_{\boldsymbol{d}} \prod_{i \in I} s_i^{d_i}. \tag{1.10}$$

Soit S un k-schéma. Soit $(\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ une famille de fibrés en droites sur S munie d'une N_X-trivialisation $(c_{\boldsymbol{n}})$. Pour tout $\boldsymbol{a} = (a_i) \in \mathbf{Z}^I$ tel que $D = \sum_{i\in I} a_i\, D_i$ on pose $\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}} \overset{\text{déf}}{=} \bigotimes_{i\in I} \mathcal{L}_i^{a_i}$. Pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_D^I$ tel que $\alpha_{\boldsymbol{d}} \neq 0$ on a donc $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} \in N_X$. L'isomorphisme $c_{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}}$ induit un isomorphisme

$$\varphi_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}} \,:\, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{L}_i^{d_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}} \tag{1.11}$$

Si $\boldsymbol{a}' = (a_i)$ est tel que $D = \sum_{i\in I} a'_i\, D_i$, alors $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' \in N_X$ et l'isomorphisme $c_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}'}$ induit un isomorphisme

$$\iota_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'} \,:\, \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}'} \tag{1.12}$$

qui grâce à la condition (1.8) vérifie $\iota_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'} \circ \varphi_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}} = \varphi_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}'}$ pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_D^I$.

Ainsi pour toute famille de sections globales (u_i) on a

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}_D^I} \alpha_{\boldsymbol{d}}\, \varphi_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}} \left(\bigotimes_{i\in I} u_i^{\otimes d_i} \right) = 0 \tag{1.13}$$

si et seulement si

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}_D^I} \alpha_{\boldsymbol{d}}\, \varphi_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}'} \left(\bigotimes_{i\in I} u_i^{\otimes d_i} \right) = 0. \tag{1.14}$$

La condition (1.13) sera alors notée

$$F(u_i) = 0. \tag{1.15}$$

On omet donc dans cette notation la référence à la N_X-trivialisation (qui dans la suite sera toujours clairement indiquée par le contexte).

Définition 1.9
*Soit S un k-schéma. Une X-*collection sur *S est la donnée pour tout $i \in I$ d'un fibré en droites $\mathcal{L}_i$ sur S et d'une section globale u_i de $\mathcal{L}_i$, ainsi que d'une N_X-trivialisation $(c_{\boldsymbol{n}})$ de $(\mathcal{L}_i)$, ces données étant astreintes à vérifier les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $i \in I$, la section u_i induit un morphisme $\mathcal{O}_S \to \mathcal{L}_i$ et par dualité un morphisme $\mathcal{L}_i^{-1} \to \mathcal{O}_S$. On demande que le morphisme induit*

$$\bigoplus_{I'\in\mathcal{I}_X} \bigotimes_{i\in I'} \mathcal{L}_i^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_S \tag{1.16}$$

   soit surjectif.

2. Pour tout élément homogène F de $\mathscr{I}_X$, on a

$$F(u_i) = 0. \tag{1.17}$$

Un isomorphisme entre deux X-collections $((\mathcal{L}_i, u_i), (c_{\boldsymbol{n}}))$ et $((\mathcal{L}'_i, u'_i), (c'_{\boldsymbol{n}}))$ est une famille d'isomorphismes $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_i$ envoyant u_i sur u'_i et $c_{\boldsymbol{n}}$ sur $c'_{\boldsymbol{n}}$.

On note $\mathcal{C}_X(S)$ l'ensemble des X-collections sur S modulo isomorphisme.
Remarque 1.10 : Il existe sur X une X-collection universelle : on prend $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$ et u_i la section canonique de $\mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$. La N_X-trivialisation $(c_{\boldsymbol{n}})$ est donnée par la suite exacte (1.1) (elle dépend du choix de l'identification $N_X \subset k[X_0]^\times$). Si $\pi : S \to X$ est un k-morphisme, $((\pi^*\mathcal{O}(\mathcal{D}_i), \pi^* u_i), (\pi^* c_{\boldsymbol{n}}))$ est une X-collection sur S. On obtient ainsi une application fonctorielle en S

$$\mathrm{Hom}_k(S, X) \longrightarrow \mathcal{C}_X(S). \tag{1.18}$$

□

Théorème 1.11
L'application (1.18) *induit une bijection de* $\mathrm{Hom}_k(S, X)$ *sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de X-collections sur S. Ainsi X représente le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de X-collections sur S.*

La démonstration est une adaptation immédiate de la démonstration du théorème principal de [Cox95a]. Indiquons juste de manière informelle comment est construit le morphisme $S \to X$ correspondant à la X-collection $((\mathcal{L}_i, u_i), (c_{\boldsymbol{n}}))$: le morphisme en question associe à $s \in S$ le « point de coordonnées homogènes $(u_i(s))$ ». La suite exacte (1.1) montre que le I-uple $(u_i(s))$ est bien défini modulo l'action de T_{NS}. Les conditions 1 et 2 de la définition 1.9 assurent que $(u_i(s))$ est dans $\mathcal{T}_X$.

On note $\mathrm{Hom}_{k,X_0}(S, X)$ l'ensemble des k-morphismes de S vers X dont l'image schématique rencontre l'ouvert X_0.

Définition 1.12
Soit S un k-schéma. Une X-collection sur S $((\mathcal{L}_i, u_i), (c_n))$ est dite non dégénérée *si les sections u_i sont toutes non nulles.*

Compte tenu du fait qu'on a $X_0 = \mathcal{T}_{X,0}/T_{\mathrm{NS}}$ où $\mathcal{T}_{X,0}$ est l'ouvert d'équation $\prod s_i \neq 0$, une adaptation immédiate de la démonstration du théorème 1.11 permet également de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.13
L'application (1.18) *induit une bijection de* $\mathrm{Hom}_{k,X_0}(S, X)$ *sur l'ensemble des X-collections sur S non dégénérées modulo ismorphisme.*

1.3 Description des morphismes de $\mathscr{C}$ vers X : montée au torseur universel

On se place toujours dans le cadre de la section 1.1. Soit $\mathscr{C}$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k. On note g son genre. Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_X^I$, on cherche à décrire l'ensemble des k-morphismes de $\mathscr{C}$ vers X dont l'image rencontre X_0 et tels qu'on ait

$$\forall i \in I, \quad \deg f^*(D_i) = d_i. \tag{1.19}$$

On va montrer que cet ensemble se décrit bien en termes des données définissant le torseur universel au dessus de X.

On suppose pour simplifier que $\mathscr{C}$ admet un diviseur de degré 1 (ce qui sera de toute façon vérifié pour l'application que nous avons en vue, le corps k étant alors fini).

Notations 1.14
On fixe *un diviseur de degré* 1 *sur* $\mathscr{C}$*, noté* $\mathfrak{D}_1$*. On* fixe *également un sous-ensemble* $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})$ *de* $\mathrm{Div}^0(\mathscr{C})$ *de représentants de* $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})$*.*

On note $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})_X^I$ *le sous-ensemble de* $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I$ *formé des éléments* $(\mathfrak{E}_i)$ *vérifiant*

$$\forall n \in N_X, \quad \sum_{i \in I} n_i \, \mathfrak{E}_i \sim 0. \tag{1.20}$$

Remarque 1.15 : L'image de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})_X^I$ dans $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^I$ s'identifie donc au sous-groupe $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C}) \otimes N_X$. □

Notations 1.16
Pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})_X^I$*, on* fixe *une* N_X*-trivialisation* $c_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}}$ *de la famille* $(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i))$*. Pour tout* $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_X^I$*, ceci induit une* N_X*-trivialisation naturelle* $c_{\boldsymbol{\mathfrak{E}},\boldsymbol{d}}$ *de la famille* $(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i \mathfrak{D}_1))$*. Par la suite, sauf mention explicite du contraire, la famille* $(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i \mathfrak{D}_1))$ *sera toujours munie de cette trivialisation.*

Pour tout $\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})$*, et tout* $d \in \mathbf{N}$ *on note*

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{E},d} = H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E} + d\,\mathfrak{D}_1)) \tag{1.21}$$

et

$$\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E},d} = \mathcal{H}_{\mathfrak{E},d} \setminus \{0\}. \tag{1.22}$$

Le lemme suivant est une conséquence classique du théorème de Riemann-Roch et nous sera très utile lors de la démonstration du résultat principal de cet article.

Lemme 1.17

1. *Si $d \geqslant 2\,g-1$, la dimension du k-espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathfrak{D},d}$ est $1-g+d$.*
2. *La dimension du k-espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathfrak{D},d}$ est majorée par $1+d$.*

Notations 1.18
On note pour tout $\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I$, et tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I$

$$\mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i\in I} \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_i,d_i}. \tag{1.23}$$

On note

$$\mathcal{H}^\bullet_{I,X,equiv} \overset{\text{déf}}{=} \bigsqcup_{\substack{\mathfrak{E}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_X,\\ \boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I_X}} \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}. \tag{1.24}$$

Notations 1.19
On note $\mathscr{C}^{(0)}$ l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}$ et $\mathrm{Div}_{\mathit{eff}}(\mathscr{C})$ le monoïde des diviseurs effectifs de $\mathscr{C}$, i.e. le monoïde abélien libre de base $\mathscr{C}^{(0)}$.

Pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$ et $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathit{eff}}(\mathscr{C})$, on note $v(\mathcal{D})$ la multiplicité de $\mathcal{D}$ en v.

Pour toute famille $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de diviseurs effectifs de $\mathscr{C}$, on note

$$\mathrm{pgcd}\left((\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\in A}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \operatorname*{Min}_{\alpha\in A}\left(v(\mathcal{D}_\alpha)\right) v. \tag{1.25}$$

On pose

$$\mathrm{Div}_{I,X,prim} \overset{\text{déf}}{=} \{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathit{eff}}(\mathscr{C})^I, \quad \operatorname*{pgcd}_{I'\in\mathcal{I}_X}\left(\sum_{i\in I'} \mathcal{E}_i\right) = 0\} \tag{1.26}$$

et

$$\mathcal{H}^\bullet_{I,X,prim} \overset{\text{déf}}{=} \{(s_i) \in \bigsqcup_{\substack{\mathfrak{E}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I,\\ \boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I}} \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}, \quad (\mathrm{div}(s_i)) \in \mathrm{Div}_{I,X,prim}\}. \tag{1.27}$$

Pour tout $\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_X$ et tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I_X$, l'action diagonale naturelle de $T_{\mathrm{NS}}(k)$ sur $\mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}$ préserve le sous-ensemble (*cf.* notations 1.8)

$$\{(s_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}} \cap \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{prim}}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}}, \quad F(s_i) = 0\}, \tag{1.28}$$

où $\mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}}$ désigne l'ensemble des éléments homogènes de l'idéal $\mathscr{I}_X$.

Proposition 1.20
Soit $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_X^I$. On a une bijection entre :

1. *les k-morphismes de $\mathscr{C}$ vers X dont l'image rencontre X_0 et vérifiant*

$$\forall i \in I, \quad \deg f^*(\mathcal{D}_i) = d_i \quad ; \tag{1.29}$$

2. *la réunion des ensembles quotients*

$$\{(u_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},d} \cap \mathcal{H}^\bullet_{I,X,prim}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_{X,homog}, \quad F(s_i) = 0\}/T_{NS}(k) \tag{1.30}$$

pour $\mathfrak{E}$ parcourant $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})_X^I$.

Démonstration : À tout élément de l'ensemble

$$\{(u_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E},d} \cap \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{prim}}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}}, \quad F(s_i) = 0\} \tag{1.31}$$

on associe la X-collection non degénérée

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), u_i), c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}) \tag{1.32}$$

(le fait que (u_i) soit dans $\mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{prim}}$ signifie exactement que la condition 1 de la définition 1.9 est satisfaite).

On va montrer que ceci induit une bijection de l'ensemble décrit dans le point 2 de l'énoncé de la proposition sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de X-collections non dégénérées $((\mathcal{L}_i, u_i), (c_{\boldsymbol{n}}))$ sur $\mathscr{C}$ vérifiant $\deg(\mathcal{L}_i) = d_i$, ce qui donnera le résultat d'après le théorème 1.13.

Toute telle classe d'isomorphisme contient un élément de la forme

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\mathcal{D}_1), u_i), t.c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}), \tag{1.33}$$

où $(\mathfrak{E}_i) \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})_X^I$, $u_i \in \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_i,d_i}$, et (*cf.* la remarque 1.7) t est un élément de $T_{N_X}(H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}})) = T_{N_X}(k)$.

Deux X-collections

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), u_i), t.c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}) \tag{1.34}$$

et

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), u_i'), t'.c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}) \tag{1.35}$$

sont isomorphes si et seulement s'il existe un élément $(\lambda_i) \in (k^\times)^I = \mathbf{G}_m^I(k)$ tel que $u_i' = \lambda_i\, u_i$ et $t' = \pi_X(\lambda_i)\, t$ (*cf.* notation 1.3).

Ainsi dans toute classe d'isomorphisme, on peut trouver un élément de la forme $(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), (u_i), c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}})$. Par ailleurs les X-collections

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), u_i), c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}) \tag{1.36}$$

et

$$((\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{E}_i + d_i\,\mathfrak{D}_1), u'_i), c_{\mathfrak{E},\boldsymbol{d}}) \tag{1.37}$$

sont isomorphes si et seulement s'il existe un élément $(\lambda_i) \in \mathbf{G}_m^I(k)$ tel que $u_i = \lambda_i\, u'_i$ et $\pi_X(\lambda_i) = 1$, *i.e.* d'après (1.5) si et seulement s'il existe un élément $(\lambda_i) \in T_{\mathrm{NS}}(k)$ tel que $u_i = \lambda_i\, u'_i$. Ceci montre le résultat. □

1.4 Inversion de Möbius

On se place toujours dans le cadre de la section 1.3. Afin de se « débarasser » de la condition $(s_i) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{I,X,\mathrm{prim}}$ apparaissant dans la proposition 1.20, il est classique d'utiliser une inversion de Möbius.

Proposition 1.21
Il existe une unique fonction $\mu_X : \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \longrightarrow \mathbf{C}$ *vérifiant*

$$\forall\, \mathfrak{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I, \quad \mathbf{1}_{\mathrm{Div}_{I,X,prim}}(\mathfrak{D}) = \sum_{0 \leqslant \mathcal{E}_i \leqslant \mathcal{D}_i} \mu_X(\mathfrak{E}) \tag{1.38}$$

Cette fonction vérifie en outre les propriétés suivantes :

1. *elle est multiplicative, c'est-à-dire que si* $\mathfrak{E}$ *et* $\mathfrak{D}$ *vérifient*

$$\forall i \in I, \quad \mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i) = 0 \tag{1.39}$$

   alors on a

$$\mu_X(\mathfrak{D} + \mathfrak{E}) = \mu_X(\mathfrak{D})\, \mu_X(\mathfrak{E}) \quad ; \tag{1.40}$$

2. *pour tout* $v \in \mathscr{C}^{(0)}$ *et tout* $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^I$, $\mu_X(\,(n_i\, v)\,)$ *ne dépend que de* $\boldsymbol{n}$ *(et pas de* v*) ; on note* $\mu_X^0(\boldsymbol{n})$ *cette valeur. On a* $\mu_X^0(\boldsymbol{n}) = 0$ *s'il existe* i *tel que* $n_i \geqslant 2$ *ou si* $\sum n_i = 1$.

Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 1 de [Bou03]. Notons que la dernière assertion découle aussitôt du fait que si $\sum n_i = 1$ alors $((n_i\, v))$ est dans $\mathrm{Div}_{I,X,\mathrm{prim}}$ ce qui provient de (1.4). □
Remarque 1.22 : Notons $\{0,1\}_X^I$ l'ensemble des éléments $(n_i) \in \{0,1\}^I$ vérifiant

$$\operatorname*{Min}_{I' \in \mathcal{I}_X} \sum_{i \in I'} n_i = 0 \tag{1.41}$$

On a alors

$$\forall \boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I, \quad \mathbf{1}_{\{0,1\}_X^I}(\boldsymbol{n}) = \sum_{0 \leqslant \boldsymbol{m} \leqslant \boldsymbol{n}} \mu_X^0(\boldsymbol{m}). \tag{1.42}$$

En particulier, si $\boldsymbol{n} \in \{0,1\}_X^I \setminus \{0\}$, on a $\mu_X^0(\boldsymbol{n}) = 0$. □

Notation 1.23
Si A est un ensemble, $\boldsymbol{n}$ un élément de $\{0,1\}^A$ et L un corps, on pose

$$L^{\boldsymbol{n}} \overset{\text{déf}}{=} \{(x_\alpha) \in L^A, \quad \forall \alpha \in A, \quad x_\alpha = 0 \ \ si \ \ n_\alpha = 1\}. \tag{1.43}$$

On suppose à présent que k est un corps fini de cardinal q. Pour $v \in \mathscr{C}^{(0)}$, on note f_v le degré de v et κ_v le corps résiduel, de sorte que $\#\kappa_v = q^{f_v} \overset{\text{déf}}{=} q_v$.

Notation 1.24
Pour $\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I$, on pose

$$\mathrm{dens}_{X,v}(\boldsymbol{n}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\#\{(x_i) \in \kappa_v^{\boldsymbol{n}}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_X, \quad F(x_i) = 0\}}{q_v^{\dim(\mathcal{T}_X)}}. \tag{1.44}$$

Lemme 1.25
On a la relation

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I} \mu_X^0(\boldsymbol{n}) \ \mathrm{dens}_{X,v}(\boldsymbol{n}) = (1 - q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}})} \frac{\#X(\kappa_v)}{q_v^{\dim(X)}}. \tag{1.45}$$

Démonstration : On a

$$\forall (x_i) \in \kappa_v^I, \left(\exists I' \in \mathcal{I}_X, \prod_{i \in I'} x_i \neq 0 \Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{n} \notin \{0,1\}_X^I, \quad (x_i) \notin \kappa_v^{\boldsymbol{n}} \right) \tag{1.46}$$

On en déduit l'égalité

$$\mathcal{T}_X(k_v) = \left\{(x_i) \in \kappa_v^I, \quad \forall \boldsymbol{n} \notin \{0,1\}_I^X, \ (x_i) \notin \kappa_v^{\boldsymbol{n}}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_X, \ F(x_i) = 0\right\} \tag{1.47}$$

Ainsi, d'après (1.42), on a

$$\mathbf{1}_{\mathcal{T}_X(k_v)} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I} \mu^0(\boldsymbol{n}) \, \mathbf{1}_{\{(x_i) \in k_v^{\boldsymbol{n}}, \quad \forall F \in \mathscr{I}_X, \, F(x_i) = 0\}}. \tag{1.48}$$

On en tire

$$\frac{\#\mathcal{T}_X(\kappa_v)}{q_v^{\dim(\mathcal{T}_X)}} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I} \mu^0(\boldsymbol{n}) \ \mathrm{dens}_{X,v}(\boldsymbol{n}) \tag{1.49}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que comme X est le quotient géométrique $\mathcal{T}_X / T_{\mathrm{NS}}$ et T_{NS} est déployé on a

$$\#X(\kappa_v) = \frac{\#\mathcal{T}_X(\kappa_v)}{(q_v - 1)^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}})}} \tag{1.50}$$

et $\dim(\mathcal{T}_X) = \mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}}) + \dim(X)$. □

1.5 Conjectures de Manin

On se place toujours dans le cadre de la section 1.3. On suppose désormais pour tout le reste de l'article que le corps de base k est fini de cardinal q. On note

$$Z_{\mathscr{C}}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})} T^{\deg(\mathcal{D})} \tag{1.51}$$

la fonction zêta de Dedekind de la courbe $\mathscr{C}$.

Soit D un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ situé à l'intérieur du cône effectif. Pour tout ouvert U de X, on note, pour $d \geqslant 0$, $N_{D,U}(d)$ le cardinal de l'ensemble des k-morphismes $f : \mathscr{C} \to X$ dont l'image recontre U et qui vérifient

$$\deg f^*(D) = d. \tag{1.52}$$

Ce cardinal est fini si U est assez petit (et toujours fini si D est ample par exemple).

Les conjectures de Manin tentent alors de prédire le comportement asymptotique de $N_{D,U}(d)$ lorsque d tend vers l'infini. Nous énonçons une version possible de cette conjecture dans le cas où D est la classe du fibré anticanonique.

Pour cela, on définit, suivant Peyre, les constantes

$$\alpha(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{T \to 1} (1-T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} \sum_{y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \cap \mathrm{Pic}(X)^\vee} T^{\langle y \,,\, [\omega_X^{-1}] \rangle} \tag{1.53}$$

et

$$\gamma(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\lim_{T \to q^{-1}} (1 - q\,T)\, Z_{\mathscr{C}}(T) \right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} q^{(1-g)\,\dim(X)} \prod_{v \in \mathscr{C}^{(0)}} (1 - q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} \frac{\# X(\kappa_v)}{q_v^{\dim(X)}} \tag{1.54}$$

Nous renvoyons à [Pey03] pour la justification du fait que ces constantes sont bien définies. L'argument de loin le plus délicat concerne la convergence du produit eulérien figurant dans la définition de $\gamma(X)$, pour lequel on invoque les conjectures de Weil démontrées par Deligne. Il est à noter que dans tous les cas où la conjecture de Manin a été établie, la convergence peut être démontrée directement, sans faire appel à un résultat aussi fin.

Question 1.26
Soit

$$\delta = \mathrm{Max}\{d \in \mathbf{N}_{>0}, \quad \frac{1}{d} \left[\omega_X^{-1}\right] \in \mathrm{Pic}(X)\}. \tag{1.55}$$

A-t-on, pour tout ouvert U de X assez petit,

$$N_{\omega_X^{-1},U}(\delta\, d) \underset{d \to +\infty}{\sim} \alpha(X)\, \gamma(X)\, d^{\,\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1} q^{\delta\, d} \quad ? \tag{1.56}$$

Une stratégie classique pour l'étude asymptotique de $N_{D,U}(d)$ est d'essayer de préciser le comportement analytique de la fonction zêta des hauteurs associée, *i.e.* la série génératrice

$$Z_{D,U}(T) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{d \geqslant 0} N_{D,U}(d)\, T^d. \tag{1.57}$$

Dans cette optique, rappelons d'abord deux énoncés taubériens élémentaires, conséquences directes des estimations de Cauchy.

Proposition 1.27
Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $k \geqslant 1$ un entier. On suppose que la série $\sum a_n\, z^n$ a pour rayon de convergence $|\alpha|$ et que sa somme se prolonge en une fonction $f(z)$ méromorphe sur un disque de rayon strictement supérieur à $|\alpha|$, ayant en α un pôle d'ordre k et des pôles d'ordre au plus $k-1$ en tout autre point du cercle de rayon $|\alpha|$. Alors on a

$$a_n = (\lim_{z \to \alpha} (z-\alpha)^k\, f(z))\, n^{k-1}\, \alpha^{-n} + \underset{n \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(n^{k-2}\, |\alpha|^{-n}\right). \tag{1.58}$$

Définition 1.28
On dit que la série $\sum a_n\, z^n$ (à coefficients complexes) est majorée par par la série $\sum b_n\, z^n$ (à coefficients réels positifs) si on a $|a_n| \leqslant b_n$ pour tout n.

Proposition 1.29
Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $k \geqslant 1$ un entier et $\rho > 0$ un réel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *on a*
$$a_n = \underset{n \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(n^{k-1}\, \rho^{-n}\right); \tag{1.59}$$
2. *la série $\sum a_n z^n$ est majorée par une série dont le rayon de convergence est supérieur à ρ et dont la somme se prolonge en une fonction méromorphe sur un disque de rayon strictement supérieur à ρ, ayant des pôles d'ordre au plus k sur le cercle de rayon ρ.*

Définition 1.30
On dit que $\sum a_n z^n$ est ρ-contrôlée à l'ordre k si elle vérifie les conditions de la proposition 1.29.

Dans le cas où $D = \left[\omega_X^{-1}\right]$ on peut énoncer la variante analytique suivante de la question 1.26.

Question 1.31
On conserve les notations de la question 1.26. On note $\widetilde{Z}_{\omega_X^{-1},U}(T)$ la série telle que $\widetilde{Z}_{\omega_X^{-1},U}(T^\delta) = Z_{\omega_X^{-1},U}(T)$. Est-il vrai que si U est assez petit, la série

$\widetilde{Z}_{\omega_X^{-1},U}(T)$ a pour rayon de convergence $q^{-\delta}$ et que sa somme se prolonge en une fonction méromorphe sur le disque $|z| < q^{-\delta+\varepsilon}$ ayant un pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))$ en $z = q^{-\delta}$, et des pôles d'ordre au plus $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1$ en tout autre point du cercle de rayon $q^{-\delta}$, et vérifiant

$$\lim_{T \to q^{-\delta}} \left(T - q^{-\delta}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} \widetilde{Z}_{\omega_X^{-1},U}(T) = \alpha(X)\,\gamma(X) \tag{1.60}$$

Si la question 1.26 admet une réponse positive, alors d'après la proposition 1.27 la question 1.31 admet une réponse positive.

1.6 Relèvement au torseur universel pour la fonction zêta des hauteurs

On considère toujours un élément D de $\mathrm{Pic}(X)$ situé à l'intérieur du cône effectif. Nous nous plaçons à présent dans le cas où $U = X_0$ et expliquons comment s'exprime au niveau de la fonction zêta des hauteurs la montée au torseur universel (donnée par la proposition 1.20) du décompte des morphismes de degré borné.

Soit $(n_{i,D}) \in \mathbf{N}_{>0}^I$ tel que $D = \sum_i n_{i,D}\,[\mathcal{D}_i]$. Nous avons d'après les propositions 1.20 et 1.21

$$(q-1)^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}})}\, Z_{D,X_0}(T) = \sum_{\substack{(s_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{equiv}} \cap \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{prim}} \\ \forall F \in \mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}},\quad F(s_i)=0}} T^{\sum_i n_{i,D} \deg(s_i)} \tag{1.61}$$

$$= \sum_{\substack{(s_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{equiv}} \\ \forall F \in \mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}},\quad F(s_i)=0}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \mathcal{E}_i \leqslant \mathrm{div}(s_i)}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \right) T^{\sum_i n_{i,D} \deg(s_i)} \tag{1.62}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \left(\sum_{\substack{(s_i) \in \mathcal{H}^\bullet_{I,X,\mathrm{equiv}} \\ \mathrm{div}(s_i) \geqslant \mathcal{E}_i \\ \forall F \in \mathscr{I}_{X,\mathrm{homog}},\quad F(s_i)=0}} T^{\sum_i n_{i,D} \deg(s_i)} \right). \tag{1.63}$$

Notation 1.32
Pour tout élément $\mathcal{E} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$, on note $s_{\mathcal{E}}$ la section canonique de $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{E})$.

Notations 1.33
Soit $\mathfrak{E} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I$. *On note* $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_{X,\mathfrak{E}}$ *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I$ *vérifiant*

$$\mathfrak{E} + (\mathcal{E}_i - \deg(\mathcal{E}_i)\,\mathfrak{D}_1) \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_X. \tag{1.64}$$

Remarquons que le morphisme « classe dans le groupe de Picard » induit une bijection de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_{X,\mathfrak{E}}$ *sur le sous-ensemble de* $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^I$ *donné par*

$$-([\mathcal{E}_i] - \deg(\mathcal{E}_i)\ [\mathfrak{D}_1]) + \mathrm{Pic}^0(\mathscr{C}) \otimes N_X. \tag{1.65}$$

Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I_X$ *vérifiant* $d_i \geqslant \deg(\mathcal{E}_i)$, *et* $\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I$, *on note* $\mathcal{N}_X(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ *le cardinal de l'ensemble des éléments*

$$(s_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i - \deg(\mathcal{E}_i)} \tag{1.66}$$

vérifiant

$$\forall F \in \mathscr{I}_{X,homog}, \quad F(s_i.s_{\mathcal{E}_i}) = 0. \tag{1.67}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
&(q-1)^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}})}\, Z_{D,X_0}(T) \\
&= \sum_{\mathfrak{E} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I} \mu_X(\mathfrak{E}) \sum_{\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_{X,\mathfrak{E}}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I_X, \\ d_i \geqslant \deg(\mathcal{E}_i)}} \mathcal{N}_X(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E})\, T^{\sum_i n_{i,D} d_i} \right)
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Remarque 1.34 : La remarque 1.5 permet de réécrire l'égalité (1.68) en termes du cône effectif de X, *i.e.* sous la forme

$$\begin{aligned}
&(q-1)^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}})}\, Z_{D,X_0}(T) \\
&= \sum_{\mathfrak{E} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I} \mu_X(\mathfrak{E}) \sum_{\mathfrak{E} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^I_{X,\mathfrak{E}}} \left(\sum_{\substack{y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\, D_i \rangle \geqslant \deg(\mathcal{E}_i)}} \mathcal{N}_X((\langle y\,,\, D_i \rangle), \mathfrak{E}, \mathfrak{E})\, T^{\langle y\,,\, D \rangle} \right).
\end{aligned} \tag{1.69}$$

□

Comme dans le cadre des corps de nombres, cette montée au torseur universel ne constitue qu'une première étape dans une éventuelle démonstration de la conjecture de Manin pour X. La tâche difficile consiste à évaluer de manière suffisamment précise le comportement asymptotique de la quantité

$\mathcal{N}_X(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$. Comme déjà indiqué dans l'introduction, le cas le plus favorable à cet égard est celui où X est torique, car l'idéal $\mathscr{I}_X$ est alors nul : il n'y a pas d'équation à prendre en compte. Dans la suite de cet article, nous expliquons comment traiter le cas du plan projectif éclaté en trois points alignés, cas où le torseur universel est donné par une unique équation, qui plus est particulièrement simple.

2 Le cas du plan projectif éclaté en 3 points alignés

2.1 Description du torseur universel au-dessus du plan éclaté en 3 points alignés

Soit p_1, p_2, p_3 trois points alignés du plan projectif et S la surface obtenue en éclatant ces trois points. Soit p_0 un point du plan projectif qui n'est pas sur la droite $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$. On note $(\mathcal{E}_i)_{i=1,2,3}$ les diviseurs exceptionnels de l'éclatement, $\mathcal{E}_0$ le transformé strict de la droite $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ et $(\mathcal{F}_i)_{i=1,2,3}$ les transformés stricts de droites $\langle p_i, p_0 \rangle$.

D'après [Der06] (*cf.* également [Has04]), on peut trouver des sections globales s_i (respectivement t_i) de diviseur $\mathcal{E}_i$ (respectivement $\mathcal{F}_i$) tel qu'on ait un isomorphisme

$$\mathrm{Cox}(S) \xrightarrow{\sim} k[(s_i)_{i=0,\ldots,3}, (t_i)_{i=1,2,3}] / \sum_{i=1}^{3} s_i\, t_i \tag{2.1}$$

On a

$$\mathrm{Pic}(S) = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant 3} \mathbf{Z}\, [\mathcal{E}_i] \tag{2.2}$$

et pour $i = 1, 2, 3$

$$[\mathcal{F}_i] = \sum_{j=0, j \neq i}^{3} [\mathcal{E}_i]\,. \tag{2.3}$$

La classe du fibré anticanonique est

$$\left[\omega_S^{-1}\right] = 3\, [\mathcal{E}_0] + 2 \sum_{i=1}^{3} [\mathcal{E}_i]\,. \tag{2.4}$$

On vérifie alors que $\mathcal{T}_S \subset \mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(S))$ est la réunion des ouverts d'équa-

tions

$$s_1\, s_2\, t_1\, t_2\, t_3 \neq 0, \tag{2.5}$$
$$s_2\, s_3\, t_1\, t_2\, t_3 \neq 0, \tag{2.6}$$
$$s_1\, s_3\, t_1\, t_2\, t_3 \neq 0, \tag{2.7}$$
$$s_0\, s_1\, s_2\, t_1\, t_2 \neq 0, \tag{2.8}$$
$$s_0\, s_1\, s_3\, t_1\, t_3 \neq 0, \tag{2.9}$$
$$s_0\, s_2\, s_3\, t_2\, t_3 \neq 0, \tag{2.10}$$
$$\text{et} \quad s_0\, s_1\, s_2\, s_3 \neq 0. \tag{2.11}$$

Remarque 2.1 : On a d'après ce qui précède

$$\sum_{y \in \mathrm{Pic}(S)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(S)^\vee} T^{\langle y\,,\,[\omega_S^{-1}]\rangle} = \frac{1}{(1-T^3)\,(1-T^2)^3}. \tag{2.12}$$

□

Remarque 2.2 : D'après ce qui précède, l'application

$$(d_0, d_1, d_2, d_3) \longrightarrow (d_0, d_1, d_2, d_3, d_0+d_1+d_3, d_0+d_2+d_3, d_0+d_1+d_2) \tag{2.13}$$

est une bijection de $\mathbf{N}^4$ sur $\mathbf{N}_S^7$ (*cf.* la notation 1.4). Par la suite, on identifiera toujours $\mathbf{N}_S^7$ à $\mathbf{N}^4$ au moyen de cette bijection.

De même, pour tout $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_0, (\mathcal{E}_i), (\mathcal{F}_i)) \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$, l'application qui à $(D_0, D_1, D_2, D_3) \in \mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^4$ associe

$$\left(D_0, (D_i), \left(D_0 + [\mathcal{E}_0] - \deg(\mathcal{E}_0)\,[\mathfrak{D}_1] + \sum_{j \neq i} (D_i + [\mathcal{E}_i] - \deg(\mathcal{E}_i)\,[\mathfrak{D}_1]) - [\mathcal{F}_i] + \deg(\mathcal{F}_i)\ [\mathfrak{D}_1]\right)\right) \tag{2.14}$$

est une bijection de $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^4$ sur le sous-ensemble de $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^7$ donné par

$$-\Big(\mathcal{E}_0 - \deg(\mathcal{E}_0)\ [\mathfrak{D}_1]\,, (\mathcal{E}_i - \deg(\mathcal{E}_i)\ [\mathfrak{D}_1]), (\mathcal{F}_i - \deg(\mathcal{F}_i)\ [\mathfrak{D}_1])\Big) + \mathrm{Pic}^0(\mathscr{C}) \otimes N_S. \tag{2.15}$$

Ainsi (*cf.* la notation 1.33 et la remarque y figurant) l'application

$$(\mathfrak{E}_0, (\mathfrak{E}_i), (\mathfrak{F}_i)) \mapsto (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3) \tag{2.16}$$

composée avec le morphisme « classe dans le groupe de Picard » induit une bijection de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ sur $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{C})^4$. □

2.2 Le résultat

Théorème 2.3

Soit p_1, p_2, p_3 trois points alignés du plan projectif et S la surface obtenue en éclatant ces trois points. Soit p_0 un point du plan projectif qui n'est pas sur la droite $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$. Soit S_0 l'ouvert de S obtenu en retirant les diviseurs exceptionnels de l'éclatement, et les transformés stricts des droites $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$, et $\langle p_i, p_0\rangle$ pour $i = 1, 2, 3$.

On a alors une écriture

$$Z_{\omega_S^{-1},S_0}(T) = Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3)\,Z_{\mathscr{C}}(q\,T^2)^3\widetilde{Z}(T) + Z_{\mathrm{err}}(T) \tag{2.17}$$

où $\widetilde{Z}(T)$ est une série de rayon de convergence strictement supérieure à q^{-1} vérifiant

$$\widetilde{Z}(q^{-1}) = q^{2(1-g)} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} (1 - q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(S))}\,\frac{\#S(\kappa_v)}{q_v^{\dim(S)}} \tag{2.18}$$

et $Z_{err}(T)$ est une série q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2.

La démonstration de ce théorème fait l'objet du reste de cet article.

Corollaire 2.4

On a

$$N_{\omega_S^{-1},S_0}(d) = \alpha(S)\,\gamma(S)\,d^{\,\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(S))-1}q^{\,d} + \underset{d\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(d^{\,\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(S))-2}\,q^{\,d}\right). \tag{2.19}$$

En particulier, la réponse à la question 1.26 est positive pour l'ouvert $U = S_0$.

Démonstration : Notons qu'on a ici $\delta = 1$. Compte tenu du théorème 2.3 et des propositions 1.27 et 1.29, il suffit de montrer qu'on a

$$\lim_{T\to q^{-1}} \left(T - q^{-1}\right)^4 Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3)\,Z_{\mathscr{C}}(q\,T^2)^3 = \alpha(S)\,\left(\lim_{T\to q^{-1}}(1 - q\,T)\,Z_{\mathscr{C}}(T)\right)^4 \tag{2.20}$$

ce qui est immédiat au vu de la remarque 2.1. □

2.3 Démonstration du résultat principal : préliminaires

Rappelons (*cf.* la remarque 2.2) que l'on a identifié $\mathbf{N}_S^7$ à $\mathbf{N}^4$. Ainsi, en reprenant la notation 1.18, pour $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_0, (\mathcal{E}_i), (\mathcal{F}_i)) \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$, $\boldsymbol{\mathfrak{E}} = (\mathfrak{E}_0, (\mathfrak{E}_i), (\mathfrak{F}_i)) \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, et $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4$, $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ désigne le cardinal de l'ensemble des éléments

$$(s_0, (s_i), (t_i)) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0, d_0 - \deg(\mathcal{E}_0)} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i - \deg(\mathcal{E}_i)} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{F}_i, d_0 + \sum_{j\neq i} d_j - \deg(\mathcal{F}_i)} \tag{2.21}$$

vérifiant la relation

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant 3} s_i\, t_i\, s_{\mathcal{E}_i}\, s_{\mathcal{F}_i} = 0. \tag{2.22}$$

On pose

$$Z(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{d_0 \geqslant \deg(\mathcal{E}_0)\\ d_i \geqslant \deg(\mathcal{E}_i)\\ d_0 + \sum_{j\neq i} d_j \geqslant \deg(\mathcal{F}_i)}} \mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})\, T^{3\, d_0 + 2\sum_i d_i}. \tag{2.23}$$

D'après les sections 1.6 et 2.1, la fonction zêta des hauteurs $Z_{\omega_S^{-1}, S_0}(T)$ s'écrit alors

$$\frac{1}{(q-1)^4} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T). \tag{2.24}$$

On pose pour $1 \leqslant i \leqslant 3$

$$\psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \overset{\text{déf}}{=} d_0 + \sum_{j\neq i} d_j + \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_{j\neq i} \deg(\mathcal{E}_j) - \deg(\mathcal{F}_i). \tag{2.25}$$

Afin d'alléger un peu l'écriture, on change légèrement les notations : on désigne désormais par $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ le cardinal de l'ensemble des éléments

$$(s_0, (s_i), (t_i)) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0, d_0} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{F}_i, d_0 + \sum_{j\neq i} d_j + \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_{j\neq i} \deg(\mathcal{E}_j) - \deg(\mathcal{F}_i)} \tag{2.26}$$

vérifiant la relation $\sum_i s_i\, t_i\, s_{\mathcal{E}_i}\, s_{\mathcal{F}_i} = 0$.

Un changement de variables immédiat dans l'expression (2.23) permet donc d'écrire $Z(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ sous la forme

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0) + 2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4\\ \forall 1 \leqslant i \leqslant 3,\quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0}} \mathcal{N}_S\left(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}\right) T^{3\, d_0 + 2\sum_i d_i} \tag{2.27}$$

On définit

$$\phi_1(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \overset{\text{déf}}{=} d_0 + d_1 + \deg(\mathcal{E}_0) + \deg(\mathcal{E}_1) - \deg(\mathcal{F}_2) - \deg(\mathcal{F}_3) \tag{2.28}$$

et ϕ_2, ϕ_3 de manière analogue en permutant de manière circulaire les indices 1, 2 et 3.

Soit $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ et $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. Soit $Z_0(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ la série définie par la formule (2.27) en restreignant le domaine de sommation aux $\boldsymbol{d}$ vérifiant la

contrainte suivante : il existe deux indices distincts k et k' avec $1 \leqslant k, k' \leqslant 3$ tels qu'on ait

$$\phi_k(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) \geqslant 2\,g - 1 \tag{2.29}$$

et

$$\phi_{k'}(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) \geqslant 2\,g - 1. \tag{2.30}$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, on écrit $\{1, 2, 3\} = \{k, k', k''\}$. Soit $Z_k(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T)$ la série définie par la formule (2.27) en restreignant le domaine de sommation aux $\boldsymbol{d}$ vérifiant les contraintes

$$\phi_k(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) \geqslant 2\,g - 1, \tag{2.31}$$

$$\phi_{k'}(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) < 2\,g - 1 \tag{2.32}$$

et

$$\phi_{k''}(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) < 2\,g - 1. \tag{2.33}$$

Soit enfin $Z_4(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T)$ la série définie par la formule (2.27) en restreignant le domaine de sommation aux $\boldsymbol{d}$ vérifiant les contraintes

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \phi_i(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}) < 2\,g - 1. \tag{2.34}$$

On a donc l'écriture

$$Z(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T) = Z_0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T) + \sum_{k=1}^{3} Z_k(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T) + Z_4(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, T). \tag{2.35}$$

Expliquons en deux mots l'intérêt de cette décomposition. Comme on le verra à la section 3.3, nous allons utiliser le théorème de Riemann-Roch pour estimer la quantité $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$. Pour $\boldsymbol{d}$ « grand », on obtiendra une formule exacte alors que pour $\boldsymbol{d}$ « petit », on devra se contenter d'une majoration (*cf.* le corollaire 3.7). Le terme Z_0 (respectivement les termes $Z_1, \ldots, Z_4$) correspond à la sommation sur les $\boldsymbol{d}$ qui sont « grands » (respectivement « petits »). Les majorations de $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ obtenues à la section 3.3 permettront de montrer que les termes $Z_1, \ldots, Z_4$ ne contribuent pas au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. Ceci est l'objet des propositions 4.1 et 4.3. La proposition 4.4 calcule explicitement le terme Z_0 (modulo de nouveaux termes d'erreur qu'il s'agira de contrôler, *cf.* la sous-section 4.3 pour plus de détails) grâce à l'expression exacte de $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ pour $\boldsymbol{d}$ « grand », et dégage ainsi le terme principal de la fonction zêta des hauteurs.

La démonstration du théorème 2.3 s'obtient alors en combinant les propositions 4.1, 4.3 et 4.4.

3 Quelques lemmes

Nous rassemblons dans cette section quelques lemmes qui nous seront utiles lors de la démonstration du théorème 2.3.

3.1 Un lemme combinatoire

Notation 3.1
Soit $r \geqslant 1$ un entier. Pour $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^r$ posons

$$F_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^r} \rho^{\mathrm{Min}(n_i+\nu_i)} \prod_i T_i^{n_i} \in \mathbf{Z}[[\rho, (T_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}]] \tag{3.1}$$

et

$$\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T}) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 - \rho \prod_i T_i) \prod_i (1 - T_i)\, F_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T}). \tag{3.2}$$

Notons que pour tout $\mu \in \mathbf{N}$ on a

$$F_{(\nu_i+\mu)}(\rho, \boldsymbol{T}) = \rho^{\mu}\, F_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T}). \tag{3.3}$$

Proposition 3.2
Soit $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^r$.

1. *Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^r$. On pose*

$$m = \mathrm{Min}(n_i + \nu_i) \tag{3.4}$$
$$I_1 = \{i \in \{1, \ldots, r\},\ n_i \geqslant 1\} \tag{3.5}$$
$$I_2 = \{i \in \{1, \ldots, r\},\ n_i \geqslant 2\} \tag{3.6}$$
$$\text{et} \quad K = \{i \in I_1,\ n_i + \nu_i \geqslant m + 1\}. \tag{3.7}$$

Si $I_1 \neq \{1, \ldots, r\}$, le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ de $\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T})$ vaut

$$\begin{cases} \rho^m & \text{si} \quad I_1 = \varnothing \\ \rho^m - \rho^{m-1} & \text{si} \quad I_1 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad K = \varnothing \\ 0 & \text{si} \quad K \neq \varnothing. \end{cases} \tag{3.8}$$

Si $I_1 = \{1, \ldots, r\}$, le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ de $\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \boldsymbol{T})$ vaut

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad I_2 \cap K \neq \varnothing \\ -\rho^m & \text{si} \quad I_2 = \varnothing \quad \text{et} \quad K \neq \varnothing \\ 0 & \text{si} \quad I_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad K = \varnothing \\ \rho^{m-1} - \rho^m & \text{si} \quad I_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad K \neq \varnothing \quad \text{et} \quad I_2 \cap K = \varnothing \\ -\rho^{m-1} & \text{si} \quad I_2 = K = \varnothing. \end{cases} \tag{3.9}$$

En particulier on a

$$\widetilde{F}_{(0,\ldots,0)}(\rho,\boldsymbol{T}) = 1 - \prod_i T_i. \tag{3.10}$$

2. *$\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho,\boldsymbol{T})$ est un polynôme dont le degré partiel en chaque T_i est majoré par* $\mathrm{Max}(\nu_i)+1$.
3. *Soit $\rho \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ et $(\eta_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ des nombres complexes de module 1. On a pour tout $\boldsymbol{\nu}$ la majoration*

$$\left|\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}\left(\rho,\left(\eta_i\,\rho^{-1}\right)\right)\right| \leqslant (2+\mathrm{Max}(\nu_i)-\mathrm{Min}(\nu_i))^r\,\rho^{\mathrm{Min}(\nu_i)} \tag{3.11}$$

Démonstration : Montrons le point 1. Notons $a_{\boldsymbol{n}}$ le coefficient en question.

Supposons d'abord $I_1 \neq \{1,\ldots,r\}$. Un peu d'attention montre que $a_{\boldsymbol{n}}$ s'écrit alors

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset I_1,\\ \#J=k}} \rho^{\mathrm{Min}((n_i+\nu_i)_{i\notin J},(n_i-1+\nu_i)_{i\in J})} \tag{3.12}$$

soit

$$a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset I_1,\\ \#J=k\\ J\setminus K\neq\varnothing}} \rho^{m-1} + \sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset K,\\ \#J=k}} \rho^{m} \tag{3.13}$$

On a donc, par un argument combinatoire classique,

$$a_{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \rho^m & \text{si} \quad I_1=\varnothing \\ \rho^m-\rho^{m-1} & \text{si} \quad I_1\neq\varnothing \quad \text{et} \quad K=\varnothing \\ 0 & \text{si} \quad K\neq\varnothing. \end{cases} \tag{3.14}$$

Supposons à présent $I_1=\{1,\ldots,r\}$. Alors $a_{\boldsymbol{n}}$ s'écrit

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,r\},\\ \#J=k,}} \rho^{\mathrm{Min}((n_i+\nu_i)_{i\notin J},(n_i-1+\nu_i)_{i\in J})} \tag{3.15}$$

$$+\sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{J\subset I_2,\\ \#J=k,}} \rho^{1+\mathrm{Min}((n_i-1+\nu_i)_{i\notin J},(n_i-2+\nu_i)_{i\in J})} \tag{3.16}$$

$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant r}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,r\},\\ \#J=k,\\ J\setminus I_2\neq\varnothing}} \rho^{\mathrm{Min}((n_i+\nu_i)_{i\notin J},(n_i-1+\nu_i)_{i\in J})}. \tag{3.17}$$

On en déduit qu'on a

$$a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{0\leqslant k\leqslant r} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset K,\\ \#J=k\\ J\setminus I_2\neq\varnothing}} \rho^m + \sum_{0\leqslant k\leqslant r} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset I_1,\\ \#J=k\\ J\setminus I_2\neq\varnothing\\ J\setminus K\neq\varnothing}} \rho^{m-1}. \tag{3.18}$$

Or on a, toujours par un argument combinatoire classique,

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant r} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset K,\\ \#J=k\\ J\setminus I_2\neq\varnothing}} \rho^m = \begin{cases} 0 & \text{si } I_2\cap K\neq\varnothing \\ -\rho^m & \text{si } I_2=\varnothing \text{ et } K\neq\varnothing \\ 0 & \text{si } I_2\neq\varnothing \text{ et } K=\varnothing \\ -\rho^m & \text{si } I_2\neq\varnothing \text{ et } K\neq\varnothing \text{ et } I_2\cap K=\varnothing \\ 0 & \text{si } I_2=K=\varnothing \end{cases} \tag{3.19}$$

et

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant r} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset I_1,\\ \#J=k\\ J\setminus I_2\neq\varnothing\\ J\setminus K\neq\varnothing}} \rho^{m-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } I_2\cap K\neq\varnothing \\ 0 & \text{si } I_2=\varnothing \text{ et } K\neq\varnothing \\ 0 & \text{si } I_2\neq\varnothing \text{ et } K=\varnothing \\ \rho^{m-1} & \text{si } I_2\neq\varnothing \text{ et } K\neq\varnothing \text{ et } I_2\cap K=\varnothing \\ -\rho^{m-1} & \text{si } I_2=K=\varnothing \end{cases} \tag{3.20}$$

On en déduit le point 1.

Montrons le point 2. Soit $\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^d$ tel que le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ de $\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho,\boldsymbol{T})$ soit non nul.

Supposons $I_1\neq\{1,\dots,r\}$. Soit $i_0\in\{1,\dots,r\}\setminus I_1$. On a donc

$$m\leqslant n_{i_0}+\nu_{i_0}=\nu_{i_0} \tag{3.21}$$

Comme le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ est non nul, d'après le point 1 on a

$$\forall i\in I_1,\quad n_i+\nu_i=m\leqslant\nu_{i_0} \tag{3.22}$$

On a donc

$$\forall i\in\{1,\dots,r\},\quad n_i\leqslant \mathrm{Max}(\nu_j) \tag{3.23}$$

Supposons à présent $I_1=\{1,\dots,r\}$. Comme le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ est non nul, d'après le point 1 on a soit $I_2=\varnothing$ soit $I_2\neq\varnothing$ et $K\neq\varnothing$ et $K\cap I_2=\varnothing$.

Si $I_2=\varnothing$ alors $n_i=1$ pour tout i.

Supposons à présent $I_2\neq\varnothing$ et $K\neq\varnothing$ et $K\cap I_2=\varnothing$. Comme $K\neq\varnothing$ et $K\cap I_2=\varnothing$, il existe $i_0\in I_1\setminus I_2$ tel que

$$1+\nu_{i_0}=n_{i_0}+\nu_{i_0}\geqslant m+1 \tag{3.24}$$

d'où $m \leqslant \nu_{i_0}$.

Comme $K \cap I_2 = \varnothing$, on a pour tout $i \in I_2$

$$n_i + \nu_i = m \leqslant \nu_{i_0} \tag{3.25}$$

et donc

$$\forall i \in I_2, \quad n_i \leqslant \mathrm{Max}(\nu_j) \tag{3.26}$$

Finalement on a montré que quelle que soit la valeur de $\boldsymbol{n}$ telle que le coefficient d'indice $\boldsymbol{n}$ est non nul, on a

$$\forall i, \quad n_i \leqslant \mathrm{Max}(\nu_j) + 1. \tag{3.27}$$

Montrons le point 3. En utilisant (3.3), on se ramène aussitôt au cas où $\mathrm{Min}(\nu_i) = 0$. Dans ce cas, on a pour tout $\boldsymbol{n}$

$$\mathrm{Min}(n_i + \nu_i) - \sum n_i \leqslant 0. \tag{3.28}$$

D'après les point 1 et 2, on a

$$\left|\widetilde{F}_{\boldsymbol{\nu}}(\rho, \eta_i\, \rho^{-1})\right| \leqslant \sum_{0 \leqslant n_i \leqslant \mathrm{Max}(\nu_j)+1} 2\, \rho^{\mathrm{Min}(n_i+\nu_i) - \sum_i n_i} \tag{3.29}$$

$$\leqslant 2\ \mathrm{Max}(\nu_i + 2)^r. \tag{3.30}$$

□

3.2 Une estimation

Lemme 3.3

Soit $r \geqslant 1$ un entier, $(a_{\boldsymbol{n}}) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^r}$ et $\rho > 0$ un réel. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la série

$$F(\boldsymbol{z}) = \prod_i (1 - \rho\, z_i) \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^r} a_{\boldsymbol{n}} \prod_i z_i^{n_i} \tag{3.31}$$

converge absolument dans le domaine $|z_i| \leqslant \rho^{-1} + \varepsilon$.

Soit

$$||F||_{\rho^{-1}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}_{|\eta_i|=1} \left|F(\eta_i\, \rho^{-1})\right|. \tag{3.32}$$

On a alors

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^r, \quad |a_{\boldsymbol{n}}| \leqslant \prod_i (n_i + 1)\, ||F||_{\rho^{-1}}\, \rho^{\sum_i n_i}. \tag{3.33}$$

Démonstration : Si on écrit $F(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^r} b_{\boldsymbol{n}} \prod_i z_i^{n_i}$ on a d'après les estimations de Cauchy

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^r, \quad |b_{\boldsymbol{n}}| \leqslant ||F||_{\rho^{-1}}\, \rho^{\sum_i n_i}. \tag{3.34}$$

Or on a

$$a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}'=\boldsymbol{n}} b_{\boldsymbol{m}}\, \rho^{\sum_i m'_i}. \tag{3.35}$$

Le résultat en découle aussitôt. □

Lemme 3.4
Soit $r \geqslant 1$ et $\mathfrak{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^r$. On pose pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^r$

$$a_{\boldsymbol{d},\mathfrak{D}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{\mathfrak{G}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^r \\ \deg(\mathfrak{G})=\boldsymbol{d}}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i+\mathcal{G}_i))}. \tag{3.36}$$

Il existe une constante $c > 0$ (ne dépendant que de $\mathscr{C}$) telle qu'on ait la propriété suivante : pour tout réel $\theta > 0$, il existe une constante $c_\theta > 0$ (ne dépendant que de q) telle qu'on ait

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^r, \quad |a_{\boldsymbol{d},\mathfrak{D}}| \leqslant c_\theta\, c^{1+r\,(2+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i))}\, q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i)}\, q^{(1+\theta)\sum_i d_i}. \tag{3.37}$$

et

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^r, \quad |a_{\boldsymbol{d},\mathfrak{D}}| \leqslant c_\theta\,(d_1+1)\, c^{1+r\,(2+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i))}\, q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i)}\, q^{d_1+(1+\theta)\sum_{2\leqslant i\leqslant r} d_i}. \tag{3.38}$$

Démonstration : Formons la série génératrice

$$Z_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{T}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^r} a_{\boldsymbol{d},\mathfrak{D}} \prod T_i^{d_i} \tag{3.39}$$

$$= \sum_{\mathfrak{G}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^r} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i+\mathcal{G}_i))} \prod T_i^{\deg(\mathcal{G}_i)}. \tag{3.40}$$

Cette série s'écrit comme le produit eulérien (*cf.* les notations de la section 3.1)

$$\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} F_{(v(\mathcal{D}_i))}(q_v, \boldsymbol{T}^{f_v}). \tag{3.41}$$

On a donc d'après la proposition 3.2

$$Z_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{T}) = \left(\prod_i Z_{\mathscr{C}}(T_i)\right) F(\boldsymbol{T})\, G_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{T}) \tag{3.42}$$

avec

$$F(\boldsymbol{T}) = \prod_{v \in \mathscr{C}^{(0)}} \frac{1 - (\prod_i T_i)^{f_v}}{1 - q_v \, (\prod_i T_i)^{f_v}} \tag{3.43}$$

et

$$G_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{T}) = \prod_{\substack{v \in \mathscr{C}^{(0)} \\ (v(\mathcal{D}_i)) \neq (0)}} \frac{\widetilde{F}_{(v(\mathcal{D}_i))}(q_v, \boldsymbol{T}^{f_v})}{1 - (\prod_i T_i)^{f_v}}. \tag{3.44}$$

Compte tenu du point 3 de la proposition 3.2, on a

$$||G_{\mathfrak{D}}||_{q^{-1}} \leqslant \prod_{\substack{v \in \mathscr{C}^{(0)} \\ (v(\mathcal{D}_i)) \neq (0)}} \frac{e^{r\,(2+\mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i)))} q_v^{\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i))}}{1 - q^{-r}} \tag{3.45}$$

$$\leqslant q^{r\#\{v \in \mathscr{C}^{(0)}, (v(\mathcal{D}_i)) \neq (0)\}} \, e^{r \sum_v (2+\mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i)))} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i))} \tag{3.46}$$

$$\leqslant q^{r \sum_v \mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))} \, e^{r \sum_v (2+\mathrm{Max}(v(\mathcal{D}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{D}_i)))} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{D}_i))}. \tag{3.47}$$

D'après le lemme 3.3, on a le résultat voulu. □

3.3 Comptage de sections globales

Les résultats de cette partie sont à la base de l'estimation de la quantité $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \mathfrak{D})$ introduite à la section 2.3. Les démonstrations reposent sur de l'algèbre linéaire élémentaire, ainsi que sur le théorème de Riemann-Roch (lemme 1.17).

Lemme 3.5
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_2'$ des diviseurs de $\mathscr{C}$ tels qu'on ait

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1' \sim \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2'. \tag{3.48}$$

Soit s_1 (respectivement s_2) une section globale non nulle de $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1)$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_2)$). On fixe un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2'), \tag{3.49}$$

ce qui permet de définir l'application linéaire

$$\varphi_{s_1,s_2} \, : \, H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1')) \times H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_2')) \longrightarrow H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1')) \tag{3.50}$$

qui à (t_1, t_2) associe $t_1 \, s_1 + t_2 \, s_2$.

Soit δ le degré de $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1'$ (ou ce qui revient au même celui de $\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2'$).

1. *On suppose qu'on a l'inégalité*

$$\delta < \deg(\mathcal{D}_1) + \deg(\mathcal{D}_2) - \deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]). \tag{3.51}$$

Alors φ_{s_1,s_2} *est injective.*

2. *On suppose qu'on a l'inégalité*

$$\delta \geqslant \deg(\mathcal{D}_1) + \deg(\mathcal{D}_2) - \deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]). \tag{3.52}$$

Alors on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2})) \leqslant 1+\delta-\deg(\mathcal{D}_1)-\deg(\mathcal{D}_2)+\deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]). \tag{3.53}$$

3. *On suppose qu'on a l'inégalité*

$$\delta \geqslant \deg(\mathcal{D}_1) + \deg(\mathcal{D}_2) - \deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2))) + 2\,g - 1. \tag{3.54}$$

Alors on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2})) = 1-g+\delta-\deg(\mathcal{D}_1)-\deg(\mathcal{D}_2)+\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2))) \tag{3.55}$$

et

$$\mathrm{Im}(\varphi_{s_1,s_2}) = \{s \in H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1+\mathcal{D}'_1))\backslash\{0\},\ \mathrm{div}(s) \geqslant \mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2))\}\cup\{0\} \tag{3.56}$$

Démonstration : Quitte à remplacer $\mathcal{D}'_2$ par un diviseur linéairement équivalent, on peut supposer qu'on a

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}'_2 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}. \tag{3.57}$$

On peut également supposer qu'on a $\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)) = 0$. Soit $(t_1, t_2) \in \mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2})$. Notons qu'on a $t_1 = 0$ si et seulement si $t_2 = 0$. Supposons $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$. Comme on a $s_1\,t_1 = -s_2\,t_2$, on a

$$\mathrm{div}(t_1) + \mathrm{div}(s_1) = \mathrm{div}(t_2) + \mathrm{div}(s_2) \tag{3.58}$$

d'où

$$\mathrm{div}(t_1) \geqslant \mathrm{div}(s_2). \tag{3.59}$$

En particulier, on a

$$\deg(\mathcal{D}_2) \leqslant (\mathcal{D}'_1) = \deg(\mathcal{D}) - \deg(\mathcal{D}_1) \tag{3.60}$$

ce qui montre la première assertion.

Par ailleurs on en déduit facilement de (3.59) que l'application $u \mapsto (u\,s_2, u\,s_1)$ est un isomorphisme de $H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_1 - \mathcal{D}_2))$ sur $\mathrm{Ker}(\varphi_{(s_1,s_2)})$. On en déduit les deux dernières assertions, compte tenu du lemme 1.17. □

Corollaire 3.6
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}'_3$ des diviseurs de $\mathscr{C}$ tels qu'on ait

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1 \sim \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}'_2 \sim \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}'_3. \tag{3.61}$$

Soit s_1 (respectivement s_2, s_3) une section globale non nulle de $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1)$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_2)$, $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_3)$).

On fixe des isomorphismes

$$\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}'_2) \tag{3.62}$$

et

$$\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_3 + \mathcal{D}'_3), \tag{3.63}$$

ce qui permet de définir l'application linéaire

$$\varphi_{s_1,s_2,s_3} \,:\, H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_1)) \times H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_2)) \times H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_3)) \longrightarrow H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1)) \tag{3.64}$$

qui à (t_1, t_2, t_3) associe $t_1\, s_1 + t_2\, s_2 + t_3\, s_3$.

On note δ le degré de $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1$.

1. *Le cardinal de l'ensemble des éléments (t_1, t_2, t_3) de $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ vérifiant $t_3 \neq 0$ est majoré par*

$$q^{2+2\,\delta - \deg(\mathcal{D}_1) - \deg(\mathcal{D}_2) - \deg(\mathcal{D}_3)} + q^{1+\deg(\mathcal{D}'_3)}. \tag{3.65}$$

2. *On suppose qu'on a*

$$\delta \geqslant \deg(\mathcal{D}_1) + \deg(\mathcal{D}_2) - 1 \tag{3.66}$$

Le cardinal de l'ensemble des éléments (t_1, t_2, t_3) de $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ vérifiant $t_3 \neq 0$ est majoré par

$$q^{2+2\,\delta - \deg(\mathcal{D}_1) - \deg(\mathcal{D}_2) - \deg(\mathcal{D}_3)}. \tag{3.67}$$

3. *On suppose qu'on a*

$$\delta \geqslant \deg(\mathcal{D}_1) + \deg(\mathcal{D}_2) + 2\,g - 1 \tag{3.68}$$

et

$$\delta \geqslant \deg(\mathcal{D}_2) + \deg(\mathcal{D}_3) + 2\,g - 1. \tag{3.69}$$

Alors le noyau de φ_{s_1,s_2,s_3} est de dimension

$$2\,(\delta + 1 - g) - \sum_{i=1}^{3} \deg(\mathcal{D}_i) + \deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)). \tag{3.70}$$

Démonstration : On peut supposer qu'on a

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}'_3 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{D} \tag{3.71}$$

et qu'on a $\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)) = 0$.

Soit t_3 un élément non nul de $H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_3))$ qui est dans l'image de $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ par la troisième projection. On a donc

$$\mathrm{div}(t_3) + \mathrm{div}(s_3) \geqslant \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)] \tag{3.72}$$

soit

$$\mathrm{div}(t_3) \geqslant \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]. \tag{3.73}$$

D'après le lemme 1.17, le cardinal de l'ensemble des éléments vérifiant cette propriété est majoré par

$$q^{1+\deg(\mathcal{D}'_3)-\deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1),\mathrm{div}(s_2)])}. \tag{3.74}$$

Par ailleurs si t_3 est un tel élément, l'ensemble des couples (t_1, t_2) tels que $(t_1, t_2, t_3) \in \mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2})$. D'après les points 1 et 2 du lemme 3.5, le cardinal de cet ensemble est majoré par

$$q^{1+\deg(\mathcal{D})-\deg(\mathcal{D}_1)-\deg(\mathcal{D}_2)+\deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1),\mathrm{div}(s_2)])} \tag{3.75}$$

si

$$1 + \deg(\mathcal{D}) - \deg(\mathcal{D}_1) - \deg(\mathcal{D}_2) + \deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]) \geqslant 0 \tag{3.76}$$

(ce qui est toujours vérifié si l'hypothèse 3.66 est satisfaite) et par

$$q^{1+\deg(\mathcal{D})-\deg(\mathcal{D}_1)-\deg(\mathcal{D}_2)+\deg(\mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1),\mathrm{div}(s_2)])} + 1 \tag{3.77}$$

sinon. On en déduit les points 1 et 2.

Montrons le point 3. D'après le point 3 du lemme 3.5 et l'hypothèse (3.68) un élément t_3 non nul de $H^0(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_3))$ est dans l'image de $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ par la troisième projection si et seulement si

$$\mathrm{div}(t_3) + \mathrm{div}(s_3) \geqslant \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)] \tag{3.78}$$

i.e. si et seulement si

$$\mathrm{div}(t_3) \geqslant \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]. \tag{3.79}$$

Ainsi l'image de la projection de $\mathrm{Ker}(\varphi_{s_1,s_2,s_3})$ sur $H^0(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_3))$ est isomorphe à $H^0(\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_3 - \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]))$.

Or on a

$$\deg(\mathcal{D}'_3 - \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]) \geqslant \deg(\mathcal{D}'_3) - \deg(\mathcal{D}_2) \tag{3.80}$$

soit d'après l'hypothèse (3.69)

$$\deg(\mathcal{D}'_3 - \mathrm{pgcd}[\mathrm{div}(s_1), \mathrm{div}(s_2)]) \geqslant 2\,g - 1. \tag{3.81}$$

On conclut grâce au lemme 1.17 et au point 3 du lemme 3.5. □

Corollaire 3.7
Soit $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ *vérifiant*

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0. \tag{3.82}$$

1. *Pour tout* $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ *est majoré par*

$$q^{2+3\,d_0+\sum_i d_i+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}$$
$$+\, q^{5+2\,d_0+2\,d_1+2\,d_2+d_3+\deg(\mathcal{E}_0)+\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)-\deg(\mathcal{F}_3)} \tag{3.83}$$

2. *On suppose qu'il existe* $j \in \{1,2,3\}$ *tel que la condition*

$$\phi_j(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 2\,g - 1 \tag{3.84}$$

est vérifiée. Alors pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ *est majoré par*

$$q^{2+3\,d_0+\sum_i d_i+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))} \tag{3.85}$$

3. *On suppose qu'il existe* $j, k \in \{1,2,3\}$ *avec* $j \neq k$ *vérifiant*

$$\phi_j(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 2\,g - 1 \tag{3.86}$$

et

$$\phi_k(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 2\,g - 1. \tag{3.87}$$

Alors, pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, *la quantité* $\mathcal{N}_{S,0}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ *(cf. la sous-section 4.3.1) est égale à*

$$\#\mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_0,d_0}\; q^{2(1-g)+2\,d_0+\sum_i d_i+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)}$$
$$\times \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^\bullet_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))} \tag{3.88}$$

Démonstration : Quitte à permuter les indices, on peut supposer qu'on a $j = 2$ et $k = 3$. Pour tout $(s_i) \in \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i}$ on applique alors les différents résultats du corollaire 3.6 avec

$$\mathcal{D}_i = \mathfrak{E}_i + d_i \mathfrak{D}_1 + \mathcal{E}_i + \mathcal{F}_i \tag{3.89}$$

et

$$\mathcal{D}'_i = \mathfrak{F}_i + \left(d_0 + \sum_{j \neq i} d_i + \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_{j \neq i} \deg(\mathcal{E}_i) - \deg(\mathcal{F}_i) \right) \mathfrak{D}_1. \tag{3.90}$$

On somme ensuite les contributions obtenues sur l'ensemble des éléments $(s_i) \in \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i}$. Pour le point 1, on utilise en outre le fait qu'on a, d'après le lemme 1.17,

$$\# \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i} \leqslant q^{3 + \sum_i d_i}. \tag{3.91}$$

□

En utilisant le lemme 3.4, on déduit aussitôt du corollaire 3.7 le corollaire suivant.

Corollaire 3.8
Il existe une constante $c > 0$ (ne dépendant que de $\mathscr{C}$) et pour tout réel $\theta > 0$, une constante $c_\theta > 0$ (ne dépendant que de q) telles qu'on ait la propriété suivante : soit $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0. \tag{3.92}$$

Alors

1. *pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S, \boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ est majoré par*

$$\begin{aligned} & c_\theta\, c^{1 + \sum_v 2\, \mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i) + v(\mathcal{F}_i)) - \mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i) + v(\mathcal{F}_i))} \\ & \quad \times q^{2 + 3\, d_0 + (2+\theta) \sum_i d_i + 2\, \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_i \deg(\mathcal{E}_i) - \sum_i \deg(\mathcal{F}_i) + \deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i + \mathcal{F}_i))} \\ & \qquad + q^{5 + 2\, d_0 + 2\, d_1 + 2\, d_2 + d_3 + \deg(\mathcal{E}_0) + \deg(\mathcal{E}_1) + \deg(\mathcal{E}_2) - \deg(\mathcal{F}_3)}; \end{aligned} \tag{3.93}$$

2. *si en outre il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que la condition*

$$\phi_j(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 2\, g - 1 \tag{3.94}$$

est vérifiée, pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S, \boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ est majoré par

$$\begin{aligned} & c_\theta\, c^{1 + \sum_v 2\, \mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i) + v(\mathcal{F}_i)) - \mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i) + v(\mathcal{F}_i))} \\ & \times (d_1 + 1)\, q^{2 + 3\, d_0 + 2\, d_1 + (2+\theta)\, (d_2 + d_3) + 2\, \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_i \deg(\mathcal{E}_i) - \sum_i \deg(\mathcal{F}_i) + \deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i + \mathcal{F}_i))}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

3.4 Quelques propriétés de la fonction μ_S

On note $\{0,1\}^7_S$ l'ensemble des éléments $(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \in \{0,1\}^7$ vérifiant

$$\mathrm{Min}\left(\left(\sum_{j\neq i} e_j + \sum_j f_j\right)_i, \left(e_0 + \sum_{j\neq i}(e_j + f_j)\right)_i, e_0 + \sum_i e_i\right) = 0. \quad (3.96)$$

Lemme 3.9

1. *On a*

$$\forall\,(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \in \{0,1\}^7, \quad \mathbf{1}_{\{0,1\}^7_S}(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = \sum_{\substack{0\leqslant e_0\leqslant e_0\\ 0\leqslant e'_i\leqslant e_i\\ 0\leqslant f'_i\leqslant f_i}} \mu^0_S(e'_0, \boldsymbol{e}', \boldsymbol{f}') \quad (3.97)$$

   En particulier, pour tout $(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \in \{0,1\}^7_S \setminus (0,\ldots,0)$, $\mu^0_S(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ *est nul.*

2. *Soit* $e_0 \in \{0,1\}$. *On a*

$$\sum_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^6} \mu^0_S(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = 0 \quad (3.98)$$

3. *Soit* $(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \in \{0,1\}^7$. *On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiée*
   (a) $e_0 + \sum_i (e_i + f_i) = 1$;
   (b) $e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$;
   (c) $e_0 = 0$ *et il existe un* $i \in \{1,2,3\}$ *tel que* $e_i = 1$, $f_i = 0$ *et* $e_j = 0$ *pour* $j \neq i$.

   Alors $\mu^0_S(e_0, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ *est nul.*

Démonstration : Le premier point n'est autre que le contenu de la remarque 1.22 dans le cas où $X = S$, compte tenu de la de la description de $\mathcal{I}_S$ donnée à la section 2.1. Les autres points s'en déduisent aussitôt. □

Lemme 3.10
Pour $\varepsilon > 0$, *la série*

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\; q^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left[\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)+\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)\right]} \quad (3.99)$$

est convergente.

Démonstration : D'après la proposition 1.21, la série en question s'écrit comme le produit eulérien

$$\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} 1+\sum_{\substack{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7\\(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq(0,0,0)}} \left|\mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\right| q_v^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)\left(e_0+\sum_i e_i+f_i\right)} \tag{3.100}$$

Pour montrer que ce dernier produit converge, il suffit de montrer que les conditions

$$(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq(0,0,0) \text{ et } \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq 0 \tag{3.101}$$

entraînent

$$-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left(e_0+\sum_i e_i+f_i\right)<-1 \tag{3.102}$$

ce qui découle aussitôt du point 3(a) du lemme 3.9. □

Lemme 3.11
Les séries

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, q^{-\frac{3}{2}\deg(\mathcal{E}_0)-\frac{3}{4}(\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2))-\frac{3}{2}\deg(\mathcal{E}_3)+\frac{1}{8}(\deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_2))-\frac{3}{4}\deg(\mathcal{F}_3)} \tag{3.103}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, q^{-\frac{3}{2}\left(\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)\right)} \tag{3.104}$$

sont convergentes.

Démonstration : En raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.10, on voit qu'il suffit de montrer que les conditions

$$(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq(0,0,0) \text{ et } \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq 0 \tag{3.105}$$

entraînent

$$-\frac{3}{2}e_0-\frac{3}{4}(e_1+e_2)-\frac{3}{2}e_3+\frac{1}{8}(f_1+f_2)-\frac{3}{4}f_3<-1, \tag{3.106}$$

respectivement

$$-\frac{3}{2}\left(e_0+\sum_i e_i\right)<-1. \tag{3.107}$$

Ceci découle facilement du point 3 du lemme 3.9.

□

Lemme 3.12
Soit $\rho > 0$. La série

$$\sum_{\mathfrak{E}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\mathfrak{E})|\ \rho^{\sum_v 2\ \mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))} \times q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))} q^{-\frac{3}{4}\left[\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)+\deg(\mathcal{F}_i)\right]} \tag{3.108}$$

est convergente.

Démonstration : D'après la proposition 1.21, la série en question s'écrit comme le produit eulérien

$$\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \left(1 + \sum_{\substack{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7 \\ (e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\neq(0,0,0)}} \left|\mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\right|\ \rho^{2\ \mathrm{Min}(e_i+f_i)-\mathrm{Max}(e_i+f_i)}\ q_v^{-\frac{3}{4}\left[e_0+\sum_i(e_i+f_i)+\mathrm{Min}(e_i+f_i)\right]} \right) \tag{3.109}$$

Pour montrer que ce dernier produit converge, il suffit de montrer que les conditions

$$(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) \neq (0,0,0) \text{ et } \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) \neq 0 \tag{3.110}$$

entraînent

$$-\frac{3}{4}\left[e_0+\sum_i(e_i+f_i)\right] + \mathrm{Min}(e_i+f_i) < 1 \tag{3.111}$$

ce qui, là encore, découle facilement du point 3 du lemme 3.9. □

4 Démonstration du résultat principal

4.1 Le terme Z_4

Proposition 4.1
Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{\mathfrak{E}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\mathfrak{E}) \sum_{\mathfrak{E}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\mathfrak{E}}} Z_4(\mathfrak{E},\mathfrak{E},T) \tag{4.1}$$

est strictement supérieur à q^{-1}.

Démonstration : Rappelons que pour $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{E}}$ donnés, $Z_4(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum\limits_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{d_0 \geqslant 0 \\ d_i \geqslant 0, \\ \psi_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \phi_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}}) < 2\,g-1}} \mathcal{N}_S\left(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{D}}\right) T^{3\,d_0+2\sum\limits_i d_i}. \tag{4.2}$$

Les conditions

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \phi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) < 0 \tag{4.3}$$

entraînent les inégalités

$$0 \leqslant d_0 < \deg(\mathcal{F}_1) + \deg(\mathcal{F}_2) + \deg(\mathcal{F}_3) + 2\,g, \tag{4.4}$$
$$0 \leqslant d_1 < \deg(\mathcal{F}_2) + \deg(\mathcal{F}_3) + 2\,g, \tag{4.5}$$
$$0 \leqslant d_2 < \deg(\mathcal{F}_1) + \deg(\mathcal{F}_3) + 2\,g, \tag{4.6}$$
$$0 \leqslant d_3 < \deg(\mathcal{F}_1) + \deg(\mathcal{F}_2) + 2\,g. \tag{4.7}$$

En particulier $Z_4(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est un polynôme en T à coefficients positifs. La proposition 4.1 découle alors du lemme 4.2 ci-dessous. □

Lemme 4.2
Il existe un réel $\theta > 0$ tel que la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_4(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, q^{-1+\theta}) \tag{4.8}$$

soit convergente.

Démonstration : Fixons $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ et $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. D'après le corollaire 3.8 et la remarque ci-dessus, on a

$$Z_4(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, q^{-1+\theta}) \leqslant A(\theta) + B(\theta) \tag{4.9}$$

avec

$$\begin{aligned} A(\theta) = c_\theta\; & q^{2+(3\,\theta-1)\,\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-1)\sum\limits_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum\limits_i \deg(\mathcal{F}_i)} \\ & \times q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\; c^{1+\sum\limits_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))} \\ & \times \sum_{\substack{0 \leqslant d_0 < \deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g \\ 0 \leqslant d_1 < \deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g \\ 0 \leqslant d_2 < \deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g \\ 0 \leqslant d_3 < \deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_2)+2\,g}} q^{3\,\theta\,d_0+3\,\theta\sum\limits_i d_i} \end{aligned} \tag{4.10}$$

et

$$B(\theta) = q^{5+(3\,\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-1)\,(\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2))+(2\,\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_3)-\deg(\mathcal{F}_3)}$$
$$\times \sum_{\substack{0\leqslant d_0<\deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_1<\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_2<\deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_3<\deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_2)+2\,g}} q^{3\,\theta\,d_0+2\,\theta\,d_1+2\,\theta\,d_2+(-1+2\,\theta)\,d_3} \tag{4.11}$$

En utilisant, pour $\rho > 1$ et $N \geqslant 1$, la majoration $\sum\limits_{0\leqslant d<N} \rho^d \leqslant \frac{\rho^N}{\rho-1}$, on en déduit les majorations

$$A(\theta) \leqslant c'_\theta\, q^{2+24\,g\,\theta+(3\,\theta-1)\,\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-1)\sum\limits_i \deg(\mathcal{E}_i)+(9\,\theta-1)\sum\limits_i \deg(\mathcal{F}_i)}$$
$$\times\, q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, c^{1+\sum\limits_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))}. \tag{4.12}$$

et

$$B(\theta) \leqslant c''_\theta\, q^{5+18\,g\,\theta+(3\,\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-1)\,[\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)]+(2\,\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_3)}$$
$$\times\, q^{7\,\theta\,\deg(\mathcal{F}_1)+7\,\theta\,\deg(\mathcal{F}_2)+(-1+7\,\theta)\,\deg(\mathcal{F}_3)}. \tag{4.13}$$

où c_θ et c''_θ sont des constantes ne dépendant que de θ. Les majorations (4.9), (4.12) et (4.13) ainsi que les lemmes 3.11 et 3.12 montrent le lemme 4.2. □

4.2 Les termes Z_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$

Proposition 4.3
Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$ la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}\in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_k(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \tag{4.14}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2.

Démonstration : Nous traitons le cas où $k = 3$, les autres cas s'en déduisent par permutation des indices.

Rappelons que pour $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ et $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $Z_3(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum\limits_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4\\ \forall 1\leqslant i\leqslant 3,\quad \psi_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0\\ \phi_1(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})<2\,g-1\\ \phi_2(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})<2\,g-1\\ \phi_3(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 2\,g-1.}} \mathcal{N}_S\,(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{D}})\; T^{3\,d_0+2\sum\limits_i d_i} \tag{4.15}$$

Soit θ un réel strictement positif. D'après le corollaire 3.8, $Z_3(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est majorée par la série

$$c_\theta\, C^{1+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(E_i)+v(F_i))-\mathrm{Min}(v(E_i)+v(F_i))} \tag{4.16}$$

$$\times\, T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)+\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))} \tag{4.17}$$

$$\times \sum_{\substack{d_3\geqslant 0\\ 0\leqslant d_0<\frac{1}{2}\deg(\mathcal{F}_1)+\frac{1}{2}\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_1<\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_3<\deg(\mathcal{F}_3)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g}} (d_3+1)\, q^{3\,d_0+(2+\theta)\,(d_1+d_2)}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i} \tag{4.18}$$

On en déduit que $Z_3(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est majorée par la série

$$\left(\sum_{d_3\geqslant 0}(d_3+1)(q\,T)^{d_3}\right)\widetilde{Z}_{3,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T) = \frac{1}{(1-q\,T)^2}\widetilde{Z}_{3,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T) \tag{4.19}$$

où $\widetilde{Z}_{3,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$c_\theta\, C^{1+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))} \tag{4.20}$$

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)+\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))} \tag{4.21}$$

$$\sum_{\substack{0\leqslant d_0<\frac{1}{2}\deg(\mathcal{F}_1)+\frac{1}{2}\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_1<\deg(\mathcal{F}_2)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g\\ 0\leqslant d_2<\deg(\mathcal{F}_1)+\deg(\mathcal{F}_3)+2\,g}} q^{3\,d_0+(2+\theta)\,(d_1+d_2)}\, T^{3\,d_0+2\,d_1+2\,d_2} \tag{4.22}$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.2, on montre qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, \widetilde{Z}_{3,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, q^{-1+\theta}) \tag{4.23}$$

soit convergente, ce qui conclut la preuve de la proposition 4.3. □

4.3 Le terme Z_0

Proposition 4.4
Il existe une série $\widetilde{Z_0}(T)$ de rayon de convergence strictement supérieur à q^{-1} telle que

$$\widetilde{Z_0}\left(q^{-1}\right) = (q-1)^4\, q^{2(1-g)} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} (1-q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(S))}\, \frac{\#S(\kappa_v)}{q_v^{\dim(S)}} \tag{4.24}$$

et

$$Z_0(T) - Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3)\,Z_{\mathscr{C}}(q\,T^2)^3\,\widetilde{Z_0}(T) \tag{4.25}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2.

La démonstration de cette proposition occupe le reste de cette section.

4.3.1 Décomposition de Z_0

Pour $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ et $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^{\,0}(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, rappelons que $Z_0(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum\limits_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4 \\ \forall 1\leqslant i\leqslant 3,\quad \psi_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0 \\ \exists k,k',\,k\neq k',\,\phi_k(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0 \\ \text{et } \phi_{k'}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0}} \mathcal{N}_S\,(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})\;T^{3\,d_0+2\sum\limits_i d_i}. \tag{4.26}$$

Soit $Z_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ la série définie par l'expression (4.26) où l'on a remplacé $\mathcal{N}_S$ par $\mathcal{N}_{S,0}$, où $\mathcal{N}_{S,0}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ représente le cardinal de l'ensemble des éléments

$$(s_0, s_i, t_i) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i} \times \prod_i \mathcal{H}_{\mathfrak{F}_i,d_0+\sum\limits_{j\neq i} d_j+\deg(\mathcal{E}_0)+\sum\limits_{j\neq i}\deg(\mathcal{E}_j)-\deg(\mathcal{F}_i)} \tag{4.27}$$

vérifiant la relation $\sum\limits_i s_i\,t_i\,s_{\mathcal{E}_i}\,s_{\mathcal{F}_i} = 0$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, soit $Z_{0,k}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ la série définie par l'expression (4.26) où l'on a remplacé $\mathcal{N}_S$ par $\mathcal{N}_{S,k}$, où $\mathcal{N}_{S,k}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ représente le cardinal de l'ensemble des éléments

$$(s_0, (s_i), (t_i)_{i\neq k}) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i} \times \prod_{i\neq k} \mathcal{H}_{\mathfrak{F}_i,d_0+\sum\limits_{j\neq i} d_j+\deg(\mathcal{E}_0)+\sum\limits_{j\neq i}\deg(\mathcal{E}_j)-\deg(\mathcal{F}_i)} \tag{4.28}$$

vérifiant la relation $\sum\limits_{i\neq k} s_i\,t_i\,s_{\mathcal{E}_i}\,s_{\mathcal{F}_i} = 0$.

Soit enfin $Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ la série définie par l'expression (4.26) où l'on a remplacé $\mathcal{N}_S$ par $\mathcal{N}_{S,4}$, où

$$\mathcal{N}_{S,4}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) \overset{\text{déf}}{=} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} \prod_i \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}. \tag{4.29}$$

On a ainsi

$$\mathcal{N}_{S,0}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) = \mathcal{N}_S(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) + \sum_{k=1}^{3} \mathcal{N}_{S,k}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) - 2\,\mathcal{N}_{S,4}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) \tag{4.30}$$

d'où l'écriture

$$Z_0(\boldsymbol{\mathcal{E}},T) = Z_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},T) - \sum_{k=1}^{3} Z_{0,k}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},T) + 2\, Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},T). \tag{4.31}$$

La proposition 4.4 découle alors des propositions 4.6, 4.7, 4.9 et 4.10.
Remarque 4.5 : Compte tenu de la description du torseur universel de S donné à la section 2.1, et rappelant que S_0 désigne la surface S privée des droites $(\mathcal{E}_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ et $(\mathcal{F}_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$, on voit que la décomposition (4.30) correspond à la décomposition géométrique

$$S \setminus \bigcup_{0\leqslant i\leqslant 3} \mathcal{E}_i = S_0 \sqcup \bigcup_{1\leqslant i\leqslant 3} \big(\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{E}_i\big). \tag{4.32}$$

□

4.3.2 Le terme $Z_{0,4}$

Proposition 4.6
Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}\in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},T) \tag{4.33}$$

est strictement supérieur à q^{-1}.

Démonstration : Rappelons que $Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4 \\ \forall 1\leqslant i\leqslant 3,\quad \psi_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0 \\ \exists k,k',\, k\neq k',\, \phi_k(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0 \\ \text{et } \phi_{k'}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\geqslant 0}} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} \prod_i \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i} \tag{4.34}$$

D'après le lemme 1.17, pour tout réel θ strictement positif, $Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}},q^{-1+\theta})$ est majorée par

$$q^{4+(3\theta-3)\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-2)\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4} q^{(3\,\theta-2)\,d_0+(2\,\theta-1)\sum_i d_i}. \tag{4.35}$$

Ainsi pour θ assez petit on a

$$Z_{0,4}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathfrak{E}},q^{-1+\theta}) \leqslant \frac{1}{(1-q^{-\frac{1}{2}})^4}\; q^{4+(3\theta-3)\deg(\mathcal{E}_0)+(2\,\theta-2)\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}. \tag{4.36}$$

Le lemme 3.11 permet de conclure. □

4.3.3 Les termes $Z_{0,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 3$

Proposition 4.7
Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$ la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{eff}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_{0,k}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \tag{4.37}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2.

Démonstration : Nous traitons le cas où $k = 1$, les autres cas s'en déduisent par permutation des variables.

Rappelons que $Z_{0,1}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4 \\ \forall 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \exists k, k', k \neq k', \phi_k(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \text{et } \phi_{k'}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0}} \mathcal{N}_{S,1}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i} \tag{4.38}$$

D'après le lemme 4.8 ci-dessous, $Z_{0,1}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est majorée par la série

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4} q^{5+2\,d_0+2\,d_1+2\,d_2+d_3+\deg(\mathcal{E}_0)+\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)-\deg(\mathcal{F}_3)}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}, \tag{4.39}$$

donc par la série

$$\frac{1}{(1-q\,T)^2} \widetilde{Z_{0,1}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T), \tag{4.40}$$

où $\widetilde{Z_{0,1}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{d_0, d_3 \geqslant 0} q^{2\,d_0+d_3+\deg(\mathcal{E}_0)+\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)-\deg(\mathcal{F}_3)}\, T^{3\,d_0+2\,d_3}. \tag{4.41}$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, $\widetilde{Z_{0,1}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, q^{-1+\theta})$ est majoré par

$$\frac{1}{(1-q^{-1})^2}\, q^{(3\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_0)+(2\theta-1)\,\deg(\mathcal{E}_1)+(2\theta-1)\,\deg(\mathcal{E}_2)+(2\theta-2)\,\deg(\mathcal{E}_3)-\deg(\mathcal{F}_3)}. \tag{4.42}$$

Le lemme 3.11 montre alors que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} |\mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, \widetilde{Z_{0,1}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T) \tag{4.43}$$

est strictement supérieur à q^{-1}, d'où le résultat. □

Lemme 4.8
Soit $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7$ *vérifiant*

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0. \tag{4.44}$$

On a pour tout $\boldsymbol{\mathfrak{E}} \in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ *la majoration*

$$\mathcal{N}_{S,1}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}) \leqslant q^{5+2\,d_0+2\,d_1+2\,d_2+d_3+\deg(\mathcal{E}_0)+\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)-\deg(\mathcal{F}_3)}. \tag{4.45}$$

Démonstration : Rappelons que $\mathcal{N}_{S,1}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ désigne le cardinal de l'ensemble des éléments

$$(s_0, (s_i), (t_2, t_3)) \in \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0, d_0} \times \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i} \times \prod_{2 \leqslant i \leqslant 3} \mathcal{H}_{\mathfrak{F}_i, d_0 + \sum_{j \neq i} d_j + \deg(\mathcal{E}_0) + \sum_{j \neq i} \deg(\mathcal{E}_j) - \deg(\mathcal{F}_i)} \tag{4.46}$$

vérifiant la relation

$$s_2\, t_2\, s_{\mathcal{E}_2}\, s_{\mathcal{F}_2} = s_3\, t_3\, s_{\mathcal{E}_3}\, s_{\mathcal{F}_3}. \tag{4.47}$$

Si on fixe $(s_0, (s_i), t_3)$, il existe au plus un élément t_2 satisfaisant la relation (4.47). Ainsi $\mathcal{N}_{S,1}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})$ est majoré par

$$\#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0, d_0} \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i}\, \#\mathcal{H}_{\mathfrak{F}_3, d_0+d_1+d_2+\deg(\mathcal{E}_0)+\deg(\mathcal{E}_1)+\deg(\mathcal{E}_2)-\deg(\mathcal{F}_3)} \tag{4.48}$$

Le lemme 1.17 permet de conclure. □

4.3.4 Le terme $Z_{0,0}$

Rappelons que $Z_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4 \\ \forall 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \exists k, k', k \neq k', \phi_k(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \text{et } \phi_{k'}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0}} \mathcal{N}_{S,0}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}})\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}. \tag{4.49}$$

Ainsi, d'après le corollaire 3.7, $Z_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} & T^{3\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \\ \times & \sum_{\substack{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^4 \\ \forall 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \exists k, k', k \neq k', \phi_k(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0 \\ \text{et } \phi_{k'}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \geqslant 0}} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0, d_0}\, q^{2(1-g)+2\,d_0+\sum_i d_i} \sum_{(s_i) \in \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i, d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

On définit $Z_{0,0,\mathrm{princ}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ par l'expression

$$T^{3\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \times \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0}\, q^{2(1-g)+2\,d_0+\sum_i d_i} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}. \tag{4.51}$$

et on pose

$$Z_{0,0,\mathrm{err}} \overset{\text{déf}}{=} Z_{0,0,\mathrm{princ}} - Z_{0,0}. \tag{4.52}$$

4.3.5 Le terme $Z_{0,0,\mathrm{err}}$

Proposition 4.9
La série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_{0,0,\mathrm{err}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \tag{4.53}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2.

Démonstration : Par définition, $Z_{0,0,\mathrm{err}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est majorée par la somme des six séries

$$T^{3\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \times \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{A}} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0}\, q^{2(1-g)+2\,d_0+\sum_i d_i} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}, \tag{4.54}$$

où $\mathcal{A}$ est le sous-ensemble de $\mathbf{N}^4$ constitué des éléments vérifiant successivement l'une des six conditions suivantes :

$$\psi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) < 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{4.55}$$

$$\phi_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) < 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{4.56}$$

Nous nous contentons de démontrer que la série $\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}} Z_{0,0,\mathrm{err},\psi_1}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$, où $Z_{0,0,\mathrm{err},\psi_1}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$T^{3\deg(\mathcal{E}_0)+2\deg(\mathcal{E}_1)+2\deg(\mathcal{E}_2)+2\deg(\mathcal{E}_3)}\, q^{2\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4\\ \psi_1(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})<0}} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} q^{2(1-g)+2\,d_0+\sum_i d_i} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}, \tag{4.57}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre 2. Le procédé est le même pour les séries correspondant aux cinq autres conditions.

D'après le lemme 3.4 et la définition de ψ_1, pour tout réel $\theta > 0$, la série $Z_{0,0,\mathrm{err},\psi_1}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est majorée par

$$c_\theta\, C^{1+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i)}\, T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)}$$
$$\sum_{\substack{d_1\geqslant 0\\ 0\leqslant d_0<\deg(\mathcal{F}_1)\\ 0\leqslant d_2<\deg(\mathcal{F}_1)\\ 0\leqslant d_3<\deg(\mathcal{F}_1)}} (d_1+1)\, q^{3+2(1-g)+3\,d_0+2\,d_1+(2+\theta)\,(d_2+d_3)} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}, \tag{4.58}$$

donc par

$$\frac{1}{(1-q\,T)^2}\widetilde{Z}_{0,0,\mathrm{err},\psi_1,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T) \tag{4.59}$$

où $\widetilde{Z}_{0,0,\mathrm{err},\psi_1,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$c_\theta\, C^{1+\sum_v 2\,\mathrm{Max}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))-\mathrm{Min}(v(\mathcal{E}_i)+v(\mathcal{F}_i))}$$
$$\times\, T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)}$$
$$\times \sum_{\substack{0\leqslant d_0<\deg(\mathcal{F}_1)\\ 0\leqslant d_2<\deg(\mathcal{F}_1)\\ 0\leqslant d_3<\deg(\mathcal{F}_1)}} q^{3+2(1-g)+3\,d_0+(2+\theta)(d_2+d_3)} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\,d_2+2\,d_3}. \tag{4.60}$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.2 on montre que pour $\theta > 0$ assez petit, la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}})\widetilde{Z}_{0,0,\mathrm{err},\psi_1,\theta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, q^{-1+\theta}) \tag{4.61}$$

est absolument convergente, ce qui permet de conclure. □

4.3.6 Le terme $Z_{0,0,\mathbf{princ}}$

Proposition 4.10
La série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{E}}\in \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\boldsymbol{\mathcal{E}}}} Z_{0,0,princ}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \tag{4.62}$$

s'écrit

$$Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3)\, Z_{\mathscr{C}}(q\,T^2)^3\, \widetilde{Z}_{0,0,princ}(T) \tag{4.63}$$

ou $\widetilde{Z}_{0,0,princ}(T)$ *est une série de rayon de convergence strictement supérieur à* q^{-1}*, vérifiant*

$$\widetilde{Z}_{0,0,princ}\left(q^{-1}\right) = (q-1)^4\, q^{2(1-g)} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} (1-q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(S))}\, \frac{\#S(\kappa_v)}{q_v^{\dim(S)}}. \tag{4.64}$$

Démonstration : Rappelons que $Z_{0,0,\mathrm{princ}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T)$ est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} &T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\,(1-g)+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \\ &\times \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4} \#\mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0}\, q^{2\,d_0+\sum_i d_i} \sum_{(s_i)\in\prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i}} q^{\deg(\mathrm{pgcd}(\mathrm{div}(s_i)+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,d_0+2\sum_i d_i}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

D'après la remarque 2.2, pour tout $\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^4$, l'application

$$(s_0,(s_i)) \mapsto (\mathrm{div}(s_0),(\mathrm{div}(s_i))) \tag{4.66}$$

induit une surjection de l'ensemble

$$\bigsqcup_{\mathfrak{E}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\mathcal{E}}} \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_0,d_0} \times \prod_i \mathcal{H}^{\bullet}_{\mathfrak{E}_i,d_i} \tag{4.67}$$

sur l'ensemble des éléments $(\mathcal{G}_0,(\mathcal{G}_i)) \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^4$ de degré $\boldsymbol{d}$, surjection dont les fibres sont de cardinal $(q-1)^4$. Ainsi la somme

$$\sum_{\mathfrak{E}\in\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\mathcal{E}}} Z_{0,0,\mathrm{princ}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathfrak{E}}, T) \tag{4.68}$$

est égale à

$$\begin{aligned} &(q-1)^4\, T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2(1-g)+2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \\ &\times \sum_{(\mathcal{G}_0,(\mathcal{G}_i))\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^4} q^{2\,\deg(\mathcal{G}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{G}_i)+\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{G}_i+\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i))}\, T^{3\,\deg(\mathcal{G}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{G}_i)}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

L'expression précédente peut s'écrire comme le produit eulérien (*cf.* les notations 3.1)

$$\begin{aligned} (q-1)^4\, q^{2(1-g)}\; &T^{3\,\deg(\mathcal{E}_0)+2\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)}\, q^{2\,\deg(\mathcal{E}_0)+\sum_i \deg(\mathcal{E}_i)-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)} \\ &\times Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3) \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} F_{(v(\mathcal{F}_i)+v(\mathcal{E}_i))}(q_v, q_v\,T^{2\,f_v}) \end{aligned} \tag{4.70}$$

On pose, pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$,

$$Z_{1,v}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\,(q^2\,T^3)^{f_v\,\boldsymbol{e}_0}\;(q\,T^2)^{f_v\,\sum_i e_i}\;q_v^{-\sum_i f_i} \times F_{(e_i+f_i)}(q_v, q_v\,T^{2\,f_v}). \quad (4.71)$$

Ainsi, on a

$$Z_{0,0,\text{princ}}(T) = \sum_{\mathfrak{E}\in\text{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^7} \mu_S(\mathfrak{E}) \sum_{\mathfrak{E}\in\widetilde{\text{Pic}}^0(\mathscr{C})^7_{S,\mathfrak{E}}} Z_{0,0,\text{princ}}(\mathfrak{E},\mathfrak{E},T) \quad (4.72)$$

$$= (q-1)^4\,q^2\,Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3) \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} Z_{1,v}(T). \quad (4.73)$$

On pose

$$Z_{2,v}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(1-(q\,T^2)^{f_v}\right)^3 Z_{1,v}(T) \quad (4.74)$$

de sorte qu'on a

$$Z_{0,0,\text{princ}} = (q-1)^4 q^{2(1-g)} Z_{\mathscr{C}}(q^2\,T^3)\,Z_{\mathscr{C}}(q\,T^2)^3 \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} Z_{2,v}(T). \quad (4.75)$$

En reprenant les notations 3.1, $Z_{2,v}(T)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{1-(q^4\,T^6)^{f_v}} \sum_{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})(q^2\,T^3)^{f_v\,e_0}\;(q\,T^2)^{f_v\,\sum_i e_i}\;q_v{}^{-\sum_i f_i} \times \widetilde{F}_{(e_i+f_i)}(q_v, q_v\,T^{2\,f_v}). \quad (4.76)$$

La proposition 3.2 montre que la série $\prod_v Z_{2,v}(T)$ a un rayon de convergence strictement supérieur à q^{-1}.

Pour terminer la démonstration, il suffit donc de montrer qu'on a pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$ la relation

$$Z_{2,v}(q^{-1}) = (1-q_v^{-1})^{\text{rg}(\text{Pic}(S))}\,\frac{\#S(\kappa_v)}{q_v^{\dim(S)}}. \quad (4.77)$$

On pose, pour $(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) \in \{0,1\}^7$

$$\text{fact}_v(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{1-q_v^{-2}}\,q_v^{-\boldsymbol{e}_0-\sum_i(e_i+f_i)}\,\widetilde{F}_{(e_i+f_i)}\left(q_v, q_v^{-1}\right). \quad (4.78)$$

On a donc

$$Z_{2,v}(q^{-1}) = \sum_{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\;\text{fact}_v(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}). \quad (4.79)$$

Le lemme 4.11 ci-dessous et le lemme 1.25 montrent que la relation (4.77) est bien vérifiée, ce qui conclut la démonstration. □

Lemme 4.11
On a la relation

$$\sum_{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\ \mathrm{fact}_v(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = \sum_{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^7} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\ \mathrm{dens}_{S,v}(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}). \quad (4.80)$$

Démonstration : Rappelons qu'on a (*cf.* les notations 1.23 et 1.24)

$$\mathrm{dens}_{S,v}(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = \frac{\#\left\{(x_0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\kappa_v^{(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})},\quad \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} x_i\,y_i = 0\right\}}{q_v^6}. \quad (4.81)$$

La relation (4.80) (voire même plus directement le fait que le membre de gauche de (4.80) coïncide avec le membre de droite de (4.77)) peut très bien se vérifier par force brute, avec l'aide par exemple d'un logiciel de calcul formel. Montrons comment on peut la retrouver via un minimum de calcul.

Fixons $e_0\in\{0,1\}$. Tout d'abord, rappelons qu'on a d'après le lemme 3.9

$$\sum_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^6} \mu_S^0(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = 0. \quad (4.82)$$

Ensuite, on va montrer ci-dessous qu'on a

$$\forall(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^6,\quad \mathrm{fact}_v(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) - \mathrm{fact}_v(e_0,1,1) = \mathrm{dens}_{S,v}(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) - \mathrm{dens}_{S,v}(e_0,1,1). \quad (4.83)$$

Les deux relations (4.82) et (4.83) montrent le lemme.

Pour montrer la relation (4.83), on commence par remarquer que par définition de de $\widetilde{F}_{(e_i+f_i)}$ on a

$$\mathrm{fact}_v(e_0,\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = (1-q_v^{-1})^3\, q_v^{-\boldsymbol{e}_0-\sum_i(e_i+f_i)} \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^3} q_v^{\mathrm{Min}(n_i+e_i+f_i)}\, q_v^{-\sum_i n_i} \quad (4.84)$$

$$= (1-q_v^{-1})^3\, q_v^{-e_0} \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^3\\ n_i\geqslant e_i+f_i}} q_v^{\mathrm{Min}(n_i)}\, q_v^{-\sum_i n_i}. \quad (4.85)$$

Par symétrie, il suffit de montrer qu'on a pour tout $(e_2,e_3,\boldsymbol{f})\in\{0,1\}^5$ la relation

$$\mathrm{fact}_v(e_0,(0,e_2,e_3),\boldsymbol{f}) - \mathrm{fact}(e_0,(1,e_2,e_3),\boldsymbol{f}) = \mathrm{dens}_{S,v}(e_0,(0,e_2,e_3),\boldsymbol{f}) - \mathrm{dens}_{S,v}(e_0,(1,e_2,e_3),\boldsymbol{f}) \quad (4.86)$$

Considérons le cas où $f_1 = 0$. D'après (4.81), le membre de droite de (4.86) vaut alors

$$q_v^{-e_0-5}\,\#\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \kappa_v^{(0,e_2,e_3,\boldsymbol{f})},\ x_1 \neq 0,\ \sum x_i\, y_i = 0\right\} = q_v^{-e_0-5}\,(q_v-1)\#\kappa_v^{(e_2,e_3,f_2,f_3)} \tag{4.87}$$

$$= (1-q_v^{-1})\, q_v^{-e_0-e_2-e_3-f_2-f_3} \tag{4.88}$$

et d'après (4.85) celui de gauche vaut

$$(1-q_v^{-1})^3\, q_v^{-e_0} \sum_{\substack{(n_2,n_3)\in\mathbf{N}^2\\ n_2\geqslant e_2+f_2\\ n_3\geqslant e_3+f_3}} q_v^{\mathrm{Min}(0,n_2,n_3)}\, q_v^{-n_2-n_3} = (1-q_v^{-1})\, q_v^{-e_0-e_2-e_3-f_2-f_3} \tag{4.89}$$

d'où l'égalité cherchée dans ce cas.

Supposons à présent $f_1 = 1$. D'après (4.81), le membre de droite de (4.86) vaut

$$q_v^{-e_0-5}\,(q_v-1)\#\left\{(x_2,y_2,x_3,y_3) \in \kappa_v^{(e_2,e_3,f_2,f_3)},\ x_2\, y_2 + x_3\, y_3 = 0\right\}. \tag{4.90}$$

Par un calcul facile, on trouve que cette quantité est égale à

$$\begin{cases} q_v^{-1-e_0-e_2-e_3-f_2-f_3}(q_v-1) & \text{si} \quad e_2+f_2 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad e_3+f_3 \geqslant 1 \\ q_v^{-3-e_0-e_2-f_2}(q_v-1)(2\,q_v-1) & \text{si} \quad e_2+f_2 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad e_3+f_3 = 0 \\ q_v^{-5-e_0}\,(q_v-1)(q_v^3+q_v^2-q_v) & \text{si} \quad e_2+f_2 = 0 \quad \text{et} \quad e_3+f_3 = 0. \end{cases} \tag{4.91}$$

D'après (4.85) le membre de gauche de (4.86) vaut

$$(1-q_v^{-1})^3\, q_v^{-e_0} \sum_{\substack{(n_2,n_3)\in\mathbf{N}^2\\ n_2\geqslant e_2+f_2\\ n_3\geqslant e_3+f_3}} q_v^{\mathrm{Min}(1,n_2,n_3)}\, q_v^{-1-n_2-n_3}. \tag{4.92}$$

Si $e_2+f_2 \geqslant 1$ et $e_3+f_3 \geqslant 1$, l'expression (4.92) s'écrit

$$(1-q_v^{-1})^3\, q_v^{-e_0} \sum_{\substack{(n_2,n_3)\in\mathbf{N}^2\\ n_2\geqslant e_2+f_2\\ n_3\geqslant e_3+f_3}} q_v^{-n_2-n_3} = (1-q_v^{-1}) q_v^{-e_0-e_2-f_2-e_3-f_3}. \tag{4.93}$$

Si $e_2 + f_2 \geqslant 1$ et $e_3 + f_3 = 0$, on a

$$(4.92) = (1 - q_v^{-1})^3 \, q_v^{-e_0} \left[\sum_{\substack{(n_2,n_3)\in\mathbf{N}^2 \\ n_2 \geqslant e_2+f_2 \\ n_3 \geqslant 1}} q_v^{-n_2-n_3} + \sum_{n_2 \geqslant e_2+f_2} q_v^{-1-n_2} \right] \tag{4.94}$$

$$= q_v^{-e_0} \left[(1 - q_v^{-1}) \, q_v^{-e_2-f_2-1} + (1 - q_v^{-1})^2 q_v^{-e_2-f_2-1} \right] \tag{4.95}$$

$$= q_v^{-3-e_0-e_2-f_2} (q_v - 1)(2\, q_v - 1) \tag{4.96}$$

Enfin, si $e_2 + f_2 = e_3 + f_3 = 0$, on a

$$(4.92) = (1 - q_v^{-1})^3 \, q_v^{-e_0} \left[q_v^{-1} + \sum_{n_2 \geqslant 1} q_v^{-1-n_2} + \sum_{n_3 \geqslant 1} q_v^{-1-n_3} + \sum_{\substack{n_2 \geqslant 1 \\ n_3 \geqslant 1}} q_v^{-n_2-n_3} \right] \tag{4.97}$$

$$= q_v^{-e_0} \left[q_v^{-1} (1 - q_v^{-1})^3 \; + 2\, q_v^{-2} (1 - q_v^{-1})^2 \; + q_v^{-2} (1 - q_v^{-1}) \right] \tag{4.98}$$

$$= q_v^{-5-e_0} (q_v - 1) \left(q_v^3 + q_v^2 - q_v \right) \tag{4.99}$$

d'où le résultat cherché. □

Références

[BM90] V. V. Batyrev and Yu. I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3) :27–43, 1990.

[Bou03] David Bourqui. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel. *J. Reine Angew. Math.*, 562 :171–199, 2003.

[Bro07] T.D. Browning. The Manin conjecture in dimension 2. Lecture notes for the "School and conference on analytic number theory", ICTP, Trieste, 23/04/07-11/05/07 `arXiv:0704.1217v1`, 2007.

[CLT00] Antoine Chambert-Loir and Yuri Tschinkel. Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. I. *Compositio Math.*, 124(1) :65–93, 2000.

[CLT02] Antoine Chambert-Loir and Yuri Tschinkel. On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. *Invent. Math.*, 148(2) :421–452, 2002.

[Cox95a] David A. Cox. The functor of a smooth toric variety. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(2) :251–262, 1995.

[Cox95b] David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, 4(1) :17–50, 1995.

[Der06] Ulrich Derenthal. Singular Del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces. `arXiv:math/0604194v1`, 2006.

[dlB02] Régis de la Bretèche. Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de del Pezzo de degré 5. *Duke Math. J.*, 113(3) :421–464, 2002.

[dlBB07] R. de la Bretèche and T. D. Browning. On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree 4. I. *Michigan Math. J.*, 55(1) :51–80, 2007.

[dlBBD07] Régis de la Bretèche, Tim D. Browning, and Ulrich Derenthal. On Manin's conjecture for a certain singular cubic surface. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(1) :1–50, 2007.

[FMT89] Jens Franke, Yuri I. Manin, and Yuri Tschinkel. Rational points of bounded height on Fano varieties. *Invent. Math.*, 95(2) :421–435, 1989.

[Has04] B. Hassett. Equations of universal torsors and Cox rings. In *Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars Summer Term 2004*, pages 135–143. Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004.

[HK00] Yi Hu and Sean Keel. Mori dream spaces and GIT. *Michigan Math. J.*, 48 :331–348, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.

[Pey03] Emmanuel Peyre. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. `arXiv:math/0303067v1`, 2003.

[Sal98] Per Salberger. Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, (251) :91–258, 1998. Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996).