



HAL
open science

La transformation de Fisz pour l'estimation de l'image des intensités d'un bruit Poissonien dans le domaine des ondelettes

Jalal M. Fadili, Jérôme Mathieu, Michel Desvignes

► **To cite this version:**

Jalal M. Fadili, Jérôme Mathieu, Michel Desvignes. La transformation de Fisz pour l'estimation de l'image des intensités d'un bruit Poissonien dans le domaine des ondelettes. *Traitement du Signal*, 2004, pp.313-328. hal-00263866

HAL Id: hal-00263866

<https://hal.science/hal-00263866>

Submitted on 13 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La transformation de Fisz pour l'estimation
de l'image des intensités d'un bruit

Poissonien dans le domaine des ondelettes

*The Fisz transformation for Poisson
intensity estimation of images in the
wavelet domain*

Jalal M. Fadili^a, Jérôme Mathieu^a et Michel Desvignes^b

Soumis à *Traitement du Signal*

^a GREYC CNRS UMR 6072, ENSICAEN 6, Bd du Maréchal Juin, 14050 Caen, France.

^b LIS CNRS UMR 5083, 961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 St. Martin d'Hères.

Mél: Jalal.Fadili@greyc.ismra.fr

Résumé

Nous présentons un nouvel estimateur de l'image des intensités (taux de comptage) d'un bruit Poissonien dans le domaine des ondelettes. Cette méthode est basée sur la normalité asymptotique d'une fonction non-linéaire des coefficients de détail et d'échelle de la transformée de Haar, appelée la transformée de **Fisz**. Nous exposons quelques résultats asymptotiques, tels que la normalité et la décorrélation des pixels de l'image transformée. Fort de ces résultats, l'image originale bruitée par un processus de Poisson, peut être considérée après transformation de Fisz comme étant contaminée par un bruit additif gaussien et blanc. Ainsi, les débruiteurs classiques s'appliquent directement. Plus exactement, nous appliquons dans le cadre de ce papier un estimateur bayésien que nous avons récemment développé, utilisant comme a priori une nouvelle classe de distributions, les *formes K de Bessel* (FKB). Les simulations menées montrent que la transformation de Fisz offre des performances au moins aussi bonnes que les transformations stabilisatrices de la variance pour des images des intensités régulières ou constantes par morceaux. Elle dépasse clairement ces approches lorsque le taux de comptage est faible. Combiner la transformation de Fisz avec le débruiteur bayésien FKB offre les meilleurs résultats.

Mots clés

Ondelettes, processus de Poisson, transformation de Fisz, estimateur bayésien, formes K de Bessel.

Abstract

*A novel wavelet-based Poisson-intensity estimator of images is presented. This method is based on the asymptotic normality of a certain function of the Haar wavelet and scaling coefficients called the **Fisz** transformation. Some asymptotic results such as normality and decorrelation of the transformed image samples are extended to the 2D case. This Fisz-transformed image is then treated as if it was independent and gaussian variables. Then we apply a novel Bayesian denoiser that we have recently developed. In the latter, a prior model is imposed on the wavelet coefficients designed to capture the sparseness of the wavelet expansion. Seeking probability models for the marginal densities of the wavelet coefficients, the new family of Bessel K forms densities are shown to fit very well to the observed histograms. Exploiting this prior, we designed a Bayesian nonlinear denoiser and a closed-form for its expression was derived. Our Fisz-transformation based Bayesian denoiser compares very favorably to variance stabilizing transformation methods in both smooth and piece-wise constant intensities. It clearly outperforms the other denoising methods especially in the low-count setting. Combining the Fisz transform and the BKF Bayesian denoiser yields the best performance.*

Index Terms

Wavelets, Poisson process, Fisz transformation, Bayesian estimator, Bessel K forms.

I. INTRODUCTION

La régression non-paramétrique (ou débruitage) dans le domaine des ondelettes est devenue un outil fondamental en analyse des signaux et des images. Elle continue actuellement à faire l'objet d'un effort de recherche soutenu. L'objectif est d'estimer une fonction (nD) g à partir de ses échantillons contaminés par un bruit supposé la plupart du temps gaussien. Seules quelques hypothèses sont imposées sur g , e.g. appartenance à un espace de régularité donné (Sobolev, Besov, etc). Durant les années 1990, la littérature de la régression non-paramétrique a été dominée par les estimateurs non-linéaires par seuillage dur et doux [Donoho et Johnstone 1994, 1995; Donoho et al. 1995]. Ces estimateurs forment un nouveau sous-ensemble d'une ancienne classe d'estimateurs non-paramétriques basés sur les séries orthogonales. Outre un support théorique bien établi, ces débruiteurs dans le domaine des ondelettes bénéficient d'algorithmes rapides et simples pour leur implémentation ce qui a largement contribué à leur popularité.

Depuis les travaux fondateurs de Donoho & Johnstone [Donoho et Johnstone 1994], de nombreux articles ont adapté ou proposé des modifications de l'algorithme original pour des problèmes en traitement d'images. Plusieurs estimateurs adaptatifs dans le domaine des ondelettes ont alors été développés, voir par exemple la revue détaillée dans [Vidakovic 1999; Percival et Walden 2000]. Par ailleurs, plusieurs estimateurs bayésiens, que nous distinguons des approches précédentes dites classiques, ont été proposés. Ces estimateurs s'avèrent plus efficaces et moins *ad-hoc* que leurs homologues classiques. Dans le paradigme bayésien, une distribution a priori est imposée sur les coefficients de détail de la transformée d'ondelettes (TO). La forme de cette distribution tire profit du caractère parcimonieux (creux) de la TO [Mallat 1999]. Ainsi, l'image est estimée en appliquant une règle d'estimation bayésienne appropriée à la distribution a posteriori des coefficients de détail de la TO. Une étude pratique détaillée impliquant des estimateurs récents classiques et bayésiens a été menée dans [Antoniadis et al. 2001]. Cette étude de simulations dresse une carte comparative des performances et comportements de ces estimateurs à nombre d'échantillons fini.

Si la plupart des débruiteurs dans le domaine des ondelettes existant s'attaquent à l'estimation d'une composante déterministe noyée dans un bruit additif (souvent gaussien), le débruitage en présence d'un bruit Poissonien pose lui des problèmes spécifiques. Ce dernier cas a déjà fait l'objet de quelques travaux dans la littérature [Starck et Murtagh 2001]. L'approche usuelle consiste à utiliser une transformation stabilisatrice de la variance, telle que la transformation d'Anscombe. L'estimation est ensuite effectuée en considérant le bruit ainsi transformé comme additif, gaussien et blanc. Cependant, cette transformation atteint clairement ses limites à faible

taux de comptage, où l'on s'éloigne des conditions du théorème central limite. L'alternative proposée par Kolaczyk [Kolaczyk 1999; Charles et Rasson 2003] consiste à ajuster les seuils à chaque échelle, prenant en compte la nature même du bruit Poissonien. Son algorithme se montre plus performant que la transformée d'Anscombe dans certains cas. Toutefois, une limitation majeure de l'algorithme de Kolaczyk est que seule l'ondelette de Haar peut être utilisée. Ainsi, cette méthode n'est pas adaptée pour des images d'intensités¹ autres que constantes par morceaux. Plus récemment, Sardy et al. [Sardy et al. 2004] ont proposé un estimateur du maximum de vraisemblance pénalisé par la norme L_1 . En dépit de son attrait théorique, le problème de minimisation convexe sous contraintes induit par cet estimateur est très complexe et extrêmement consommateur en temps de calcul.

Dans cet article, nous présentons un estimateur de l'image des intensités d'un bruit Poissonien dans le domaine des ondelettes basé sur la normalité asymptotique d'une fonction non-linéaire des coefficients de détail et d'échelle de la transformée de Haar, appelée la transformée de Fisz. Une des originalités de ce travail est d'étendre les résultats énoncés dans [Fryzlewicz et Nason 2003] en 1D, ce qui n'est pas trivial a priori. Plus précisément, nous montrons quelques propriétés statistiques de cette transformée, notamment la décorrélation et la normalité asymptotiques du bruit dans l'image transformée. Ainsi, on a mis en évidence que dans le cas 2D, la vitesse de convergence vers ces propriétés est plus rapide qu'en 1D. En outre, nous mettons en exergue, par le biais de simulations, la robustesse de ces propriétés asymptotiques vis-à-vis de l'écartement des conditions idéales pour lesquelles ces propriétés sont énoncées. Exploitant ces propriétés, on se retrouve alors dans les conditions habituelles d'une image contaminée par un bruit additif gaussien. Ainsi, les débruiteurs usuels peuvent directement s'appliquer. Plus spécifiquement, nous mettons à profit un débruiteur bayésien que nous avons introduit récemment, et qui utilise une nouvelle famille de distributions a priori appelées les formes K de Bessel (FKB) [Fadili 2003].

Cet article sera organisé comme suit : dans la Section II nous introduisons le problème de la régression non-paramétrique pour le bruit additif gaussien avant de s'attaquer au contexte du bruit Poissonien. Puis nous présentons le débruiteur bayésien dans les domaine des ondelettes, utilisant les formes K de Bessel (FKB). La Section III sera consacrée au problème du débruitage en présence d'un bruit Poissonien. Dans cette section, quelques résultats fondamentaux sur la transformée de Fisz ainsi que l'algorithme correspondant seront décrits. Dans la Section IV, nous

¹Dans le cadre de cet article, nous employons "image des intensités" (issue du vocabulaire statistique) pour dénommer l'image des taux de comptage moyens que nous devons estimer.

comparons les performances de notre algorithme avec les approches décrites dans la littérature aussi bien sur des données simulées que réelles.

II. ONDELETTES, DÉBRUITAGE ET BRUIT GAUSSIEN

A. Débruitage classique dans le domaine de la TO

Considérons tout d'abord le cas gaussien additif. Pour le bruit Poissonien, une transformation appropriée (Fisz) sera appliquée de façon à se ramener au cas gaussien. Soit $g_{mn}, m, n = 1, \dots, N$ une image réelle échantillonnée régulièrement. N est considéré (mais sans restriction) comme une puissance de 2 ($N = 2^J$). Soit l'équation d'observation usuelle suivante :

$$y_{mn} = g_{mn} + \epsilon_{mn} \quad (1)$$

où ϵ_{mn} sont les réalisations de variables aléatoires normales indépendantes, identiquement distribuées (iid), centrées et de variance σ^2 . Elles sont aussi indépendantes des g_{mn} . En régression non-paramétrique, le but est de recouvrer l'image g à partir des observations y_{mn} , sans imposer une structure paramétrique explicite sur l'image g . Soit \mathbf{y} , \mathbf{g} et $\boldsymbol{\epsilon}$ une représentation matricielle des échantillons correspondants. Désormais, nous nous plaçons dans le cadre de la TO discrète (TOD) dyadique orthonormale que nous implémentons par l'algorithme pyramidal [Mallat 1989]. Nous posons alors $\mathbf{D} = \mathcal{W}\mathbf{y}$, $\mathbf{S} = \mathcal{W}\mathbf{g}$ et $\mathbf{V} = \mathcal{W}\boldsymbol{\epsilon}$, où \mathcal{W} est l'opérateur de la TOD bi-dimensionnelle. Dans la TOD 2D, les sous-bandes HH_j , HL_j et LH_j , $j = 1, \dots, J_c \leq J$ correspondent respectivement aux coefficients de détail dans les orientations diagonale, horizontale et verticale, alors que la sous-bande LL_{J_c} est celle de l'approximation à l'échelle la plus grossière J_c . s_{mn}^{oj} est le coefficient de détail de l'image inconnue \mathbf{g} à la localisation (m, n) , l'échelle j et l'orientation o . De manière analogue, nous définissons d_{mn}^{oj} et v_{mn}^{oj} pour l'image observée et le bruit. L'orthonormalité de la base implique que les v_{mn}^{oj} sont aussi iid gaussiens centrés de même variance σ^2 . Il découle alors de l'Eq.1 que dans le domaine de la TOD :

$$d_{mn}^{oj} = s_{mn}^{oj} + v_{mn}^{oj}, j = 1, \dots, J_c \leq J; m, n = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (2)$$

En s'appuyant sur la parcimonie ("sparseness" en anglais) de la TOD, on peut raisonnablement postuler que l'information pertinente de l'image \mathbf{g} sera essentiellement concentrée dans peu de coefficients de détail de la TOD de l'image observée, alors que les petites valeurs sont majoritairement attribuées au bruit qui contamine uniformément tous les coefficients d'ondelettes. Il est aussi fort conseillé de garder intacts les coefficients d'approximation ce qui se justifie par le fait que ces termes basses-fréquences contiennent une part d'information importante de l'image à estimer \mathbf{g} . En appliquant un estimateur, généralement non-linéaire (e.g.

seuillage), aux coefficients de détail et en inversant la TOD, on obtient une estimée de l'image \mathbf{g} . La littérature du débruitage est abondante en approches diverses sur le choix de la forme de l'estimateur non-linéaire à appliquer, aussi bien avec que sans a priori statistique (i.e. bayésien ou non). Dans [Antoniadis et al. 2001], les auteurs exposent une revue détaillée des diverses méthodes existantes et une étude de leurs performances à nombre d'échantillons fini.

B. Débruitage bayésien et l'a priori FKB

A ce stade, nous utilisons un débruiteur bayésien présenté dans [Fadili 2003]. Nous exposons uniquement les aspects clés liés à ce travail puisqu'aucune nouveauté concernant ce débruiteur n'est incluse ici.

Dans l'approche bayésienne, une loi a priori est imposée sur les coefficients de détail de la TOD de l'image \mathbf{g} , c'est à dire sur ses coefficients de détail s_{mn}^{oj} introduits dans l'Eq.2. Compte tenu du caractère creux de la TOD, les densités de probabilité de ces coefficients sont connues pour être généralement symétriques, leptokurtiques et à queues épaisses ou longues. Cette dernière propriété est bien au delà de ce que peut offrir le simple modèle a priori gaussien. Plusieurs choix ont été proposés dans la littérature : mélange de deux distributions normales [Chipman et al. 1997] ou d'une distribution normale et une Dirac en zéro [Clyde et al. 1998; Abramovich et al. 1998], mélange d'une double exponentielle et d'une Dirac en zéro [Vidakovic et Ruggeri 2000], les distributions gaussiennes généralisées (DGG) [Simoncelli et Adelson 1996; Chang et al. 2000a, 2000b]. Ces a priori s'avèrent cependant insuffisants pour modéliser les queues épaisses (longues) des distributions a priori des coefficients de détail. Dans [Achim et al. 2001], les auteurs ont mis à profit les distributions α -stables [Nikias et Shao 1995]. Bien que le modèle soit adapté, l'estimation des hyperparamètres reste un point critique de leur méthode particulièrement en présence de bruit, ce qui rend ce modèle inutilisable à faible RSB.

En outre, il convient de faire remarquer que pour les a priori les plus intéressants (DGG et α -stable), l'estimateur bayésien utilisé ne possède aucune expression analytique générale ce qui nécessite une intégration numérique instable (bornes d'intégration infinies) et extrêmement coûteuse en temps de calcul.

Plus récemment, nous avons proposé une nouvelle famille de distributions a priori à deux paramètres en exploitant les travaux de [Grenander et Srivastava 2001; Srivastava et al. 2002]. Ce modèle se révèle très efficace pour modéliser la distribution d'une grande classe d'images filtrées par une variété de filtres passe-bandes. Il est évident que la TOD fait partie de cette classe de filtres. Le modèle FKB est alors adapté pourvu que la distribution des coefficients de détail soit unimodale, symétrique et leptokurtique. La densité de probabilité des FKB est

donnée par :

$$f(x; c, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \left(\frac{c}{2}\right)^{-\frac{p}{2}-\frac{1}{4}} \left|\frac{x}{2}\right|^{p-\frac{1}{2}} K_{p-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{c}}|x|\right) \quad (3)$$

pour $p > 0, c > 0$, où $K_\nu(x)$ est la fonction de Bessel modifiée [Abramowitz et Stegun 1972; Gradshteyn et Ryzhik 1980] et $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma. p et c sont respectivement les paramètres de forme et d'échelle. En utilisant cet a priori dans [Fadili 2003], nous avons montré son efficacité pour modéliser la distribution des coefficients d'ondelettes sur une grande base d'images. Nous avons aussi établi une expression analytique de l'espérance conditionnelle a posteriori (ECP), minimisant le risque bayésien L^2 :

$$s_{\text{ECP}}(d) = p\sigma \frac{e^{\left(\frac{-\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}}{2}\right)^2} D_{-p-1}\left(-\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}\right) - e^{\left(\frac{\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}}{2}\right)^2} D_{-p-1}\left(\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}\right)}{e^{\left(\frac{-\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}}{2}\right)^2} D_{-p}\left(-\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}\right) + e^{\left(\frac{\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}}{2}\right)^2} D_{-p}\left(\frac{d}{\sigma} + \sigma\sqrt{\frac{2}{c}}\right)} \quad (4)$$

pour $0 < p \leq 1$ et c strictement positif. $D_\nu(x)$ est la fonction "Parabolic Cylinder" d'ordre fractionnaire ν [Abramowitz et Stegun 1972; Gradshteyn et Ryzhik 1980]. Afin d'implémenter cet estimateur, nous avons mis au point un estimateur des hyperparamètres (p , c et σ^2) par une méthode de cumulants [Fadili 2003].

III. ONDELETTES, DÉBRUITAGE ET BRUIT POISSONNIEN

Le cadre usuel de la régression non-paramétrique dans le contexte d'un tel bruit est le suivant: le processus Poissonien indépendant est observé et échantillonné régulièrement dans une image \mathbf{y} . Chaque échantillon y_{mn} est la réalisation d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre inconnu λ_{mn} (intensité du processus), que l'on veut estimer. L'image de ces intensités sera notée $\mathbf{\Lambda}$. L'estimation de l'intensité d'un processus de Poisson dans le domaine de la TO a déjà fait l'objet de quelques travaux [Starck et Murtagh 2001; Kolaczyk 1999]. Classiquement, ceci consiste à utiliser une transformation stabilisatrice (e.g. Anscombe), de façon à considérer le processus stabilisé comme additif gaussien. Ainsi, les méthodes de débruitage en présence de bruit gaussien peuvent s'appliquer, aboutissant après transformation (stabilisatrice) inverse à une estimation de l'intensité du processus.

Fryzlewicz et Nason [Fryzlewicz et Nason 2003] ont récemment proposé une alternative basée sur la normalité asymptotique des coefficients de la transformée de Fisz 1D. Ici, nous proposons d'étendre cette idée au cas des images (2D). Les étapes de la transformation et les expressions des filtres non-normalisés de Haar qu'elle utilise, sont explicités. Par ailleurs, nous consolidons notre argumentation en établissant la preuve des résultats asymptotiques de décorrélation et de normalité dans le cas des images.

A. La transformation de Fisz 2D

Étant donnée une image de comptages y_{mn} , chaque y_{mn} est la réalisation d'une variable aléatoire $Y_{mn} \sim \mathcal{P}(\lambda_{mn})$, la transformation de Fisz se décrit de la manière suivante :

- 1) Appliquer une échelle de décomposition de la transformée d'ondelettes de Haar. A noter que les filtres non normalisés $\{1/2, -1/2\}$ et $\{1/2, 1/2\}$ sont utilisés. Les coefficients de détail d_{mn}^o , et les coefficients d'approximation a_{mn}^{LL} s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
a_{mn}^{LL} &= \frac{(y_{2m+1,2n+1} + y_{2m,2n+1}) + (y_{2m+1,2n} + y_{2m,2n})}{4} \\
d_{mn}^{HH} &= \frac{(y_{2m+1,2n+1} + y_{2m,2n}) - (y_{2m+1,2n} + y_{2m,2n+1})}{4} \\
d_{mn}^{HL} &= \frac{(y_{2m+1,2n+1} + y_{2m,2n+1}) - (y_{2m+1,2n} + y_{2m,2n})}{4} \\
d_{mn}^{LH} &= \frac{(y_{2m+1,2n+1} + y_{2m+1,2n}) - (y_{2m,2n+1} + y_{2m,2n})}{4}
\end{aligned} \tag{5}$$

- 2) Modifier les coefficients de détail comme suit:

$$z_{mn}^o = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{m,n}^{LL} = 0 \\ \frac{d_{mn}^o}{\sqrt{a_{mn}^{LL}}} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

Le lemme suivant prouve que ces nouveaux coefficients de détail sont les réalisations d'une variable aléatoire Z_{mn}^o dont la distribution asymptotique est gaussienne :

Lemme 1 *Si les Y_{mn} sont des variables indépendantes suivant des lois de Poisson avec des intensités λ_{mn} , alors:*

$$Z_{m,n}^o \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/4) \tag{7}$$

lorsque

$$\begin{aligned}
&\text{pour } (i, j) \in \{0, 1\}^2 \quad \lambda_{2m+i, 2n+j} \rightarrow \infty, \\
&\frac{\lambda_{2m+1, 2n}}{\lambda_{2m, 2n}} \rightarrow 1, \quad \frac{\lambda_{2m+1, 2n+1}}{\lambda_{2m, 2n+1}} \rightarrow 1, \quad \frac{\lambda_{2m, 2n+1}}{\lambda_{2m, 2n}} \rightarrow 1
\end{aligned}$$

où \xrightarrow{d} dénote la convergence en distribution.

Preuve: La preuve de ce lemme découle directement du théorème de Fisz [Fisz 1955] pour des processus de Poisson 1D. Les conditions de validité du théorème de Fisz en 1D ont été judicieusement étendues pour s'adapter aux cas bidimensionnel qui nous intéresse. Notons plus particulièrement que la variance du processus transformé 2D est de 1/4 (1/2 dans le cas monodimensionnel). ■

Intuitivement, le résultat énoncé signifie que les coefficients de détail modifiés z_{mn}^o tendent en distribution vers une gaussienne (centrée et de variance 1/4) lorsque les intensités correspondantes sont suffisamment grandes et proches dans tout voisinage. Cette dernière hypothèse traduit une certaine forme de régularité sur l'image des intensités. Des déviations de ces

hypothèses induiront un écart de la normalité, ce qui sera étudié par la suite par le biais de simulations.

- 3) Répéter les étapes 1-2 à chaque échelle (jusqu'à $J = \log_2(N)$) en modifiant les coefficients de détail et en gardant les coefficients d'approximation intacts. Il en découle que les coefficients de détail à toutes les échelles et orientations, ainsi modifiés, sont une version gaussienne des coefficients originaux.
- 4) Reconstruire la nouvelle image \mathbf{u} en utilisant la transformée d'ondelettes de Haar inverse, avec les filtres non normalisés $\{1, -1\}$ et $\{1, 1\}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{y} \quad (8)$$

où \mathcal{F} est l'opérateur non-linéaire de la transformation de Fisz.

B. Propriétés de la transformation de Fisz

B.1) Propriétés asymptotiques

Nous pouvons établir une expression générale de l'opérateur \mathcal{F} . L'opérateur de reconstruction inverse peut aussi être déduit simplement de \mathcal{F} . On peut montrer que cet opérateur conserve la somme des coefficients $\sum_{m,n} u_{mn} = \sum_{m,n} y_{mn}$. Par ailleurs, la transformation de Fisz d'une image \mathbf{y} constante est idempotente, e.g. $\mathcal{F}\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Plus intéressant encore, nous prouvons les deux propriétés suivantes :

Soient Y_{mn} des variables Poissoniennes iid de même paramètre λ , alors :

Propriété 1 *Les coefficients de la transformée de Fisz \mathbf{u} sont asymptotiquement décorrélés lorsque $\lambda/N^2 \rightarrow 0$ et $N \rightarrow +\infty$.*

Propriété 2 *Les coefficients de \mathbf{u} tendent en distribution vers une loi normale avec une moyenne λ et une variance unitaire lorsque $\lambda/N^2 \rightarrow 0$ et $(\lambda, N) \rightarrow +\infty$.*

La preuve de ces propriétés est détaillée en annexe. Une autre lecture plus intuitive de ces résultats est la suivante. La transformée de Fisz d'une image de bruit de Poisson de même intensité λ est une image constante λ contaminée par un bruit blanc gaussien et additif de variance unitaire. Ceci est valide à condition que N soit suffisamment grand et que l'intensité λ soit assez grande mais négligeable devant N . On note qu'une des particularités du cas 2D est que la vitesse de convergence vers ces propriétés asymptotiques est en $O(N^{-2})$ alors qu'elle n'est qu'en $O(N^{-1})$ en 1D. De façon encore plus générale, on peut montrer en suivant les mêmes étapes qu'en annexe, que la vitesse de convergence vers ces propriétés pour un processus de Poisson blanc d -dimensionnel est en $O(N^{-d})$.

B.2) Propriétés hors conditions asymptotiques

Dans les propriétés précédentes, nous avons supposé l'image des intensités Λ constante et grande, et que N est infini. Cependant, ce cas est peu rencontré dans des images issues de mesures réelles. Qu'en est-il alors lorsque ces conditions ne sont pas vérifiées, par exemple lorsque l'image des intensités n'est plus constante mais plutôt régulière ou constante par morceaux ?

C'est pour apporter une réponse à cette question que nous nous sommes appuyés sur des simulations. Ceci nous permettra aussi d'étudier les propriétés de la transformation de Fisz lorsqu'on s'écarte du cadre asymptotique. Considérons deux images des intensités Λ de taille 256×256 codées sur 8 bits ($\lambda_{max} = 255$), l'une du fantôme de Hoffman et l'autre de Lena. L'image de Hoffman représente une image des intensités (ou taux de comptage) constante par morceaux, celle de Lena représente une image des intensités régulière par morceaux. Les versions de ces images contaminées par un bruit Poissonien sont générées en passant les images des intensités à un générateur aléatoire Poissonien.

La Fig.1 montre les quantiles de $\mathcal{F}\mathbf{y} - \mathcal{F}\Lambda$ en fonction de ceux d'une variable normale ainsi que leur fonction d'auto-corrélation (FAC) 2D. A des fins de comparaison, nous avons aussi porté sur la figure les mêmes graphes pour la transformation d'Anscombe (opérateur \mathcal{A}). Dans cet exemple, nous avons volontairement simulé une situation de faible taux de comptage en divisant les deux images originales Λ par 10 ($\lambda_{max} = 25$ coups). Pour les deux images tests, la transformation de Fisz renforce mieux la gaussianité que la transformation d'Anscombe. On assiste en effet à un départ de la normalité plus important et plus précoce dans le cas de la transformation d'Anscombe. Parallèlement, les FACs montrent que la transformation de Fisz n'introduit pas de corrélation supplémentaire, en dessous des limites de Barlett à 5% (plans horizontaux sur la figures). Fisz reste comparable à Anscombe de ce point de vue.

Nous avons répété la même expérience de simulation, faisant varier le taux de comptage en multipliant l'image des intensités originale Λ (Hoffman ou Lena) par un facteur d'échelle ρ . C'est par ce rapport qu'a été pré-multipliée chacune des images des intensités, avant de la passer au générateur aléatoire Poissonien, afin de simuler des situations allant du plus faible au plus fort taux de comptage. Par exemple, si on multiplie l'image de Hoffman (ou de Lena) par $\rho = 0.1$ avant génération aléatoire, l'intensité maximale sera de 25.

Pour chaque valeur de ρ , 50 versions bruitées \mathbf{y} ont été générées. Nous avons ensuite calculé, pour chacun des quantiles $\mathcal{F}\mathbf{y} - \mathcal{F}\Lambda$ et $\mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{A}\Lambda$, la distance à la normalité par un test de Kolmogorov-Smirnov et la statistique d'auto-corrélation par un test de Box-Pierce (test de blancheur). La Fig.2 montre ainsi clairement que la transformée de Fisz transforme mieux que

celle d'Anscombe les données Poissonniennes en gaussiennes, particulièrement à faible taux de comptage. D'autres tests de normalité tels que le test de D'Agostino-Pearson nous conduisent à la même conclusion. Le test d'auto-corrélation de Box-Pierce confirme que le processus transformé (par \mathcal{F} ou \mathcal{A}) est bien blanc. En effet, les scores statistiques portés sur les figures sont en dessous du seuil critique à 1% du test de blancheur de Box-Pierce qui est ici de 0.51.

A partir de ces résultats théoriques et de ces simulations, il paraît raisonnable de conclure que même pour des images des intensités assez hétérogènes (e.g. constantes par morceaux, régulières, etc), la transformation de Fisz permet de transformer des observations Poissonniennes indépendantes en données gaussiennes et blanches. Ceci est vrai à condition que le minimum de l'image $\mathbf{\Lambda}$ ne soit pas trop petit, et que la moyenne de l'image des intensités originales $\mathbf{\Lambda}$ soit suffisamment petite (ce qui correspond à la condition $\lambda/N^2 \rightarrow 0$). La transformation de Fisz permet la décorrélation et renforce la normalité du bruit dans l'image transformée bien mieux que la transformation d'Anscombe, et ce particulièrement à faible taux de comptage.

C. Algorithme de débruitage avec bruit de Poisson

La normalité et la blancheur du bruit dans l'image transformée de Fisz nous ramènent naturellement au contexte classique d'un bruit additif gaussien se prêtant à l'application des algorithmes de débruitage de la littérature, notamment en contexte bayésien en utilisant la nouvelle famille d'a priori des FKB décrite ci-dessus. De façon générale, pour estimer une image des intensités $\mathbf{\Lambda}$ à partir de sa version bruitée Poissonnienne \mathbf{y} , l'algorithme de débruitage que nous proposons se décrit comme suit:

1) Calculer la transformée de Fisz $\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{y}$.

2) Compte tenu de ce qui a précédé, l'image transformée \mathbf{u} peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{u} \simeq \mathcal{F}\mathbf{\Lambda} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (9)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est un bruit additif blanc et gaussien de variance unitaire.

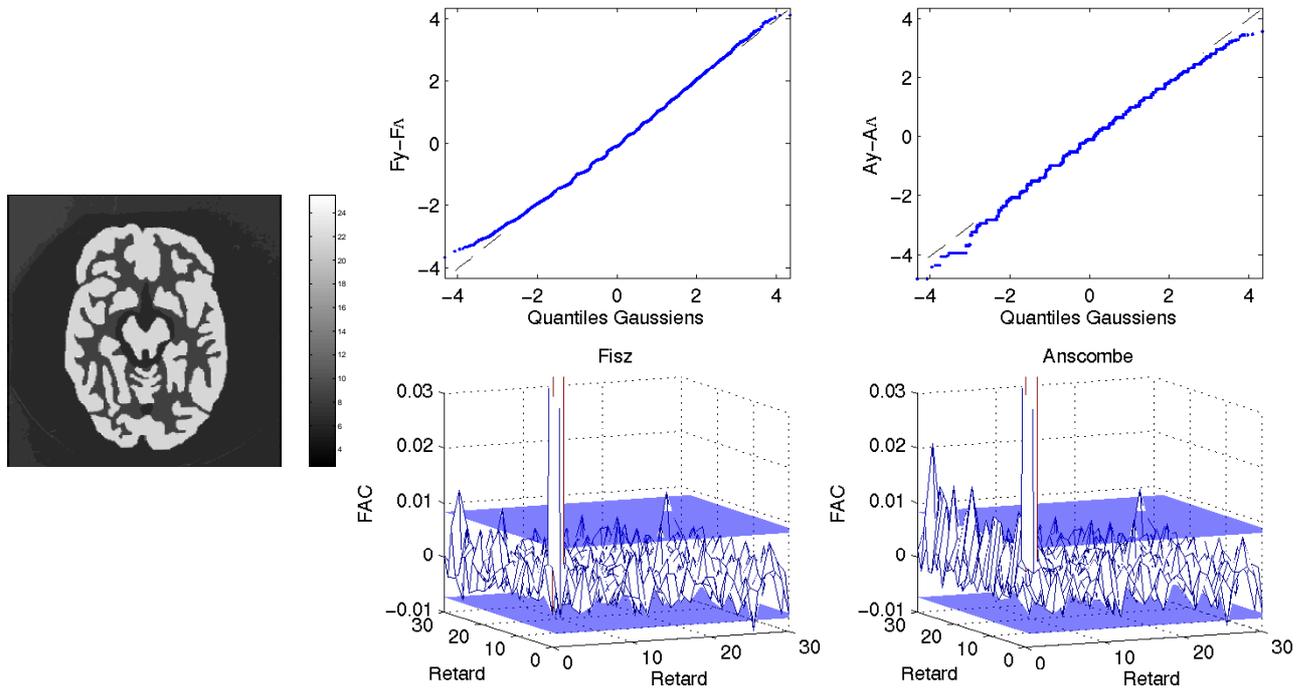
3) Appliquer tout débruiteur non-linéaire dans le domaine des ondelettes (e.g. seuillage dur ou doux, bayésien FKB, etc) pour avoir une estimée $\widehat{\mathcal{F}\mathbf{\Lambda}}$.

4) Appliquer la transformation de Fisz inverse \mathcal{F}^{-1} pour obtenir une estimée $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ de l'image des intensités.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Nous nous proposons de quantifier d'une part l'influence des deux transformations de Fisz et d'Anscombe sur les performances de divers débruiteurs en présence de bruit Poissonien, et en fonction du taux de comptage. D'autre part, nous examinons le débruiteur qui permet de

Hoffman



Lena

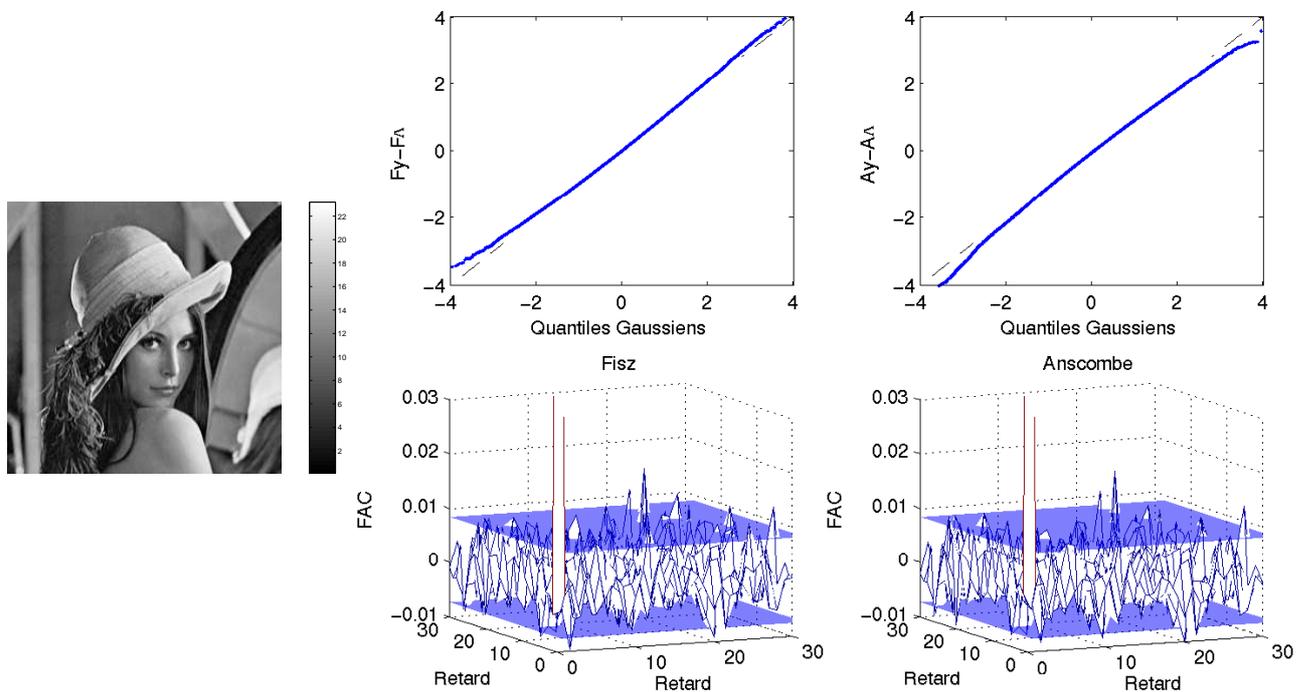


Fig. 1. Comparaison des transformations de Fisz et d'Anscombe sur du bruit Poissonien simulé à partir de deux images des intensités, l'une du fantôme de Hoffman et l'autre de Lena. Pour chaque image, les graphes des quantiles sont sur la 1^{ère} ligne et les FACS sur la 2^{ème} ligne. Les plans horizontaux sur les FACs correspondent aux limites de Barlett à 5%.

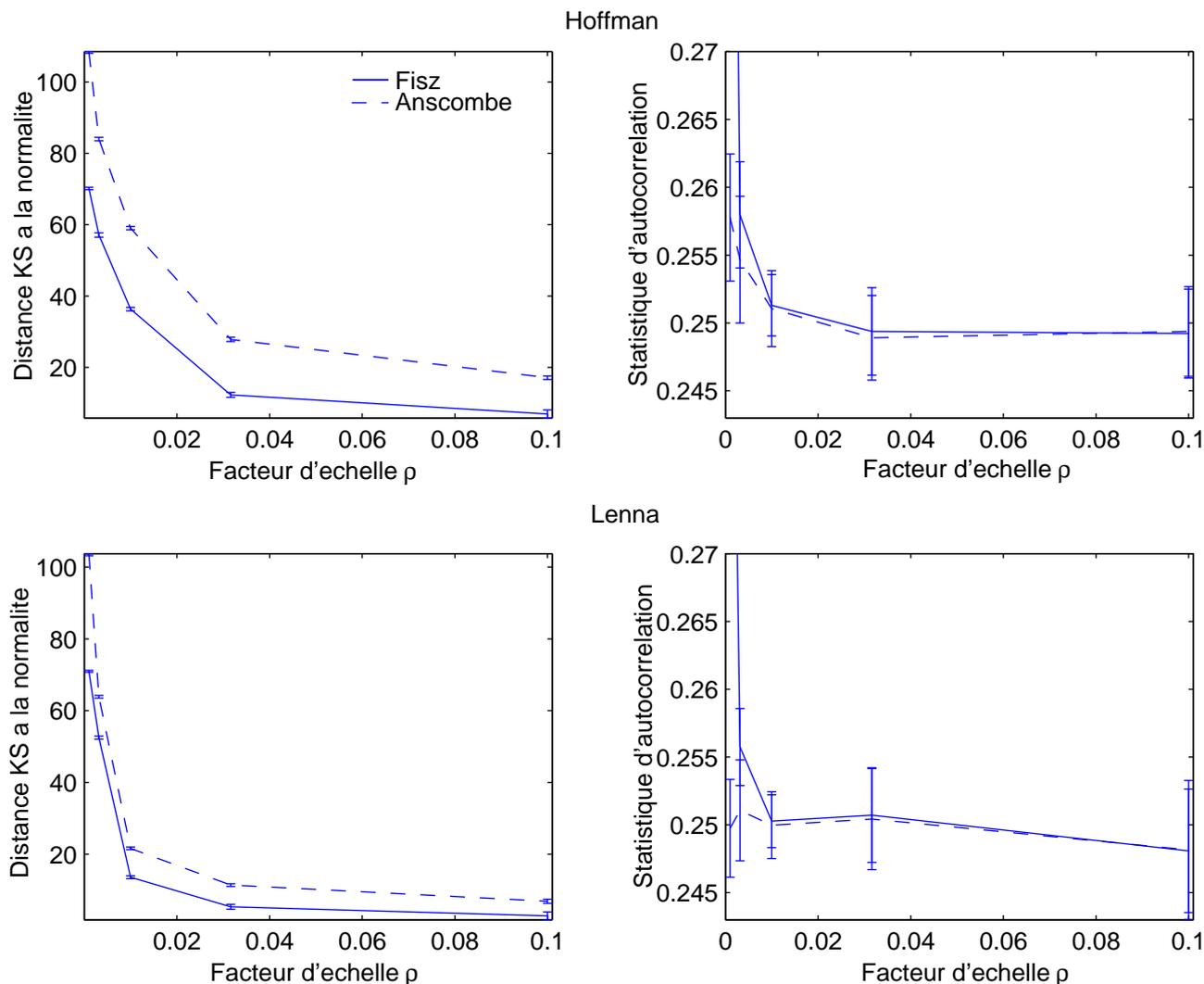


Fig. 2. Comparaison des transformations de Fisz et d'Anscombe sur du bruit Poissonien simulé à partir de deux images des intensités, l'une du fantôme de Hoffman et l'autre de Lena. Pour chaque image, nous avons tracé les graphes de la distance à la normalité (par un test de Kolmogorov-Smirnov) et de la statistique d'auto-corrélation (par un test de Box-Pierce) en fonction du rapport d'échelle simulant différents taux de comptage.

mener aux meilleurs résultats d'estimation de l'image des intensités du processus de Poisson. Les débruiteurs utilisés sont : le bayésien avec l'a priori FKB, le bayésien avec l'a priori α -stable pour lequel nous avons récemment proposé un algorithme stable et rapide [Mathieu 2002], les seuillages universels dur, doux et minimax [Donoho et Johnstone 1994], et la méthode SURE [Mallat 1999]. Nous utilisons l'ondelette de Daubechies de régularité 4 et l'échelle la plus grossière d'analyse est $\log_2 \log N + 1$ issue de résultats asymptotiques [Antoniadis et al. 2001]. Seule la TOD (non invariante par translation) est considérée dans le cas de cet article. L'invariance par

translation peut être obtenue par moyennage des estimées des translattées de l'image [Mallat 1999].

A. Données simulées

Dans un premier temps, nous nous appuyons sur des simulations dans lesquelles les images des intensités sont connues. Nous prenons encore une fois pour exemple de ces images \mathbf{A} le fantôme de Hoffman et l'image de Lena. Un exemple de la qualité visuelle des images estimées, utilisant le débruiteur FKB et les seuillages universels dur et doux, est illustré en Fig.3 pour le fantôme de Hoffman. L'image des intensités a été multipliée par un facteur $\rho = 0.01$ correspondant à un très faible taux de comptage. Les détails anatomiques du cerveau sur l'image bruitée sont difficilement perceptibles. Les transformées de Fisz (colonne 1) et d'Anscombe (colonne 2) sont comparées pour chaque débruiteur. Les valeurs du rapport signal-sur-ruisque (RSR communément appelé en anglais PSNR [Mallat 1999]) sont portées au dessus de chaque image. On peut relever qu'aussi bien la qualité visuelle que les valeurs du RSR sont systématiquement meilleures pour la transformation de Fisz. De plus, c'est le débruiteur bayésien FKB qui offre la meilleure estimation.

Ces résultats sont confirmés par les simulations portées en Fig.4. Cette figure illustre, pour chacune des deux images des intensités Hoffman et Lena, l'évolution du RSR en dB pour chaque débruiteur, en fonction du logarithme du facteur d'échelle ρ reflétant des situations de faible et de fort taux de comptage. Pour chaque valeur de ρ , 100 versions bruitées sont générées et le RSR montré est le RSR moyen sur ces 100 réplifications. Chaque graphe compare les transformées de Fisz (trait plein) et d'Anscombe (trait discontinu) pour chaque débruiteur. Ces simulations montrent clairement la supériorité systématique de la transformation de Fisz sur celle d'Anscombe, quel que soit le débruiteur. La différence entre les deux transformations est flagrante à faible taux de comptage mais s'amenuise à mesure que les intensités sont grandes. Les mêmes comportements sont observés quelle que soit l'image des intensités (Hoffman ou Lena). En tirant profit des avantages combinés de la transformation de Fisz et du débruiteur bayésien FKB, nous aboutissons à des résultats bien supérieurs aux autres algorithmes de débruitage.

B. Images réelles magnéto-optiques

Dans cette section, la méthode proposée est appliquée à des images de microscopie magnéto-optique. Plusieurs techniques d'imagerie magnétique de surface reposent sur l'utilisation d'un microcapteur magnétique qui balaie la surface à étudier. L'imagerie magnéto-optique est une technique qui permet de s'affranchir de l'opération souvent longue de balayage. Elle repose sur

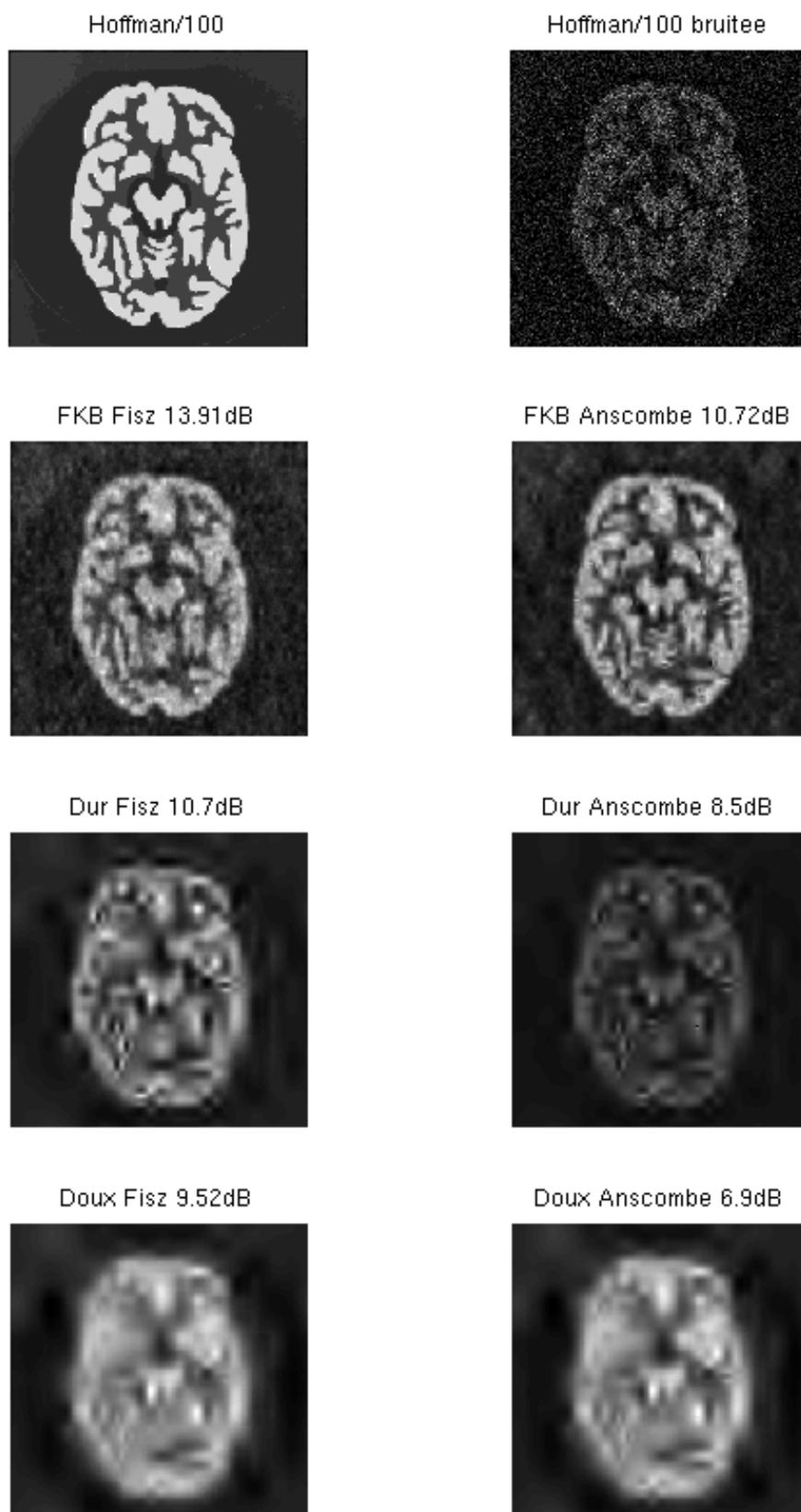
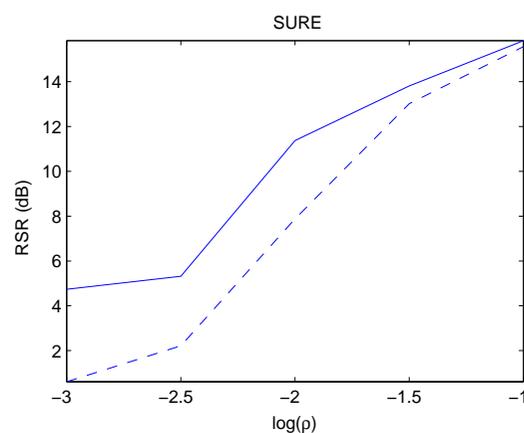
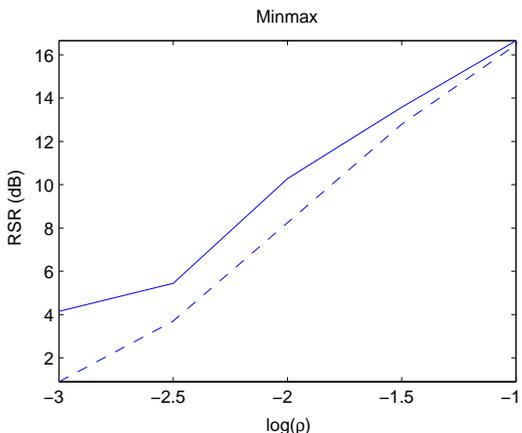
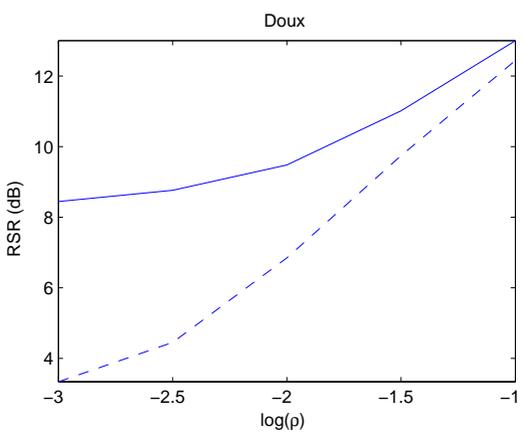
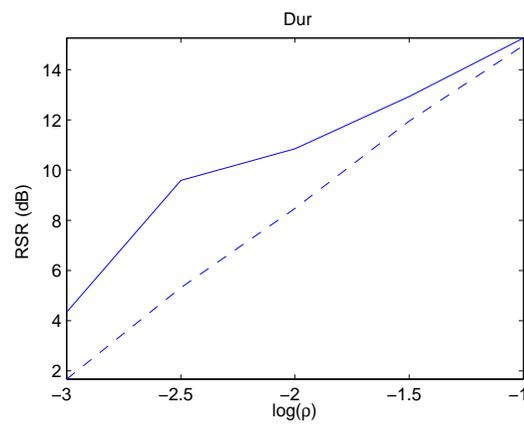
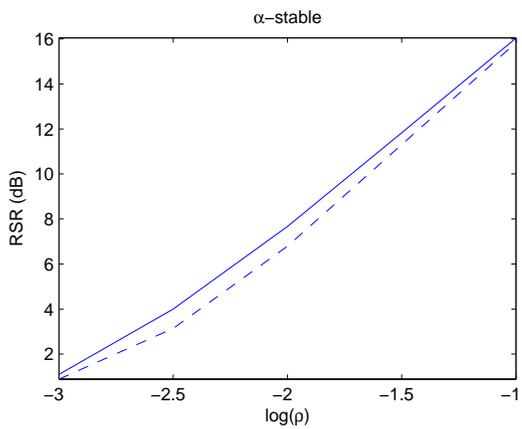
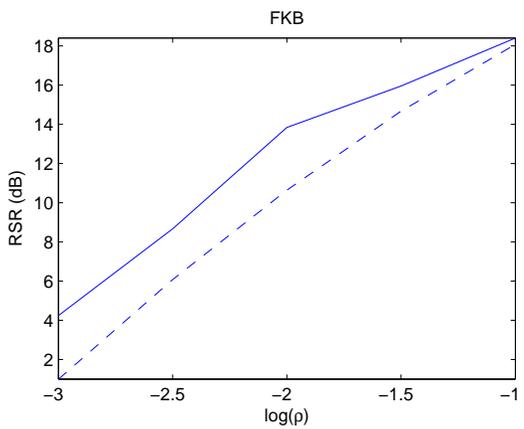


Fig. 3. Exemple d'application des transformées de Fisz (colonne 1) et d'Anscombe (colonne 2) avec les débruiteurs bayésien FKB et universel avec seuillages dur et doux. L'image de Hoffman bruitée est contaminée par un bruit de Poisson après avoir divisé l'image des intensités par 100 (très faible taux de comptage). Les valeurs du RSR sont aussi portés au dessus de chaque image.
August 10, 2004



Hoffman

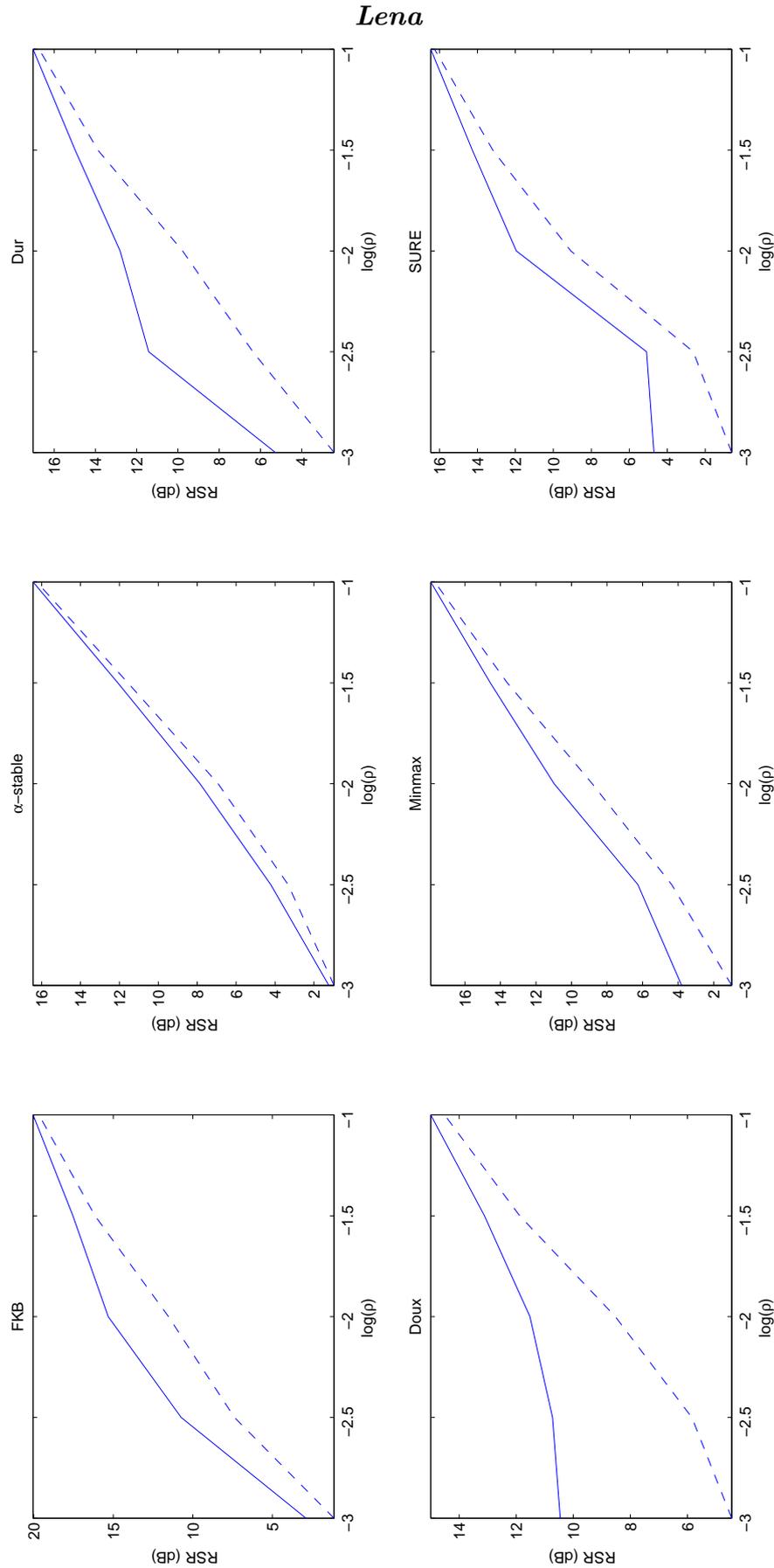


Fig. 4. RSR en dB moyen sur 100 simulations en fonction du facteur d'échelle ρ pour les images des intensités de August 10, 2004 DRAFT
Hoffman et de Lena. Les 6 premiers graphes comparent les transformations de Fisz (trait continu) et d'Anscombe (trait discontinu) pour chaque débruiteur. Dans les deux derniers graphes, nous comparons tous les débruiteurs pour chacune des deux transformations.

l'utilisation d'un indicateur à effet Faraday qui est simplement posé sur la surface à étudier. L'illumination de cet indicateur à l'aide d'une lumière polarisée permet d'obtenir une image dont l'intensité est proportionnelle au champ magnétique local. La présence d'un défaut dans l'échantillon étudié se traduit par une variation de champ et donc de quantité de lumière reçue. Ainsi, par le biais de cette imagerie, on peut remonter à l'organisation du défaut [Flament et al. 2001]. Cependant, certaines difficultés persistent liées à l'acquisition telles que le bruit. En imagerie magnéto-opique, la contribution prépondérante au bruit provient du faible nombre de photons reçus qui suit une loi de comptage Poissonienne [Flament et al. 2001]. Ainsi, on peut considérer que chaque pixel (m, n) de l'image produite est l'observation d'une variable aléatoire de Poisson d'intensité $\lambda_{m,n}$ inconnue que l'on veut estimer.

La Fig.5 compare les transformations de Fisz et d'Anscombe, avec les mêmes algorithmes de débruitage que précédemment, sur une image magnéto-optique d'un défaut sur une couche mince supra-conductrice [Flament et al. 2001]. Cette image illustre une situation de faible taux de comptage. On peut voir que la qualité visuelle de l'image débruitée par l'estimateur bayésien FKB est supérieure aux autres débruiteurs comparés ici. En combinant la transformation de Fisz et le débruiteur FKB, le bruit sur le fond de l'image a été presque totalement éliminé sans altérer la fine structure d'intérêt représentant le défaut. Les débruiteurs par seuillage doux et dur ont tendance à dégrader ce signal utile (biais d'estimation) particulièrement lorsqu'ils sont associés à la transformation d'Anscombe (exemple sur les extrémités du défaut). Ce problème est bien connu pour les méthodes de seuillage car le seuil universel sur-estime le vrai seuil, engendrant ainsi un sur-lissage de l'estimée. De plus, le seuillage doux accentue davantage le sur-lissage à cause de son biais d'estimation important [Donoho et Johnstone 1994].

Nous avons aussi tracé les résidus entre la transformée de l'image originale ($\mathcal{F}\mathbf{y}$ ou $\mathcal{A}\mathbf{y}$) et celle de sa version débruitée ($\widehat{\mathcal{F}\mathbf{A}}$ ou $\widehat{\mathcal{A}\mathbf{A}}$), en fonction des quantiles gaussiens. Dans le cas parfait où \mathbf{A} est en plus connue, ces résidus devraient être gaussiens pour la transformation de Fisz, comme dicté par nos résultats théoriques (Section III-B). Les résultats sont illustrés dans la Fig.6. Le premier graphe montre l'histogramme de l'image originale avec un mode important à faible taux de comptage correspondant au fond. Comme nous pouvons le constater, on assiste à un écartement important d'un comportement gaussien ce qui confirme la nature statistique Poissonienne du bruit que nous attendions de part la physique du signal observé.

Les graphes suivants correspondent aux tracés des quantiles pour les résidus obtenus par chaque débruiteur dans le domaine de chaque transformation, de Fisz ou d'Anscombe. Lorsque nous comparons les deux transformations pour chaque débruiteur, un départ plus prononcé de la normalité est observé pour la transformation d'Anscombe. Ceci semble confirmer les

enseignements tirés des simulations ci-dessus en plaidant en faveur de la transformée de Fisz comme transformation "normalisante" de données Poissoniennes, meilleure qu'Anscombe particulièrement à faible flux de photons.

Lorsque nous comparons cette fois-ci les différents débruiteurs, pour chaque transformation, c'est l'estimateur FKB qui semble l'emporter puisqu'il semble réaliser le meilleur compromis entre biais et variance de l'estimation ce qui se traduit visuellement par un rejet du bruit sur le fond et une conservation du signal utile sur le défaut. Dans le cas du débruiteur par seuillage doux, on sait que le biais d'estimation est important [Donoho et Johnstone 1994], ce qui cause un départ plus accentué de la normalité. En effet, dans les résidus de ce débruiteur, on retrouve non seulement du bruit mais aussi une part sensible du signal utile rejeté à tort par ce débruiteur.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cet article, nous avons introduit une nouvelle transformation bi-dimensionnelle pour transformer des observations Poissoniennes indépendantes en observations gaussiennes indépendantes. Celle-ci est basée sur la transformée en ondelettes de Haar. Ses propriétés statistiques asymptotiques sont établies et confirmées aussi bien par des simulations que des données réelles obtenues par imagerie magnéto-optique. L'algorithme proposé s'adapte à toute modalité d'imagerie faisant intervenir des processus de comptage. Combiner la transformation de Fisz avec un débruiteur bayésien dans le domaine des ondelettes s'avère être un excellent estimateur d'une image contaminée par un processus Poissonien 2D. Ceci peut aussi être facilement étendu au cas de la déconvolution.

Toutefois, dans le cadre de ce travail, nous n'avons considéré que le cas des données Poissoniennes indépendantes, hypothèse la plus souvent adoptée dans la littérature. Le cas des données corrélées est autrement plus complexe et mériterait des investigations plus profondes mais qui emprunteraient d'autres directions de recherche que la transformée de Fisz. Nous pensons en particulier à des approches d'optimisation basées sur la régularisation L_1 , dans le même esprit que celle de [Sardy et al. 2004]. Toutefois, des simplifications seraient nécessaires comme l'imposition d'une structure paramétrique sur la covariance du processus. Sinon, des méthodes de rééchantillonnage aléatoire, beaucoup plus lourdes et délicates à mettre en oeuvre, devraient être envisagées.

Par ailleurs, il faut noter que la transformation de Fisz utilise la transformation de Haar et peut souffrir d'un artefact indésirable dû à la forme "carré" de l'ondelette de Haar. Ceci peut être gênant dans certaines applications où les images contiennent des objets de petites tailles telles que l'astronomie (étoile, galaxie, etc). Dans ce type d'application, il est crucial de

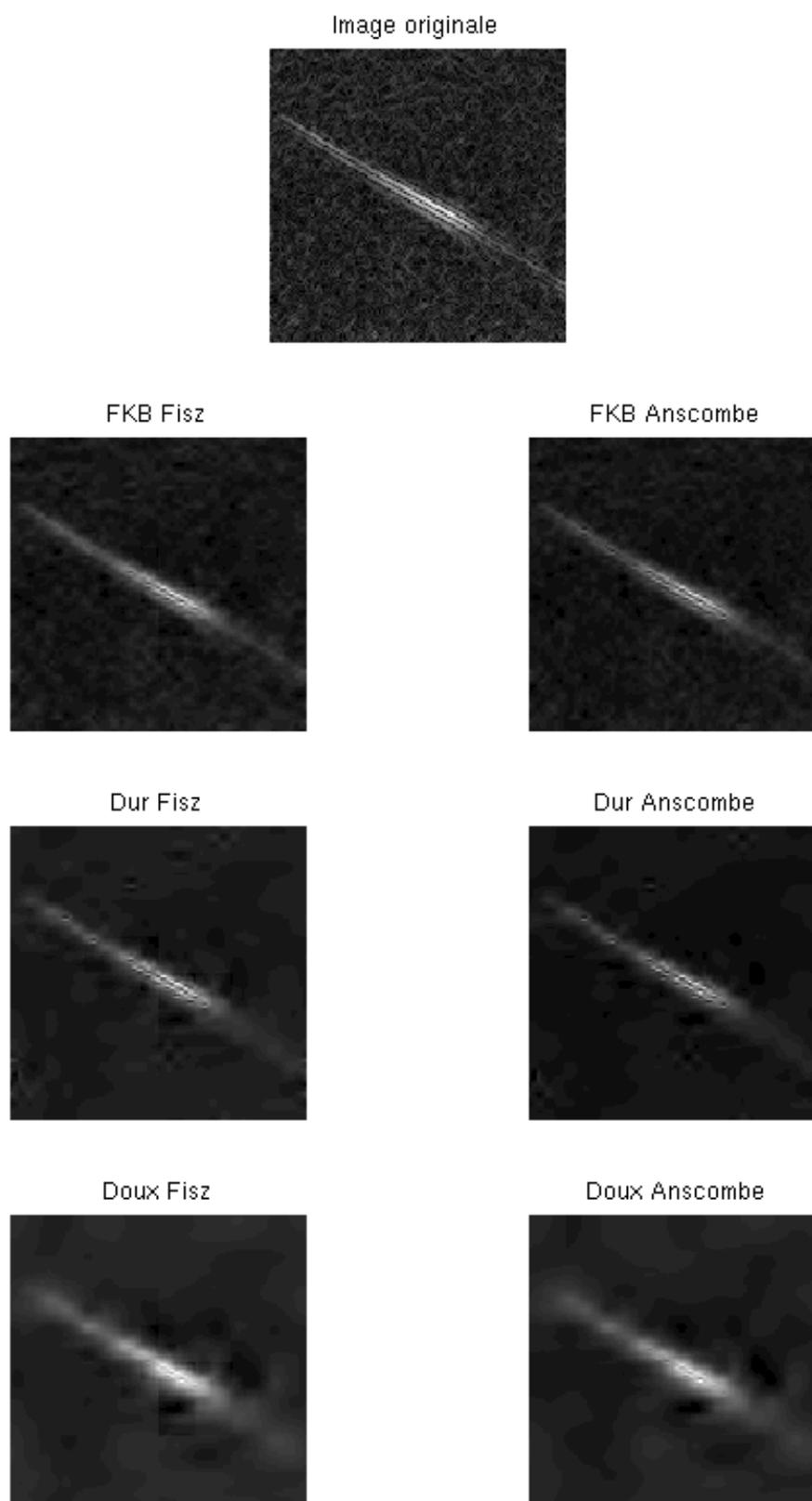


Fig. 5. Comparaison des transformations de Fisz et d'Anscombe avec divers débruiteurs sur une image réelle d'un défaut obtenue par imagerie magnéto-optique. La première image est l'image des comptages originale. Les autres correspondent aux résultats après transformation de Fisz ou d'Anscombe, débruitage (FKB, seillages dur ou doux) puis transformation inverse.

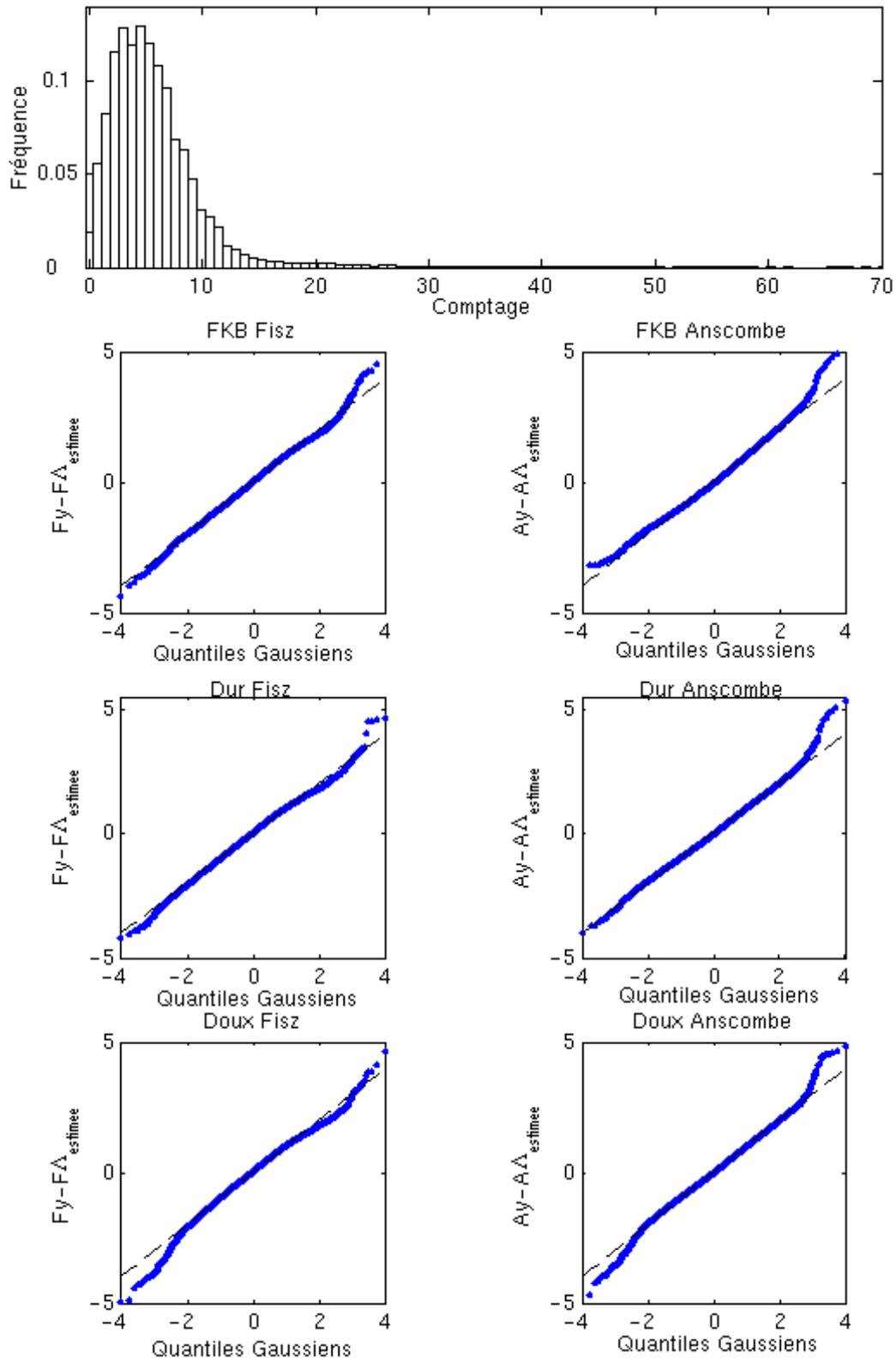


Fig. 6. Tracés des résidus entre la transformée de l'image originale ($\mathcal{F}y$ ou $\mathcal{A}y$) et celle de sa version débruitée ($\widehat{\mathcal{F}\Lambda}$ ou $\widehat{\mathcal{A}\Lambda}$), en fonction des quantiles gaussiens. Le premier graphe montre l'histogramme de l'image originale avec un mode important à faible taux de comptage correspondant au fond. Les graphes suivants correspondent aux tracés des quantiles pour les résidus obtenus par chaque débruiteur (FKB, seuillages dur ou doux) dans le domaine de chaque transformation, de Fisz ou d'Anscombe.

August 10, 2004

DRAFT

conserver l'aspect généralement isotrope circulaire de ces objets dans l'image estimée, tandis que la transformée de Fisz aura tendance à produire un artefact "carré" sur le bord de ces objets de petite taille. Ce problème trouve son origine dans la non-invariance par translation de l'opérateur \mathcal{F} qui engendre l'apparition d'un artefact prenant la forme de l'atome d'analyse (ondelette de Haar), ayant une forme carrée. En termes mathématiques, on peut dire que l'opérateur \mathcal{F} et celui de la translation ne commutent pas. Pour pallier à cette limitation, une idée simple est d'utiliser l'algorithme du "cycle-spinning" de Coifman. Cette solution consiste à adopter la démarche suivante : traduire l'image originale de (i, j) , ensuite appliquer l'algorithme décrit dans III-C sur cette image traduite et traduire l'estimée de $(-i, -j)$, où $(i, j) \in [-L, L] \times [-L, L]$ (typiquement $L = 8$). Finalement, on moyenne les $(2L + 1)^2$ estimées.

Par ailleurs, la transformée de Fisz ne s'applique que sur des images, et plus généralement des données, de taille isotrope (même taille en ligne et colonne). Une perspective possible de ce travail consisterait à généraliser cette transformée pour les données multi-dimensionnelles de taille quelconque. Ceci fait actuellement l'objet d'un effort de recherche soutenu dans notre groupe.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à adresser nos remerciements à Stéphane Flament (GREYC UMR CNRS 6072) pour nous avoir fourni les images de microscopie magnéto-optique.

APPENDIX I

PREUVE DES PROPRIÉTÉS 1 ET 2

Preuve: On ne donne ici que les grandes lignes de la preuve pour étayer nos affirmations. Pour prouver que la décorrélation asymptotique des coefficients de \mathbf{u} , notons tout d'abord que la corrélation entre les coefficients de détail modifiés (notés z_{mn}^{oj}) à deux échelles différentes (j et j') est nulle. En effet, à une échelle j on peut toujours écrire :

$$Z_{mn}^{oj} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 + X_2 = 0 \\ \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_1 + X_2}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10)$$

où X_1 et X_2 sont Poissoniennes iid. A une échelle plus grossière j' , les coefficients de détail dépendent **uniquement** de la somme $X_1 + X_2$ et d'autres variables $X_i, i \neq 1, 2$. Par indépendance et identité des distributions de X_1 et X_2 , la corrélation est nulle entre Z_{mn}^{oj} et $Z_{mn}^{oj'}$. De la même manière, on prouve que tous les coefficients de détail modifiés Z_{mn}^{oj} sont décorrélés du coefficient d'approximation à l'échelle la plus grossière $A = \frac{\sum_{m,n} y_{m,n}}{N^2}$. De même que la corrélation entre

deux coefficients modifiés à deux orientations différentes sont aussi décorrélés par le théorème de Fisz.

Par ailleurs, par une écriture des expressions des coefficients $U_{m,n}$ de \mathbf{u} , on s'aperçoit qu'ils partagent tous le coefficient d'approximation A :

$$U_{m,n} = A + D_{m,n} \quad (11)$$

où $D_{m,n}$ est une combinaison linéaire des coefficients de détail modifiés (à différentes échelles et orientations). Ainsi, la covariance entre deux coefficients $U_{m,n}$ et $U_{m',n'}$ peut s'écrire:

$$\text{Cov}(U_{m,n}, U_{m',n'}) = \text{Var}(A) + \text{Cov}(A, D_{m,n}) + \text{Cov}(A, D_{m',n'}) + \text{Cov}(D_{m,n}, D_{m',n'}) \quad (12)$$

où $\text{Var}(A) = \lambda/N^2 \rightarrow 0$ par hypothèse. Les deux termes suivants sont aussi nuls par décorrélation entre A et les Z_{mn}^{oj} . En utilisant le même argument que dans [Fryzlewicz et Nason 2003], le dernier terme est aussi asymptotiquement nul lorsque $N = 2^J \rightarrow +\infty$.

Pour prouver la normalité asymptotique, notons tout d'abord que par le théorème central limite :

$$\begin{aligned} \frac{A - \lambda}{\sqrt{\lambda}/N} &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \\ N &\longrightarrow +\infty \end{aligned} \quad (13)$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} A - \lambda &\xrightarrow{d} 0 \\ \text{lorsque } \lambda/N^2 &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Il reste à prouver que les coefficients $D_{m,n}$, combinaisons linéaires des coefficients de détail modifiés Z_{mn}^{oj} , sont asymptotiquement gaussiens. Pour ce faire, on a déjà prouvé que les coefficients Z_{mn}^{oj} sont gaussiens centrés et indépendants par le théorème de Fisz (voir ci-dessus). Leur combinaison linéaire est aussi gaussienne centrée. Pour calculer sa variance, d'après l'Eq.11, tout $D_{m,n}$ peut toujours s'écrire sous la forme :

$$D_{m,n} = \sum_{o=\{HH,HL,LH\}} \sum_{j=1}^J 2^{-j} W^{oj}(Y) \quad (15)$$

où $W^{oj}(Y)$ est une fonction linéaire des coefficients indépendants et gaussiens Z_{mn}^{oj} . On en déduit donc :

$$\text{Var}(D_{m,n}) = \sum_{o=\{HH,HL,LH\}} \sum_{j=1}^J 2^{-2j} \text{Var}(W^{oj}) \quad (16)$$

D'après le lemme 1, $\forall(o, j) \text{Var}(W^{o_j}) \rightarrow 1$ pour λ grand. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_{m,n}) &= (1 - N^{-2})\text{Var}(W^{o_j}) \xrightarrow{d} 1 \\ \text{lorsque } (N = 2^J, \lambda) &\longrightarrow +\infty \end{aligned} \quad (17)$$

D'après les Eqs.11, 14 et 17, le résultat de la propriété annoncée suit immédiatement. ■

REFERENCES

- Abramovich, F., Sapatinas, T., et Silverman, B. 1998. "Wavelet thresholding via a Bayesian approach." *J. R. Statist. Soc. B*, Vol. 60, 725–749.
- Abramowitz, M., et Stegun, I. A. 1972. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications.
- Achim, A., Bezerianos, A., et Tsakalides, P. 2001. "Novel Bayesian multiscale method for speckle removal in medical ultrasound images." *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 20, 772–783.
- Antoniadis, A., Bigot, J., et Sapatinas, T. 2001. "Wavelet estimators in nonparametric regression: A comparative simulation study." *Journal of Statistical Software*, Vol. 6, No. 6, 1–83.
- Chang, S., Yu, B., et Vetterli, M. 2000a. "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression." *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 9, No. 9, 1522–1531.
- Chang, S., Yu, B., et Vetterli, M. 2000b. "Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising." *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 9, No. 9, 1532–1546.
- Charles, C., et Rasson, J.-P. 2003. "Wavelet denoising of Poisson-distributed data and applications." *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 43, 139–148.
- Chipman, H., Kolaczyk, E., et McCulloch, R. 1997. "Adaptive Bayesian wavelet shrinkage." *J. Am. Statist. Ass.*, Vol. 92, 1413–1421.
- Clyde, M., Parmigiani, G., et Vidakovic, B. 1998. "Multiple shrinkage and subset selection in wavelets." *Biometrika*, Vol. 85, No. 2, 391–401.
- Donoho, D. L., et Johnstone, I. M. 1994. "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage." *Biometrika*, Vol. 81, No. 3, 425–455.
- Donoho, D. L., et Johnstone, I. M. 1995. "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage." *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, No. 432, 1200–1224.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkycharian, G., et Picard, D. 1995. "Wavelet shrinkage: Asymptopia?" *J. R. Statist. Soc. B*, Vol. 57, No. 2, 301–337.

- Fadili, J. 2003. “Analytical form for a Bayesian wavelet estimator of images using the Bessel k Form densities.” *IEEE Transaction on Image Processing*, *accepted*.
- Fisz, M. 1955. “The limiting distribution function of two independent random variables and its statistical application.” *Colloquium Mathematicum*, Vol. 3, 138-146.
- Flament, S., Warsito, Cordier, C., Mechin, L., et Bloyet, D. 2001. “High resolution magneto-optical study of superconducting thin films and devices.” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 11, No. 1, 3174-3177.
- Fryzlewicz, P., et Nason, G. P. 2004. “A Haar-Fisz algorithm for Poisson intensity estimation.” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, *sous presse*.
- Gradshteyn, I., et Ryzhik, I. 1980. *Table of integrals, series and products* (A. Jeffrey ed.). Academic Press.
- Grenander, U., et Srivastava, A. 2001. “Probability models for clutter in natural images.” *IEEE Transactions on Pattern Analyse and Machine Intelligence*, Vol. 23, No. 4, 424-429.
- Kolaczyk, E. 1999. “Wavelet shrinkage estimation of certain Poisson intensity signals using corrected thresholds.” *Statistica Sinica*, Vol. 9, 119-135.
- Mallat, S. G. 1989. “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation.” *IEEE Transactions on Pattern Analyse and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 7, 674-693.
- Mallat, S. G. 1999. *A wavelet tour of signal processing* (2nd ed.). New York: Academic Press.
- Mathieu, J. 2002. *Transformée en ondelettes et régression non-paramétrique dans un contexte bayésien*. Rapport de DEA, Ecole Nationale Supérieure d’Ingénieur, Caen.
- Nikias, C. L., et Shao, M. 1995. *Signal processing with α -stable distributions and applications*. Wiley-Interscience.
- Percival, D. B., et Walden, A. T. 2000. *Wavelet methods for time series analysis*. Cambridge Press.
- Sardy, S., Antoniadis, A., et Tseng, P. 2004. “Automatic smoothing with wavelets for a wide class of distributions.” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 12, *sous presse*.
- Simoncelli, E. P., et Adelson, E. H. 1996. “Noise removal via Bayesian wavelet coring.” In *Third int’l conf on image proc* (Vol. 1, pp. 379-382). Lausanne: IEEE Signal Processing Society.
- Srivastava, A., Liu, X., et Grenander, U. 2002. “Universal analytical forms for modeling image probabilities.” *IEEE Transactions on Pattern Analyse and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 9, 1200-1214.

- Starck, J.-L., et Murtagh, F. 2001. "Astronomical image and signal processing looking at noise, information and scale." *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 18, 30-40.
- Vidakovic, B. 1999. *Statistical modeling by wavelets*. New York: John Wiley & Sons.
- Vidakovic, B., et Ruggeri, F. 2000. *Bams method: Theory and simulations* (Rap. Tech.). Duke University: Institute of Statistics and Decision Sciences.