



HAL
open science

Note sur les corps 2-rationnels

Jean-François Jaulent

► To cite this version:

| Jean-François Jaulent. Note sur les corps 2-rationnels. 2008. hal-00261800v3

HAL Id: hal-00261800

<https://hal.science/hal-00261800v3>

Preprint submitted on 1 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Note sur les corps 2-rationnels

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous déterminons le groupe de Galois de la pro-2-extension 2-ramifiée maximale d'un corps de nombres 2-rationnel.

Abstract. We compute the Galois group of the maximal 2-ramified pro-2-extension of a 2-rational number field.

Introduction

Les notions de corps ℓ -rationnel ou ℓ -régulier (pour un nombre premier ℓ) introduites indépendamment par A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do dans [11] d'une part, par G. Gras et l'auteur dans [3] d'autre part, se trouvent coïncider en présence des racines ℓ -ièmes de l'unité¹ donc, tout spécialement, pour $\ell = 2$.

- La ℓ -régularité se définit naturellement en termes de K -théorie et exprime simplement la trivialité du ℓ -noyau régulier du corps F considéré (*i.e.* du noyau dans la ℓ -partie du groupe universel $K_2(F)$ des symboles de Hilbert attachés aux places non complexes qui ne divisent pas ℓ).
- La ℓ -rationalité s'exprime en termes galoisiens et traduit la pro- ℓ -liberté du groupe de Galois $\mathcal{G}_F = \text{Gal}(M_F/F)$ attaché à la pro- ℓ -extension (galoisienne) ℓ -ramifiée ∞ -décomposée maximale M_F de F (*i.e.* au compositum des ℓ -extensions de F qui sont non ramifiées aux places finies² étrangères à ℓ et complètement décomposée aux places à l'infini).

Plus précisément, d'après [6] (Th.1.2), la ℓ -rationalité d'un corps de nombres K s'exprime comme suit :

Théorème & Définition 0. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(M_K/K)$ de la pro- ℓ -extension ℓ -ramifiée ∞ -décomposée maximale M_K de K est un pro- ℓ -groupe libre (sur $d_K = 1 + c_K$ générateurs, si c_K désigne le nombre de places complexes de K).*
- (ii) *Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K^{ab} = \text{Gal}(M_K^{ab}/K)$ de la sous-extension abélienne maximale M_K^{ab}/K de M_K/K est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de dimension $1 + c_K$.*
- (iii) *Le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le premier ℓ) et le sous-module de torsion \mathcal{T}_K du groupe $\mathcal{G}_K^{ab} = \text{Gal}(M_K^{ab}/K)$ est trivial.*
- (iv) *Le groupe $V_K = \{x \in K^\times \mid x \in K_i^{\times \ell} \forall i \mid \ell \text{ \& } v_{\mathfrak{p}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell} \forall \mathfrak{p} \nmid \ell \infty\}$ des éléments ℓ -hyperprimaires du corps K se réduit à $K^{\times \ell}$, et l'on a l'indépendance entre les ℓ -rangs des ℓ -groupes de racines de l'unité :*

$$\text{rg}_\ell \mu_K = \sum_{i \mid \ell} \text{rg}_\ell \mu_{K_i}.$$

¹En fait dès que le corps F considéré contient le sous-corps réel $\mathbb{Q}[\zeta_\ell + \bar{\zeta}_\ell]$ du corps $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$.

²En accord avec les conventions de la Théorie ℓ -adique du Corps de Classes (*cf.* [2, 5]), nous ne parlons jamais de ramification à l'infini, mais de *complexification* des places réelles.

- (v) Le corps K vérifie l'une des deux conditions suivantes :
- (a) ou bien K contient une racine primitive ℓ -ième de l'unité ζ , auquel cas K possède une unique place \mathfrak{l} au dessus de ℓ , et le ℓ -groupe des ℓ -classes d'idéaux au sens restreint $\mathcal{C}\ell'_K$ est trivial;
 - (b) ou bien K ne contient pas ζ , auquel cas les places de K au-dessus de ℓ ne se décomposent pas complètement dans l'extension cyclotomique $K[\zeta]/K$ et la ω -composante du ℓ -groupe des ℓ -classes d'idéaux au sens restreint $\mathcal{C}\ell'_{K[\zeta]}$ du corps $K[\zeta]$ est triviale, si ω désigne le caractère cyclotomique (i.e. le caractère de l'action sur μ_K de $\text{Gal}(K[\zeta]/K)$).

Lorsque ces conditions sont réunies, le corps K est dit ℓ -rationnel.

Remarque. Pour $\ell = 2$, il résulte clairement de la condition (v,a) ci-dessus qu'un corps 2-rationnel ne peut contenir qu'une seule place au-dessus de 2.

De fait les prémices de la notion de ℓ -régularité remontent aux travaux de G. Gras notamment à sa note sur le K_2 des corps de nombres [1], tandis que la notion de ℓ -rationalité apparait (sous une forme cachée) dans les travaux de H. Miki [10], à l'occasion de l'étude d'une condition suffisante de la conjecture de Leopoldt, ainsi que dans ceux de K. Wingberg [14, 15], où est étudiée la même condition.

Les articles [3, 11] cités plus haut en caractérisent complètement la propagation (dans une ℓ -extension) en termes de primitivité de la ramification, ce que les approches antérieures ne donnaient pas. Une synthèse de leurs résultats est présentée dans [6] et un exposé systématique en est donné dans le livre de G. Gras [2].

Diverses généralisations de ces notions ont été étudiées par O. Sauzet et l'auteur (cf. [7, 8]), notamment dans le cas $\ell = 2$ qui se révèle, comme à l'ordinaire, le plus compliqué; elles donnent naissance, en particulier, à la notion de corps 2-birationnel.

Tout récemment, J. Jossey [9] a jugé bon d'introduire une notion de corps ℓ -rationnel qui diffère de celles déjà utilisée (en fait pour $\ell = 2$, dès lors que le corps de nombres considéré possède des plongements réels), ce qui paraît doublement malheureux, car s'écartant de l'usage établi et ne s'appliquant pas au corps *des* rationnels \mathbb{Q} .

Pour ces raisons, afin de prévenir toute confusion, il nous semble plus judicieux de parler dans son contexte de corps *2-surrationalnel*. Précisons ce point :

Définition 1. Soient K un corps de nombres ayant r_K places réelles et c_K places complexes, ℓ un nombre premier, M'_K la pro- ℓ -extension maximale de K qui est 2-ramifiée (i.e. non ramifiée aux places (finies) étrangères à ℓ) et M_K la sous-extension maximale de M'_K qui est complètement décomposée aux places à l'infini. Nous disons que le corps K est :

- (i) ℓ -surrationalnel, lorsque le groupe $\mathcal{G}'_K = \text{Gal}(M'_K/K)$ est pro- ℓ -libre ;
- (ii) ℓ -rationnel, lorsque son quotient $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(M_K/K)$ est pro- ℓ -libre.

On voit alors que les deux notions coïncident, sauf précisément dans le cas où ℓ vaut 2 et où le corps K possède une ou plusieurs places réelles se complexifiant dans M'_K : ainsi tout corps ℓ -surrationalnel est-il évidemment ℓ -rationnel, mais la réciproque n'est pas vraie en présence de complexification.

Le but de cette note est de déterminer la structure du groupe \mathcal{G}'_K dans le cas exceptionnel où le corps considéré K est 2-rationnel mais non 2-surrationalnel.

Théorème principal : description du groupe \mathcal{G}'_K

Notre résultat est extrêmement simple, qui s'énonce comme suit :

Théorème 2. *Soit K un corps de nombres 2-rationnel possédant $r_K \geq 1$ places réelles et c_K places complexes. Le groupe de Galois $\mathcal{G}'_K = \text{Gal}(M'_K/K)$ de la pro-2-extension 2-ramifiée maximale M'_K de K est alors le pro-2-produit libre*

$$\mathcal{G}'_K \simeq \mathbb{Z}_2^{\otimes(1+c_K)} \otimes C_2^{\otimes(r_K)}$$

de $1 + c_K$ exemplaires du groupe procyclique \mathbb{Z}_2 et de r_K exemplaires du groupe cyclique $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corollaire 3. *Les corps de nombres 2-rationnels qui sont 2-surrationnels sont ceux totalement imaginaires.*

Preuve du Théorème. Si le corps 2-rationnel K considéré n'admet pas de plongement réel, *i.e.* dans le cas $r_K = 0$, il est alors 2-surrationnel; et le groupe $\mathcal{G}'_K = \mathcal{G}_K$ est alors pro-2-libre sur $d_K = c_K + 1$ générateurs, comme annoncé.

Sinon, *i.e.* dans le cas $r_K > 0$, introduisons l'extension quadratique $L = K[i]$ engendrée par les racines 4^{es} de l'unité. Elle est évidemment 2-ramifiée sur K donc, en vertu des théorèmes de propagation de [3, 11] (*cf. e.g.* [6], Th. 3.5), 2-rationnelle; et finalement 2-surrationnelle, puisque totalement imaginaire. En d'autres termes, le groupe de Galois $\mathcal{G}_L = \mathcal{G}'_L$ de la pro-2-extension 2-ramifiée maximale M_L de L est pro-2-libre :

$$\mathcal{G}_L \simeq \mathbb{Z}_2^{\otimes d_L}, \quad \text{avec} \quad d_L = c_L + 1 = r_K + 2c_K + 1.$$

Cela étant, comme l'extension quadratique L/K est 2-ramifiée, M_L est aussi la plus grande pro-2-extension M'_K de K qui est 2-ramifiée et le groupe de Galois \mathcal{G}'_K est ainsi *potentiellement libre*, puisqu'il contient un sous-groupe ouvert qui est pro-2-libre, à savoir \mathcal{G}_L , lequel est d'indice 2 dans \mathcal{G}'_K .

Plus précisément, les résultats de structure de W. Herfort et P. Zalesskii (*cf.* [4], Th. 0.2) assurent qu'il existe alors une famille finie $(\mathcal{F}_i)_{i=0, \dots, k}$ de pro-2-groupes libres sur respectivement d_0, \dots, d_k générateurs, où k dénombre les classes de conjugaisons de sous-groupes d'ordre 2 de \mathcal{G}'_K , tels qu'on ait :

$$\mathcal{G}'_K \simeq \mathcal{F}_0 \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^k (C_2 \times \mathcal{F}_i) \right).$$

En particulier, l'abélianisé $\mathcal{G}'_K{}^{ab}$ de \mathcal{G}'_K admet alors la décomposition directe :

$$\mathcal{G}'_K{}^{ab} \simeq \mathbb{Z}_2^{d_0} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k (C_2 \oplus \mathbb{Z}_2^{d_i}) \right) \simeq \mathbb{Z}_2^{\sum d_i} \oplus C_2^k.$$

Et, puisque le corps 2-rationnel K vérifie la conjecture de Leopoldt, il vient :

$$\sum_{i=0}^k d_i = d_K = c_K + 1; \quad \text{ainsi que l'isomorphisme : } \mathcal{T}'_K \simeq C_2^k.$$

où \mathcal{T}'_K désigne le sous-groupe de \mathbb{Z}_2 -torsion du groupe $\mathcal{G}'_K{}^{ab}$.

Maintenant, il résulte clairement de la pro-2-décomposition de \mathcal{G}'_K que les nombres minimaux de générateurs $d(\mathcal{G}'_K)$ et de relations $r(\mathcal{G}'_K)$ qui le définissent comme pro-2-groupe sont respectivement :

$$d(\mathcal{G}'_K) = k + \sum_{i=0}^k d_i = k + c_K + 1 \quad \text{et} \quad r(\mathcal{G}'_K) = \sum_{i=1}^k (1 + d_i) = d(\mathcal{G}'_K) - d_0.$$

Or les formules de Šafarevič (cf. [13], [2], § III.4, ou encore [12], Th. 8.7.3) :

$$\begin{aligned} d(\mathcal{G}'_K) &= \dim_{\mathbb{F}_\ell}(H^1(\mathcal{G}'_K, \mathbb{F}_\ell)) \\ &= c_K + 1 + \dim_{\mathbb{F}_\ell} V_K/K^{\times\ell} + \left(\sum_{\iota|\ell} \text{rg}_\ell \mu_{K_\iota} - \text{rg}_\ell \mu_K\right) ; \text{ et} \\ r(\mathcal{G}'_K) &= \dim_{\mathbb{F}_\ell}(H^2(\mathcal{G}'_K, \mathbb{F}_\ell)) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} V_K/K^{\times\ell} + \left(\sum_{\iota|\ell} \text{rg}_\ell \mu_{K_\iota} - \text{rg}_\ell \mu_K\right). \end{aligned}$$

donnent ici, d'après la condition (v, a) , pour $\ell = 2$ et K supposé 2-rationnel :

$$d(\mathcal{G}'_K) = \dim_{\mathbb{F}_2} {}^2\mathcal{G}'_K{}^{ab} = r_K + c_K + 1 \quad \text{et} \quad r(\mathcal{G}'_K) = \dim_{\mathbb{F}_2} {}^2\mathcal{T}'_K = r_K ;$$

d'où finalement : $k = r_K$ et $d_0 = 1 + c_K$; ce qui conduit au résultat attendu.

RÉFÉRENCES

- [1] G. GRAS, *Remarks on K_2 of number fields*, J. Numb. Th. **23** (1986), 64–80 .
- [2] G. GRAS, *Class Field Theory*, SMM (2003) ; second corrected printing (2005).
- [3] G. GRAS & J.-F. JAULENT, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [4] W. HERFORT & P. ZALESSKII, *Finitely generated pro-2-groups with a free subgroup of index 2*, Manuscripta Math. **93** (1997), 457–464.
- [5] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [6] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, *Corps p -rationnels, corps p -réguliers et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–365.
- [7] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Pro- ℓ -extensions de corps de nombres ℓ -rationnels*, J. Number Th. **65** (1997), 240–267 & **80** (2000), 318–319.
- [8] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps totalement réels*, Pub. Mathématiques **44** (2000), 343–351.
- [9] J. JOSSEY *Galois 2-extensions unramified outside 2*, J. Number Th. **124** (2007), 42–76.
- [10] H. MIKI, *On the Leopoldt conjecture on the p -adic regulators*, J. Numb. Th. **26** (1987), 117–128.
- [11] A. MOVAAHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p -rationnels*, Sémin. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.
- [12] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT & K. WINGBERG, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 323, Springer-Verlag, 2000.
- [13] I. R. ŠAFAREVIČ, *Extensions with prescribed ramification points*, Pub. Math. I.H.E.S. **36** (1986), 71–95.
- [14] K. WINGBERG, *On Galois groups of p -closed algebraic number fields with restricted ramification*, J. reine angew. Math. **400** (1989), 185–202.
- [15] K. WINGBERG, *On Galois groups of p -closed algebraic number fields with restricted ramification II*, J. reine angew. Math. **416** (1991), 187–194.

Jean-François JAULENT
 Université de Bordeaux
 Institut de Mathématiques de Bordeaux
 351, cours de la libération
 F-33405 TALENCE Cedex
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr