



HAL
open science

Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes d'un graphe

Jean-Claude Bermond, Pierre Rosenstiehl

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Pierre Rosenstiehl. Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes d'un graphe. Cahier du C.E.R.O., 1973, 15 (3), pp.285-286. hal-00259599

HAL Id: hal-00259599

<https://hal.science/hal-00259599v1>

Submitted on 8 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PANCYCLISME DU CARRE DU GRAPHE AUX ARÊTES D'UN GRAPHE

J.C. BERMOND et P. ROSENSTIEHL

DEFINITIONS

On appelle *graphe aux arêtes* d'un graphe non orienté G , et on note $L(G)$, le graphe dont les sommets sont les arêtes de G , et dont chaque arête joint deux sommets qui sont des arêtes de G ayant une extrémité commune.

On appelle *carré* d'un graphe non orienté G , et on note G^2 , le graphe dont les sommets sont les sommets de G , et dont chaque arête joint, soit deux sommets voisins de G (et il s'agit alors d'une arête de G), soit deux sommets qui sont dans G voisins d'un même troisième.

On appelle *cycle hamiltonien* de G , un cycle élémentaire rencontrant tout sommet de G une fois et une seule. Un graphe G à n sommets est dit *pancyclique* s'il admet pour tout entier i , tel que $3 \leq i \leq n$, un cycle de longueur i .

1. Cycle hamiltonien du carré d'un graphe aux arêtes

Dans [1] (voir *proposition 2 §3* [2]) on prouve que tout graphe connexe G admet une permutation circulaire de ses arêtes telle que toute arête et son image dans la permutation y ont, soit une extrémité commune, soit une extrémité commune avec un même troisième. A deux arêtes de G ayant soit une extrémité commune soit une extrémité commune avec un même troisième, il correspond dans $(L(G))^2$ deux sommets voisins. Il s'ensuit que, à la permutation circulaire mentionnée ci-dessus pour G , il correspond un cycle hamiltonien pour $(L(G))^2$. D'où une nouvelle formulation de la proposition de [2] :

Proposition : Le carré du graphe aux arêtes d'un graphe connexe est hamiltonien.

2. Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes

Soit G un graphe connexe à m arêtes dont l'une est notée u . Il est facile de construire m sous graphes partiels de G , notés G_1, G_2, \dots, G_m , tous connexes, et tels que

G_1 a une seule arête u ,
 G_i a les arêtes de G_{i-1} , et une seule arête exactement
en plus, pour $i = 2, \dots, m$, (et donc $G_m = G$).

On définit par exemple G_i par les i premières arêtes rencontrées par un "mot net" de G (voir [2]).

En appliquant maintenant à G_i , pour $3 \leq i \leq m$, la proposition énoncée en (1), on prouve que par le sommet u de $(L(G))^2$ il passe un cycle de longueur i , et cela pour $i = 3, 4, \dots, m$. D'où :

Théorème. Le carré du graphe aux arêtes d'un graphe connexe est pancyclique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROSENSTIEHL, P., Labyrinthologie mathématique, *Math. Sci. Humaines*, 33, (1971).
- [2] ROSENSTIEHL, P., Les mots de labyrinthe, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, 15, n°3 (1973).