



**HAL**  
open science

## Flow shop robotisé à quatre machine sans attente

Fabien Mangione, Nadia Brauner, Bernard Penz

► **To cite this version:**

Fabien Mangione, Nadia Brauner, Bernard Penz. Flow shop robotisé à quatre machine sans attente. 4ème Conférence Francophone de MODélisation et SIMulation, 2003, Toulouse, France. pp.542-545. hal-00259536

**HAL Id: hal-00259536**

**<https://hal.science/hal-00259536>**

Submitted on 28 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Flow-shop robotisées à quatre machines sans-attente

<b>Fabien Mangione</b> <i>GILCO, ENSGI-INPG,</i> <i>46, avenue Felix Viallet</i> <i>38041 Grenoble Cedex</i> Fabien.Mangione@gilco.inpg.fr tel: 04.76.57.43.23	<b>Nadia Brauner</b> <i>Leibniz-IMAG</i> <i>46, avenue Felix Viallet</i> <i>38031 Grenoble Cedex</i> Nadia.Brauner@imag.fr	<b>Bernard Penz</b> <i>GILCO, ENSGI-INPG</i> <i>46, avenue Felix Viallet</i> <i>38041 Grenoble Cedex</i> Bernard.Penz@gilco.inpg.fr
---	--	---

## Résumé

Dans les cellules robotisées sans attente, les pièces doivent rester sur les machines pendant un temps fixe. Les pièces sont transportées d'une machine à l'autre par un robot. Un des problèmes est d'optimiser les mouvements du robot afin d'avoir la meilleure productivité. Dans ce résumé on traitera du cas de la production cyclique pour une cellule équilibrée à quatre machines. On montrera que le degré maximal des cycles optimaux est inférieur ou égal à 3, puis on donnera les différents cycles optimaux.

**Mots-clé :** Flow shop sans attente, line graphs, cycles.

## 1 Introduction

### 1.1 Lignes de traitement de surface

Sur les lignes de traitement de surface, les pièces sont immergées dans une succession de cuves. Chaque cuve contient des bains qui affectent les propriétés mécaniques ou électriques des pièces. Ce type de ligne est utilisé, par exemple, pour la galvanoplastie. Les pièces sont montées sur des porteurs et transportées d'une cuve à l'autre par un robot. Le temps opératoire (ou temps pendant lequel la pièce est sur la machine) est borné. La borne inférieure est le temps minimum qui permet le traitement et la borne supérieure dépend du type de traitement (attaque acide, rinçage... ). Pour des raisons de type qualité on impose souvent des durées de process fixes c'est à dire une borne maximale égale à la borne minimale (contrainte de sans-attente).

Un objectif classique est de trouver les mouvements du robot qui maximisent la productivité. Dans ce résumé on se restreindra à la production d'un seul type de pièce. Le problème lorsque la borne maximale est infinie est appelé *Robotic Cell Scheduling Problem (RCSP)* [6]. Le problème sans-attente avec deux et trois machines a été étudié par Agnetis [1]. Un survey sur ce type de problèmes a été proposé par Crama *et al.* [4]. On montre dans ce résumé quels sont les cycles optimaux pour une ligne à quatre machines avec des temps opératoires fixes. Après une présentation du problème on montrera l'existence d'un  $k$ -cycle dominant ( $k = 1,2,3$ ).

## 1.2 Présentation du Problème

La Figure 1 montre une ligne avec un robot et quatre machines notées  $M_1, M_2 \dots M_4$ . Les machines  $M_0$  (machine de chargement) et  $M_5$  (machine de déchargement) ont des capacités infinies alors que les autres machines ne peuvent contenir qu'une seule pièce à la fois.

Une telle ligne représente un flow-shop robotisé. Toutes les pièces sont identiques. Chaque pièce est prise sur la machine  $M_0$  puis transférée successivement sur les machines  $M_1, M_2$  etc. . . jusqu'à ce qu'elle atteigne la machine de déchargement,  $M_5$ . Dans notre étude le temps passé par une pièce sur une machine est fixe.

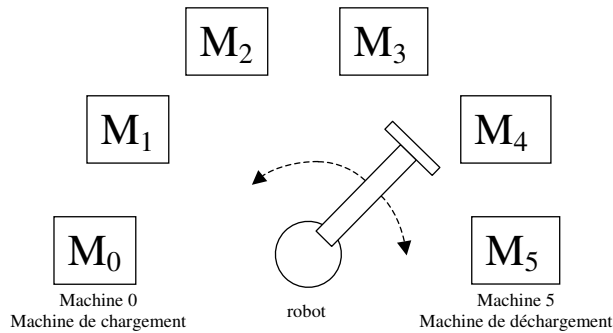


FIG. 1 – Une cellule robotisée à quatre machines

Le temps opératoire d'une pièce sur la machine  $M_i$  est noté  $p_i$ . La ligne est dite équilibrée si tous les temps opératoires sont égaux ( $p_i = p$ ). Le temps de transport entre deux machines consécutives est  $\delta$ . Les temps de transport sont additifs, c'est à dire que le robot met  $|i - j|\delta$  unité de temps pour se déplacer de  $M_i$  à  $M_j$ . Les temps de chargement et déchargement sont considérés comme négligeables comparés aux temps de déplacement.

Chaque mouvement du robot peut être décrit en terme d'activités. L'activité  $i$  ( $i = 0, 1 \dots m$ ) est composée des mouvements suivants : le robot prend une pièce de la machine  $M_i$ , se déplace à la machine  $M_{i+1}$  et dépose la pièce sur la machine  $M_{i+1}$ . On considère des mouvements cycliques et on définit les  $k$ -cycle de la manière suivante :

**Définition 1** *Un  $k$ -cycle  $C_k$  est une séquence d'activités où chaque activité est effectuée exactement  $k$  fois, dans laquelle il y a exactement une occurrence de l'activité  $(i - 1)$  et de l'activité  $(i + 1)$  entre deux activités  $i$  consécutives (dans un sens cyclique).*

On note  $T(C_k)$  le temps de cycle relatif du  $k$ -cycle  $C_k$ , i.e. le temps total pour l'exécution de  $C_k$  divisé par  $k$ . L'objectif du problème est de trouver les cycles qui maximisent la production ce qui équivaut à trouver les cycles qui minimisent les temps de cycle relatifs.

**Définition 2** *Soient  $S$  et  $S'$  deux ensembles de cycles.  $S$  domine  $S'$  si, pour toute instance, la*

propriété suivante est vérifiée : pour chaque  $k'$ -cycle  $C_{k'}$  de  $S'$ , il existe un  $k$ -cycle  $C_k$  dans  $S$  qui vérifie  $T(C_k) \leq T(C_{k'})$ .

Pour une ligne à  $m$  machines, l'état du système peut être représenté par un vecteur de dimension  $m$  où la  $i$ ème composante vaut 0 si la machine  $M_i$  est vide et 1 si elle est occupée. On définit le *graphe d'état* de la ligne,  $G_m$ , où les nœuds sont les états du système et les arcs les activités qui permettent de passer d'un état à l'autre (cf Figure 2). Par exemple l'état 1001 signifie que les machines 2 et 3 sont vides alors que les machines 1 et 4 sont occupées. De cet état il y a deux activités possibles : soit la pièce dans la machine 1 est transportée sur la machine 2 (activité 1) on arrive alors à l'état 0101, soit la pièce dans la machine 4 est déplacée jusqu'à la machine de déchargement (activité 4) ce qui donne l'état 1000.

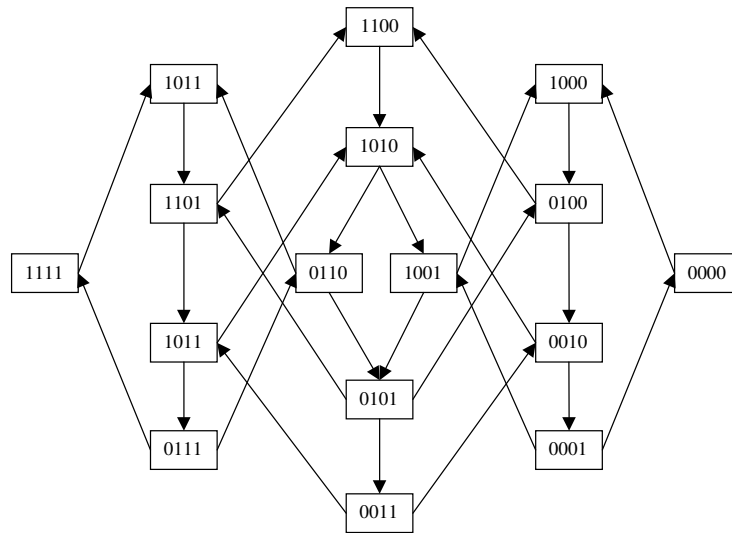


FIG. 2 – Graphe d'état pour une ligne à quatre machines

On peut construire le *line-graph*  $LG_m$  de  $G_m$  de la manière suivante :

- Les nœuds de  $LG_m$  sont les arcs de  $G_m$ ;
- $(a, a')$  est un arc de  $LG_m$  si et seulement si il existe un nœud  $v$  dans  $G_m$  dont l'origine est  $a$  et l'arrivé est  $a'$ .

La figure 3 représente le *line-graph*  $LG_4$  du graphe d'état  $G_4$ . De plus chaque  $k$ -cycle peut être modélisé par un circuit dans le *line-graph*.

Soit  $E_m$ , l'ensemble des nœuds du cycle (01234)(en gris sur la Figure 3). Brauner et Finke [2] ont prouvé la propriété suivante.

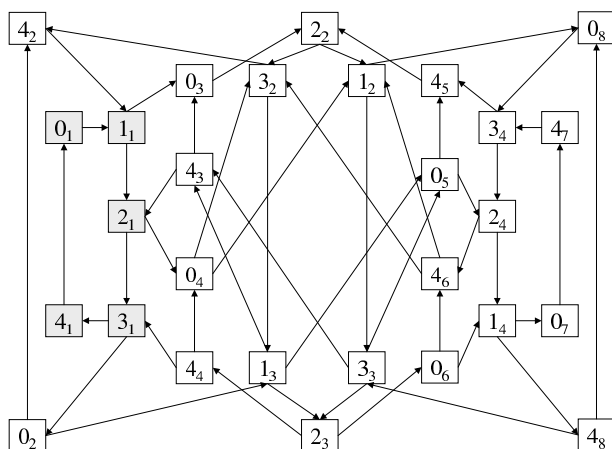


FIG. 3 – Line-graph  $LG_4$  du graphe d'état pour une ligne à quatre machines

**Propriété 1** Pour chaque instance  $I$ , soit  $\ell$  la plus petite valeur telle qu'il existe un  $\ell$ -cycle  $C_\ell$  optimal. Alors  $C_\ell$  traverse au plus une fois chaque nœud de  $E_m$ .

Le théorème suivant est le résultat principal de ce résumé. Il donne les propriétés des cycles de production optimaux pour une ligne à quatre machines.

**Théorème 1** Dans une cellule robotisée équilibrée à quatre machines sans attente il existe un cycle optimal de degré inférieur ou égal à 3.

Ce résultat est vrai pour les lignes équilibrées à quatre machines avec des bornes maximales infinies [3], mais ne peut pas être étendu pour des lignes non-équilibrés [2]. Dans le cas sans attente le théorème 1 donne une preuve de la conjecture d'Agnetis (dominance des  $k$ -cycles pour  $k \leq m - 1$ ) pour les cellules équilibrées à quatre machines. Pour la suite du papier un cycle  $C$  sera strictement dominant si pour tout cycle  $C'$  :  $T(C) < T(C')$ . Pour démontrer le théorème 1 on montre, dans un premier temps, qu'il existe des 1-cycles optimaux puis, dans un second temps, qu'il existe des  $k$ -cycles optimaux, qui dominent strictement tous les  $k'$ -cycles pour  $k = 2$  ou 3 et  $k' < k$ .

## 2 Dominance d'un 1-cycle

### 2.1 $p \in [0; 4\delta[$

Pour les instances qui vérifient  $p \in [0; 4\delta[$  le robot n'a pas le temps de réaliser une activité entre deux activités successives. Donc les activités  $\alpha$  et  $\alpha + 1$  doivent être consécutives. Le seul cycle réalisable est alors le cycle  $Id=(01234)$  avec un temps de cycle de  $4p + 10\delta$ .

### 2.2 $p \in [6\delta; 10\delta[$

Une étude du *line-graphe*  $LG_4$  permet de montrer que, pour  $p \in [6\delta; 8\delta[$ , le cycle (03142) est optimal avec un temps de cycle de  $2p + 10\delta$ . De la même manière le cycle (02413) est optimal pour  $p \in [8\delta; 10\delta[$  son temps de cycle étant de  $3/2p + 4\delta$ .

### 2.3 $p \in [12\delta; \infty[$

Il a été prouvé [5] que dans cette configuration le cycle (04321) est réalisable et optimal. Son temps de cycle est de  $p + 4\delta$ .

## 3 Dominance d'un 2-cycle pour $p \in [4\delta; 6\delta[$

Si  $p \in [4\delta; 6\delta[$  alors le 2-cycle  $C_2^* = (0102132434)$  est optimal et domine strictement tous les 1-cycles. Le temps de cycle relatif de  $C_2^*$  est  $5/2p + 7\delta$ . L'idée de la preuve est basée sur la propriété suivante.

**Propriété 2** *Si  $p \in [4\delta; 6\delta[$ , alors entre une activité  $\alpha$  et l'activité  $\alpha + 1$  suivante, il peut y avoir soit l'activité  $\alpha - 1$  soit l'activité  $\alpha + 2$  soit aucune activité.*

Cette propriété implique que les seuls cycles réalisables sont des concaténations de  $C_2^*$  et  $Id$ . Si un tel cycle est de degré supérieur à 1, alors il passe plus de deux fois par les nœuds de  $E_m$  dans le *line-graph* et donc il est dominé par le meilleur sous cycle qui est  $C_2^*$  (propriété 1).

## 4 Dominance d'un 3-cycle pour $p \in [10\delta; 12\delta[$

On prouve que dans cette configuration le 3-cycle  $C_3^*=(043104210321432)$  est optimal. Le temps de cycle relatif de  $C_3^*$  est  $4/3p + 14/3\delta$ .

Le *line-graph* Figure 3 est construit pour une ligne dont les temps opératoires ne sont pas bornés. Si on retire les arcs irréalisables, pour  $p \in [10\delta, 12\delta[$ , on obtient le *line-graph* de la Figure 4. Les traits en gras représentant les arcs du cycle  $C_3^*$ .

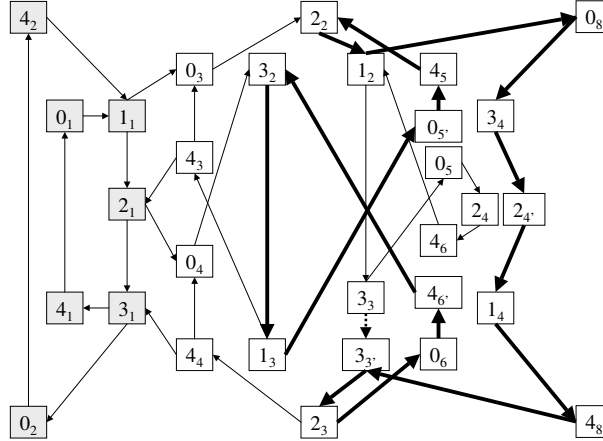


FIG. 4 – *Line-graph*  $LG_4$  pour  $p \in [10\delta, 12\delta[$

Pour prouver la dominance de  $C_3^*$  on démontre que son temps de cycle relatif est inférieur à celui des 1-cycles (paragraphe 4.1) puis des 2-cycles (paragraphe 4.2) et enfin des  $k$ -cycles,  $k > 3$  (paragraphe 4.3).

#### 4.1 1-cycles

Etant données les conditions sur les temps opératoires, il ne reste que quatre 1- cycles réalisables. Le tableau 1 donne ces cycles ainsi que leurs temps de cycle.

TAB. 1 – *1-cycles réalisables et leurs temps de cycle*

Cycle	temps de cycle
01234	$4p + 10\delta$
02413	$3/2p + 4\delta$
04123	$3p + 4\delta$
03142	$2p + 10\delta$

Tous ces temps de cycle sont supérieurs à  $4/3p + 14/3\delta$  dans l'intervalle étudié, donc  $C_3^*$  domine strictement tous ces 1-cycles.

## 4.2 2-cycles

Dans cette section on prouve, dans un premier temps, que pour  $p = 10\delta$ ,  $C_3^*$  domine tout 2-cycle ( $T(C_3^*) = 18\delta$ ). Pour cela on étudie les retards engendrés par les séquences possibles entre deux activités 1 et 0 consécutives, et on remarque que les cycles obtenus sont soit irréalisables, soit dominés par  $C_3^*$ . En utilisant la même méthode on prouve la dominance pour  $p = 12\delta$ . Les temps de cycle étant linéaires sur l'intervalle  $[10\delta, 12\delta[$  on peut en déduire que  $C_3^*$  domine les 2-cycles pour tout  $p \in [10\delta, 12\delta[$ .

## 4.3 $k$ -cycles ( $k \geq 3$ )

Pour démontrer que  $C_3^*$  domine tout les  $k$ -cycles pour  $k \geq 3$  on étudie, dans le *line-graph*, les chemins les plus intéressants pour aller d'un nœud  $2_X$  à un autre dans la Figure 4. Cette étude permet de déterminer les chemins les plus intéressants parmi les chemins réalisables, ensuite en joignant ces chemins on obtient le cycle  $C_3^*$ . On peut donc en déduire que  $C_3^*$  est dominant.

Le tableau 2 indique, pour une cellule robotisée équilibrée à quatre machines, les cycles optimaux.

TAB. 2 – Cycles optimaux pour  $m = 4$

$p$	$[0, 4\delta[$	$[4\delta, 6\delta[$	$[6\delta, 8\delta[$	$[8\delta, 10\delta[$	$[10\delta, 12\delta[$	$\geq 12\delta$
Cycle optimal	01234	0102132434	03142	02413	043104210321432	04321
temps de cycle	$4p + 10\delta$	$5/2p + 7\delta$	$2p + 10\delta$	$3/2p + 4\delta$	$4/3p + 14/3\delta$	$p + 4\delta$

## 5 Conclusions et perspectives

Dans ce résumé on a montré que, dans une cellule robotisée, sans attente, équilibrée à quatre machines, le degré des cycles optimaux est borné ( $k \leq 3$ ). Pour cela on a montré qu'il existe des  $k$ -cycles strictement dominants pour  $k=1, 2$  ou  $3$ . Le but maintenant est d'élargir ces méthodes pour des cellules de plus grande taille ( $m \geq 5$ ) voire de généraliser à  $m$  machines ( $m$  quelconque) ces résultats.

## Références

- [1] A. Agnetis. Scheduling no-wait robotic cells with two and three machines. *European Journal of Operational Research*, 123(2):303–314, 2000.



- [2] N. Brauner and G. Finke. On cycles and permutations in robotic cells. *Mathematical and Computer Modelling*, 34:565–591, 2001.
- [3] N. Brauner and G. Finke. Optimal moves of the material handling system in a robotic cell. *International Journal of Production Economics*, 74(1-3):269–277, 2001.
- [4] Y. Crama, V. Kats, J. van de Klundert, and E. Levner. Cyclic scheduling in robotic flowshops. *Annals of Operation Research: Mathematics of Industrial Systems*, 96:97–124, 2000.
- [5] Y. Crama and J. van de Klundert. Cyclic scheduling of identical parts in a robotic cell. *Operations Research*, 45(6):952–965, 1997.
- [6] S.P Sethi, C. Sriskandarajah, G. Sorger, J. Blazewicz, and W. Kubiak. Sequencing of parts and robots moves in a robotic cell. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 4:331–358, 1992.