



**HAL**  
open science

## Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures

Pierre Ladevèze, Guillaume Puel, Arnaud Deraemaeker, Thierry Romeuf

► **To cite this version:**

Pierre Ladevèze, Guillaume Puel, Arnaud Deraemaeker, Thierry Romeuf. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2004, 13 (5-6-7), pp.571-582. 10.3166/reef.13.571-582 . hal-00258639

**HAL Id: hal-00258639**

**<https://hal.science/hal-00258639>**

Submitted on 22 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Sur une théorie des Méconnaissances en calcul des structures

**Pierre Ladevèze\*** — **Guillaume Puel\*** — **Arnaud Deraemaeker\*\*** —  
**Thierry Romeuf\*\*\***

\* *LMT-Cachan (École Normale Supérieure de Cachan - CNRS - Université Paris 6)*  
61 avenue du Président Wilson F-94235 Cachan Cedex  
{pierre.ladeveze,guillaume.puel}@lmt.ens-cachan.fr

\*\* *Université Libre de Bruxelles - Active Structures Laboratory*  
50 avenue Franklin Roosevelt CP 165/42 B-1050 Bruxelles  
arnaud.deraemaeker@ulb.ac.be

\*\*\* *European Aeronautic Defence and Space Company (EADS Space Transportation)*  
Route de Verneuil BP 96 F-78133 Les Mureaux Cedex  
thierry.romeuf@eads.launchers.net

---

*RÉSUMÉ. La quantification de la qualité d'un modèle est très certainement aujourd'hui une des questions majeures, tout particulièrement en dynamique des structures, avec un nombre croissant de méthodes de validation d'un modèle par rapport à une référence expérimentale. Cet article présente une nouvelle théorie basée sur le concept de Méconnaissance mêlant théorie des intervalles et théorie des probabilités ; pour cela, on considère pour chaque sous-structure les deux bornes de l'énergie de déformation, en tant que variables aléatoires. Une stratégie générale de réduction des méconnaissances est alors introduite et appliquée à divers exemples académiques et industriels.*

*ABSTRACT. The quantification of the quality of a structural mechanical model remains a major issue today, with the use of an increasing number of methods in order to validate a model in comparison with an experimental reference. This paper presents a new theory based on the concept of Lack of Knowledge combining convex uncertainty models with probabilistic features by introducing for each substructure two bounds of the strain energy as stochastic variables. A general strategy of reduction of the lack of knowledge is discussed and applied to academic as well as industrial cases.*

*MOTS-CLÉS : méconnaissances, incertitudes, validation de modèle, dynamique des structures*

*KEYWORDS: lacks of knowledge, uncertainties, model validation, structural dynamics*

---

## 1. Introduction

La quantification de la qualité d'un modèle reste encore aujourd'hui une question majeure ; dans le domaine de la confrontation avec une référence expérimentale, de nombreuses méthodes ont été développées pour le recalage des rigidités et des masses dans les modèles dynamiques, à partir de résultats d'essai en vibrations libres ou forcées, comme dans [MOT 93] ou [LAD 99]. Toutefois, un modèle, même recalé, peut ne pas rendre compte correctement de certains phénomènes : il peut y avoir des dispersions dans les caractéristiques matériaux, ou la modélisation de certaines parties, comme les liaisons, peut être simplifiée. Afin de décrire ces incertitudes, l'utilisation de méthodes probabilistes s'est intensifiée [SCH 01] ; en général, ces méthodes consistent à étudier les effets des incertitudes affectant les paramètres du modèle sur la variabilité de la sortie. Mais on peut aussi trouver des alternatives qui n'introduisent pas nécessairement de lois de probabilité [BEN 99].

Le concept de *Méconnaissance* a été introduit dans [LAD 02] et mêle contenu probabiliste et théorie des intervalles. Le principe de base est la globalisation par sous-structure des différentes sources d'erreur au moyen d'une variable interne scalaire dite de méconnaissance, qui appartient à un intervalle dont les bornes supérieure et inférieure suivent des lois probabilistes. Il est alors possible de calculer pour n'importe quelle quantité d'intérêt un intervalle d'appartenance dont les bornes sont probabilistes. Nous présentons ici les premiers résultats d'une stratégie de réduction des méconnaissances par l'apport d'information expérimentale, concernant des applications académiques et industrielles [LAD 04].

## 2. Méconnaissances de base

### 2.1. Définition

La théorie se place dans le cadre où une structure est modélisée comme un assemblage de sous-structures, les liaisons pouvant être assimilées à des sous-structures particulières. C'est à l'échelle de ces sous-structures que l'on choisit de quantifier les incertitudes, globalisant ainsi toutes les sources d'erreur existantes. Pour le moment, on considère que ces dernières sont du type "rigidité structurale".

Pour chaque sous-structure  $E$  d'une structure réelle, on peut associer une méconnaissance  $m$  qui évolue dans un intervalle dont les bornes  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont définies formellement comme suit :

$$(1 - m_E^-) \bar{K}_E \leq K_E \leq (1 + m_E^+) \bar{K}_E \quad (1)$$

où  $K_E$  et  $\bar{K}_E$  désignent la matrice de rigidité associée à la sous-structure  $E$ , respectivement pour une structure réelle et pour le modèle théorique déterministe. Pour traduire en pratique cette inégalité, on fait intervenir les énergies de déformation :

$$(1 - m_E^-) \bar{e}_E \leq e_E \leq (1 + m_E^+) \bar{e}_E \quad (2)$$

où  $e_E = \frac{1}{2}U^T K_E U$  désigne l'énergie de déformation d'une structure réelle appartenant à la famille de structures semblables étudiées et  $\bar{e}_E = \frac{1}{2}U^T \bar{K}_E U$  celle du modèle théorique déterministe. Cette inégalité doit être vérifiée quel que soit le champ de déplacement  $U$ . Les deux quantités  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont des variables internes scalaires relatives à la sous-structure  $E$  et sont nommées *méconnaissances de base supérieure* et *inférieure* respectivement.

Pour chaque sous-structure, la méconnaissance  $m$  est située à l'intérieur de l'intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  sans que l'on puisse être plus précis. Par contre, les bornes de cet intervalle sont caractérisées par des lois de probabilité dont la nature est fixée *a priori* et dont les caractéristiques sont décrites par la donnée de deux valeurs  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  :

- par exemple, si la loi de probabilité choisie est de type uniforme, ces deux valeurs encadrent toutes les réalisations possibles de  $m_E^+$  et  $m_E^-$  ;
- dans certains cas où la modélisation est imparfaite (par exemple, une liaison non-linéaire représentée par un modèle linéaire), le manque d'information est tel que l'on n'associe pas de loi de probabilité aux méconnaissances de base : on peut alors décider de juste affirmer que la méconnaissance  $m$  est située quelque part dans l'intervalle (cette fois-ci déterministe)  $[-\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$ .

D'autres cas de figure sont envisageables, comme l'utilisation d'une loi de probabilité gaussienne comme détaillé dans le paragraphe suivant.

## 2.2. Illustration

Dans le cas où l'on considère que les seules sources d'erreur sont les incertitudes concernant le matériau, on peut raisonnablement considérer que l'on peut associer à la méconnaissance  $m$  sur la sous-structure  $E$  une loi normale centrée de densité de probabilité  $p(m)$  :

$$m \in [-m_E^-; m_E^+] \text{ avec } p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

L'écart-type  $\sigma$  de la loi gaussienne peut être défini grâce aux valeurs  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  en posant par exemple que  $\int_{-\bar{m}_E^-}^{\bar{m}_E^+} p(m) dm = 0,99$  ; pour éviter des tirages non physiques ( $-m_E^- < -1$ ), on décide d'imposer une densité de probabilité nulle en dehors de  $[-\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$  quitte à la renormaliser ensuite.

Avec une telle loi, la probabilité d'observer  $m$  dans un intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  donné est :

$$P(-m_E^- \leq m \leq m_E^+) = \int_{-m_E^-}^{m_E^+} p(m) dm \quad (4)$$

Puisque les méconnaissances de base  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont définies dans (2) de part et d'autre du modèle théorique, l'événement précédent peut être décrit par deux événements indépendants :

– soit  $m \in [0; m_E^+]$ , à savoir que l'on observe l'événement  $(m_E^- = 0, m_E^+ \geq 0)$  de probabilité  $P^+(m_E^+)$ ;

– soit  $m \in [-m_E^-; 0]$ , c'est-à-dire que l'on a l'événement  $(m_E^- \geq 0, m_E^+ = 0)$  de probabilité  $P^-(m_E^-)$ .

On a alors  $P^+(\infty) + P^-(\infty) = 1$ , et même  $P^+(\infty) = P^-(\infty) = \frac{1}{2}$  dans le cas particulier d'une loi normale centrée. Ce cas montre comment on peut représenter une incertitude représentée par une loi de probabilité classique à l'aide de notre concept de méconnaissance : selon la valeur de  $m$  obtenue par tirage, on obtient deux types d'intervalles distincts :  $[0; m_E^+]$  et  $[-m_E^-; 0]$ .

### 2.3. Concept de probabilité d'intervalle

Puisque l'utilisation de deux probabilités  $P^+$  et  $P^-$  est assez délicate en pratique, quelques outils mathématiques ont été introduits dans [LAD 03].

Considérons une famille d'intervalles  $[-m_E^-; m_E^+] \ni m$  avec  $m_E^+ + m_E^- = L$ . L'intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  est dit *standard* si pour  $L$  donné, la probabilité d'avoir  $m$  appartenant à  $[-m_E^-; m_E^+]$  est maximale sur l'ensemble des intervalles de longueur  $L$  :

$$I(L) = \arg \max_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ m_E^+ + m_E^- = L}} P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) \quad (5)$$

De cette définition, on peut introduire le concept de *probabilité d'intervalle* en posant que pour  $L$  donné,  $P(L)$  est la probabilité d'avoir  $m$  appartenant à  $I(L)$  :

$$P(L) = P(m \in I(L)) = \max_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ m_E^+ + m_E^- = L}} P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) \quad (6)$$

Une interprétation possible de ces définitions est la suivante : si l'on cherche un intervalle de méconnaissances de base tel que  $m$  ait une probabilité  $P$  donnée d'être à l'intérieur, on considère de façon unique l'intervalle standard  $I(L)$  tel que la probabilité d'intervalle associée  $P(L)$  est égale à  $P$ . On peut montrer que cet intervalle  $I(L)$  est en fait le plus petit intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  tel que  $P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) = P$  :

$$I(L) = \arg \min_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) = P}} m_E^+ + m_E^- \quad (7)$$

## 3. Utilisation des méconnaissances

### 3.1. Principe

Le concept de probabilité d'intervalle introduit plus haut permet de traduire simplement la comparaison que l'on effectue entre le modèle de méconnaissance et le réel. Considérons une certaine quantité d'intérêt  $\alpha$  concernant l'ensemble de la structure.

– en ce qui concerne le modèle de méconnaissance, on peut associer à chaque réalisation  $(m_E^-, m_E^+)_{E \in \Omega}$  deux bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  de la quantité  $\alpha_{mod}$  : il s’agit simplement de la propagation des intervalles de méconnaissances de base  $([-m_E^-; m_E^+])_{E \in \Omega}$ , comme on le montrera dans le paragraphe 3.2. Dès lors que l’on connaît les lois de probabilité sur les méconnaissances de base, on est capable de déterminer la distribution de ces bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  sous la forme d’une probabilité d’intervalle  $P_\alpha(L)$  telle que  $P(\alpha_{mod} \in I_\alpha(L)) = P_\alpha(L) \forall L$ . Encore une fois, cela revient à dire que pour une probabilité  $P$  donnée on considère l’intervalle standard  $I_\alpha(L)$  tel que  $P(\alpha_{mod} \in I_\alpha(L)) = P$ . Les deux bornes de cet intervalle  $I_\alpha(L)$ , notées  $\alpha^{inf}$  et  $\alpha^{sup}$ , constituent ce que l’on appelle la *méconnaissance effective* sur la quantité d’intérêt  $\alpha$ .

– en ce qui concerne la famille de structures réelles, on peut déterminer deux valeurs  $\alpha_{exp}^{inf}$  et  $\alpha_{exp}^{sup}$  qui, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, encadrent  $P\%$  des valeurs de la quantité d’intérêt  $\alpha_{exp}$  liée aux structures réelles.

La comparaison entre les données expérimentales et les valeurs issues du modèle de méconnaissance peut alors se faire à l’aide du concept de probabilité d’intervalle en affirmant que les méconnaissances de base doivent être telles que :

$$P(\alpha_{exp} \in I_\alpha(L)) \geq P_\alpha(L) \forall L \quad (8)$$

En termes d’intervalles standards, cela revient à dire que l’on doit avoir la relation  $\alpha^{inf} \leq \alpha_{exp}^{inf} \leq \alpha_{exp}^{sup} \leq \alpha^{sup}$  pour toute valeur de probabilité  $P$  donnée. Cette interprétation est en fait une généralisation des valeurs à 99% évoquées dans [LAD 02] et [PUE 03].

### 3.2. Méconnaissances effectives

Le calcul de méconnaissances effectives concerne des quantités d’intérêt qui sont courantes dans le domaine de l’analyse modale ; ici nous nous intéressons à des mesures dans le cadre des vibrations libres, d’où l’utilisation des pulsations propres  $\omega_i$  et des formes propres de vibration  $\phi_i$  comme quantités d’intérêt  $\alpha$ . On rappelle que le couple de valeurs  $\alpha^{inf}$  et  $\alpha^{sup}$  constitue ce qu’on appelle la *méconnaissance effective* liée à la quantité  $\alpha_{mod}$  ; leur détermination pour des pulsations propres et des modes propres de vibration est donnée dans les deux paragraphes suivants.

#### 3.2.1. Méconnaissance effective sur une pulsation propre

Si les modes  $\bar{\phi}_i$  du modèle théorique déterministe sont normalisés par rapport à la matrice de masse, une approximation du premier ordre nous donne :

$$\omega_i^2 - \bar{\omega}_i^2 = \phi_i^T K \phi_i - \bar{\phi}_i^T \bar{K} \bar{\phi}_i \simeq \bar{\phi}_i^T (K - \bar{K}) \bar{\phi}_i = 2 \sum_{E \in \Omega} (e_E(\bar{\phi}_i) - \bar{e}_E(\bar{\phi}_i)) \quad (9)$$

La relation fondamentale (2) nous permet de propager les intervalles  $([-m_E^-; m_E^+])_{E \in \Omega}$ , où pour chaque sous-structure  $E$ ,  $(m_E^-, m_E^+)$  est une réalisation donnée des méconnaissances de base selon les lois de probabilité choisies, de la façon suivante :

$$\omega_i^{2-} \leq \omega_i^2 \leq \omega_i^{2+} \quad (10)$$

avec

$$\omega_i^{2-} = \bar{\omega}_i^2 - 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^- \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (11)$$

$$\omega_i^{2+} = \bar{\omega}_i^2 + 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^+ \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (12)$$

Connaissant les lois de probabilité sur les méconnaissances de base, on est capable d'obtenir les dispersions des bornes  $\omega_i^{2-}$  et  $\omega_i^{2+}$ , et donc de déterminer, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, les deux bornes  $\omega_i^{2inf}$  et  $\omega_i^{2sup}$  de l'intervalle standard  $I_{\omega_i^2}(L)$  associé, ou autrement dit la méconnaissance effective sur le carré de la fréquence propre  $\omega_i^2$ .

### 3.2.2. Méconnaissance effective sur une forme propre

Pour des réalisations  $(m_E^-, m_E^+)_{E \in \Omega}$  de faibles valeurs, on peut approcher la variation de la valeur d'une forme propre en un degré de liberté (ddl) particulier par :

$$\phi_{ki} - \bar{\phi}_{ki} \simeq U^T \Delta K \bar{\phi}_i = \sum_{E \in \Omega} U^T (K_E - \bar{K}_E) \bar{\phi}_i \quad (13)$$

où  $U$  est un vecteur donné dont nous ne détaillerons pas le calcul ici. En utilisant l'égalité  $U^T K_E \bar{\phi}_i = \frac{1}{2} e_E(U + \bar{\phi}_i) - \frac{1}{2} e_E(U - \bar{\phi}_i)$  et la relation fondamentale (2), on peut propager les intervalles de méconnaissances de base de la façon suivante :

$$\phi_{ki}^- \leq \phi_{ki} \leq \phi_{ki}^+ \quad (14)$$

avec

$$\phi_{ki}^- = \bar{\phi}_{ki} - \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \{m_E^- \bar{e}_E(U + \bar{\phi}_i) + m_E^+ \bar{e}_E(U - \bar{\phi}_i)\} \quad (15)$$

$$\phi_{ki}^+ = \bar{\phi}_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \{m_E^+ \bar{e}_E(U + \bar{\phi}_i) + m_E^- \bar{e}_E(U - \bar{\phi}_i)\} \quad (16)$$

On détermine alors, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, les deux bornes  $\phi_{ki}^{inf}$  et  $\phi_{ki}^{sup}$  de l'intervalle standard  $I_{\phi_{ki}}(L)$  associé, ou autrement dit la méconnaissance effective sur la valeur au ddl  $k$  de la forme propre  $\phi_i$ .

### 3.3. Détermination des méconnaissances de base

La quantification de la qualité d'un modèle par rapport à une référence expérimentale au moyen de notre théorie se traduit par la détermination des méconnaissances de base

qui sont les plus représentatives des dispersions constatées. L'idée majeure de cette détermination est que plus on a d'informations expérimentales, plus on est susceptible de réduire les méconnaissances de base. Ce principe suppose que l'on puisse avoir au départ une certaine description, éventuellement grossière, mais nécessairement majorante, des méconnaissances de base pour chaque sous-structure ; ceci peut être obtenu grâce à de la connaissance *a priori* ou à de l'expérience concernant la structure étudiée. Au bilan, on se donne des valeurs initiales majorantes  $(\overline{m}_E^{+0}, \overline{m}_E^{-0})_{E \in \Omega}$  (associées à des lois de probabilité) pour décrire les méconnaissances de base sur chaque sous-structure.

Le procédé de réduction consiste à utiliser l'apport d'informations expérimentales pertinentes pour réduire le niveau de méconnaissance sur une sous-structure à la fois. Considérons une sous-structure donnée  $E^*$ . Il s'agit de déterminer des valeurs plus faibles pour  $\overline{m}_{E^*}^-$  et  $\overline{m}_{E^*}^+$ , ce qui, en termes de probabilités d'intervalle, se traduit par l'inégalité suivante :

$$P_{E^*}^0(L) \leq P_{E^*}(L) \quad \forall L \quad (17)$$

Cette réduction est réalisée sous la contrainte (8) associée à l'information expérimentale retenue, ce qui, en termes de méconnaissance effective sur la quantité d'intérêt  $\alpha$  s'écrit :

$$\alpha^{inf} \leq \alpha_{exp}^{inf} \leq \alpha_{exp}^{sup} \leq \alpha^{sup} \quad (18)$$

On rappelle que la méconnaissance effective est issue de la probabilité d'intervalle  $P_\alpha(L)$  caractérisant les distributions des bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  encadrant la quantité d'intérêt  $\alpha_{mod}$  relative au modèle. Ces bornes font intervenir des contributions de la part de toutes les sous-structures ; pour un jeu de réalisations donné  $(m_E^-, m_E^+)_{E \in \Omega}$ , on a en effet :

$$\alpha^+ = \overline{\alpha} + \Delta\alpha_{E^*}^+ + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^+ \quad (19)$$

$$\alpha^- = \overline{\alpha} + \Delta\alpha_{E^*}^- + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^-. \quad (20)$$

Ainsi, la réduction de la méconnaissance sur  $E^*$  peut tout à fait être faussée par des niveaux de méconnaissance initiaux très surestimés sur les autres sous-structures  $E \neq E^*$ . Pour éviter ce cas de figure, on envisage de tenir compte des cas les pires concernant toutes les autres sous-structures, ce qui peut s'écrire formellement de la façon suivante :

$$\alpha^{+pire} = \overline{\alpha} + \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^+ + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^{+pire} \quad (21)$$

$$\alpha^{-pire} = \overline{\alpha} + \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^- + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^{-pire}. \quad (22)$$

Cette analyse des cas pires est enrichie par l'introduction d'un coefficient qui permet de quantifier à quel point l'information expérimentale sélectionnée est représentative



du comportement de la structure : ce terme  $\rho_{E^*} \in ]0; 1]$ , appelé *coefficient de représentativité*, est maximal quand les données expérimentales traduisent parfaitement la mécanique globale de la structure. On peut alors associer aux bornes  $\alpha^{+pire}$  et  $\alpha^{-pire}$  une probabilité d'intervalle  $P_{\alpha^{pire}}(L)$  et en déduire les deux bornes  $\alpha^{suppire}$  et  $\alpha^{infpire}$  de l'intervalle standard  $I_{\alpha^{pire}}(L)$  associé à une valeur de probabilité  $P$  donnée. Ainsi, de nouvelles contraintes doivent être prises en compte :

$$\alpha^{infpire} \leq \alpha_{exp}^{inf} \leq \alpha_{exp}^{sup} \leq \alpha^{suppire} \quad (23)$$

En résumé, le problème de réduction de la méconnaissance sur une sous-structure  $E^*$  donnée consiste à trouver, sous le respect des contraintes associées à l'information expérimentale sélectionnée :

$$\max P_{E^*}(L, \bar{m}) \quad \forall L \quad (24)$$

## 4. Application à un cas simple

### 4.1. Définition de la structure

#### 4.1.1. Données du modèle théorique déterministe

La structure étudiée est un treillis plan analogue à celui étudié dans [PUE 03] ; il est constitué de six barres reliées par des rotules, que l'on peut l'observer sur la figure 1. On suppose que les barres ne sont sollicitées qu'en traction-compression, et que les liaisons entre la structure et le bâti sont parfaitement rigides. Les caractéristiques matériaux du modèle théorique sont données dans le tableau 1.

#### 4.1.2. Données expérimentales

On considère une famille de treillis semblables, et leurs fréquences propres et modes propres constituent les données expérimentales qui vont permettre la réduction des méconnaissances de base. Les treillis "expérimentaux" sont simulés à partir du modèle théorique déterministe en introduisant certaines dispersions de raideur dans les caractéristiques matériaux ; ces dernières sont indiquées dans le tableau 1. Il faut noter que le matériau "X" n'est pas très bien connu et que la dispersion associée de raideur vérifie une distribution uniforme. Pour chacun de ces treillis simulés, on est capable de calculer les fréquences propres et modes propres, et donc de déterminer les lois de répartition des quantités d'intérêt expérimentales (par exemple figure 2).

### 4.2. Réduction des méconnaissances de base

Le processus de réduction est entrepris en imposant *a priori* un niveau initial de méconnaissance ( $\bar{m}_E^- = 50\%$ ,  $\bar{m}_E^+ = 50\%$ ) sur chaque sous-structure, ce qui constitue une description majorante appropriée. On suppose également que les lois de

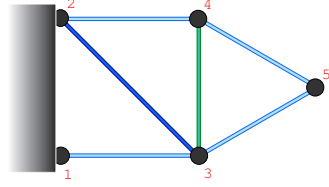


Figure 1. Treillis plan étudié

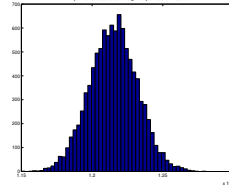


Figure 2. Répartition expérimentale de  $\omega_{exp}^2$  pour le mode 6

Gr.	Matériau	Module d'Young	Masse volumique	Loi choisie	Moyenne/Étendue	Raideurs simulées
g1	alu	$\bar{E}_{g1} = 72GPa$	$2700kg/m^3$	gaussienne	0%/5%	$\in [0.95\bar{K}_{g1}; 1.05\bar{K}_{g1}]$
g2	acier	$\bar{E}_{g2} = 210GPa$	$7800kg/m^3$	gaussienne	-5%/10%	$\in [0.85\bar{K}_{g2}; 1.05\bar{K}_{g2}]$
g3	"X"	$\bar{E}_{g3} = 10GPa$	$1500kg/m^3$	uniforme	5%/15%	$\in [0.90\bar{K}_{g3}; 1.20\bar{K}_{g3}]$

Tableau 1. Caractéristiques matériaux du modèle déterministe du treillis et des structures numériquement simulées, où les barres 1-3, 3-5, 4-5 et 2-4 forment le groupe g1, la barre 2-3 est le groupe g2 et la barre 3-4 est le groupe g3

probabilité des méconnaissances de base sont gaussiennes pour les barres en aluminium et en acier, et uniformes pour la barre en matériau "X". On ne garde comme informations expérimentales que les valeurs  $\omega_{i exp}^{2 sup}$  et  $\omega_{i exp}^{2 inf}$  qui encadrent 99% des valeurs expérimentales de fréquences propres effectivement mesurées ; en particulier, on ne s'occupe pas de la répartition de ces valeurs à l'intérieur de ces bornes de l'intervalle standard  $I_{\omega_i^2}$  de probabilité 99%. Si on voulait une description plus riche, on pourrait également utiliser les valeurs à 50% de ces quantités expérimentales, ce qui nous donnerait une estimation de l'écart-type.

Dans un deuxième temps, il est important de sélectionner quelles sont les meilleures mesures expérimentales pour réaliser les réductions successivement sur les différentes sous-structures. Une méthode efficace consiste à s'appuyer sur le fait que la sensibilité des méconnaissances effectives vis-à-vis des méconnaissances de base est directement liée aux énergies de déformation modales du modèle théorique déterministe, comme on peut le constater dans les expressions du paragraphe 3.2. En effet, les informations expérimentales les plus pertinentes dans le processus de réduction des méconnaissances de base de la structure  $E^*$  sont celles pour lesquelles l'énergie de déformation modale se trouve majoritairement dans  $E^*$ . Comme les informations expérimentales que nous avons retenues concernent des fréquences propres, nous avons besoin de considérer les énergies  $\bar{e}_E(\bar{\phi}_i)$  ; celles-ci sont répertoriées dans le tableau 2 où les plus importantes ont été mises en valeur.

Le processus de réduction est mené en choisissant successivement comme informations expérimentales les modes 6, 4 et 2 respectivement pour les groupes 1, 2 et 3,

$\bar{e}_E(\bar{\phi}_i)$	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
E=g1	<b>3, 3.10<sup>5</sup></b>	<b>1, 3.10<sup>6</sup></b>	<b>7, 6.10<sup>6</sup></b>	3, 8.10 <sup>6</sup>	<b>2, 5.10<sup>7</sup></b>	<b>6, 0.10<sup>7</sup></b>
E=g2	<b>1, 4.10<sup>5</sup></b>	6, 7.10 <sup>4</sup>	9, 9.10 <sup>3</sup>	<b>1, 0.10<sup>7</sup></b>	2, 0.10 <sup>6</sup>	1, 7.10 <sup>5</sup>
E=g3	<b>2, 5.10<sup>5</sup></b>	<b>1, 7.10<sup>6</sup></b>	6, 1.10 <sup>5</sup>	4, 7.10 <sup>5</sup>	6, 9.10 <sup>4</sup>	1, 9.10 <sup>5</sup>

**Tableau 2.** *Énergies de déformation modales pour les modes 1 à 6*

et en supposant que ces informations sont représentatives du comportement global du treillis (coefficients  $\rho_E$  égaux à 1). Les résultats finaux donnent :

$$\begin{aligned} \bar{m}_{g1}^+ &= 3, 2\% & \bar{m}_{g2}^+ &= 3, 4\% & \bar{m}_{g3}^+ &= 20, 5\% \\ \bar{m}_{g1}^- &= 3, 4\% & \bar{m}_{g2}^- &= 9, 2\% & \bar{m}_{g3}^- &= 10, 1\% \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être directement comparés dans ce cas simple avec les dispersions de raideur introduites dans le modèle déterministe pour simuler les données expérimentales :  $[\bar{K}_{g1}-5\%; \bar{K}_{g1}+5\%]$ ,  $[\bar{K}_{g2}-15\%; \bar{K}_{g2}+5\%]$  et  $[\bar{K}_{g3}-10\%; \bar{K}_{g3}+20\%]$ . On peut donc conclure sur la bonne correspondance des valeurs obtenues.

### 4.3. Capacité de prédiction

Avec les méconnaissances de base que l'on vient juste de déterminer, on peut calculer les méconnaissances effectives pour les trois modes que l'on n'a pas encore utilisés (1, 3 et 5), de façon à évaluer la qualité des résultats de notre procédé de réduction. Les méconnaissances de base sont modélisées avec les lois de probabilité choisies associées aux niveaux déterminés ; les valeurs à 99% correspondantes sont alors calculées et comparées avec les valeurs à 99% expérimentales dans le tableau 3. On constate que les contraintes sont respectées de façon satisfaisante pour les modes 1, 3 et 5, ce qui montre la cohérence des résultats obtenus avec les modes 2, 4 et 6.

$i$	$\omega_i^{2 inf}$	$\omega_i^{2 inf exp}$	$\bar{\omega}_i^2$	$\omega_i^{2 sup}$	$\omega_i^{2 sup exp}$	$\phi_{ki}^{inf}$	$\phi_{ki exp}^{inf}$	$\bar{\phi}_{ki}$	$\phi_{ki exp}^{sup}$	$\phi_{ki}^{sup}$
1	1, 36.10 <sup>6</sup>	1, 35.10 <sup>6</sup>	1, 43.10 <sup>6</sup>	1, 53.10 <sup>6</sup>	1, 54.10 <sup>6</sup>	0, 85	0, 88	0, 95	0, 99	1, 01
3	1, 58.10 <sup>7</sup>	1, 58.10 <sup>7</sup>	1, 64.10 <sup>7</sup>	1, 71.10 <sup>7</sup>	1, 70.10 <sup>7</sup>	-1, 00	-0, 98	-0, 95	-0, 91	-0, 90
5	5, 28.10 <sup>7</sup>	5, 29.10 <sup>7</sup>	5, 51.10 <sup>7</sup>	5, 68.10 <sup>7</sup>	5, 69.10 <sup>7</sup>	-0, 74	-0, 72	-0, 68	-0, 62	-0, 62

**Tableau 3.** *Comparaison des pulsations propres et des formes propres (valeurs à 99%) pour les modes 1, 3, 5.*

## 5. Étude d'un cas industriel

### 5.1. Description de la structure

On présente ici l'application de la méthode à une structure industrielle réelle : le support de satellites Sylda5, développé par le groupe EADS, et capable de transporter deux satellites simultanément (figure 3). Des mesures en 260 capteurs sous vibrations

libres ont été réalisées par IABG pour DASA/DORNIER sous contrat avec le CNES. Le modèle proposé par EADS représente à la fois le support proprement dit et un cylindre de chargement simulant la présence d'un satellite posé sur le support ; il est constitué de 38 sous-structures comprenant divers matériaux, dont des matériaux sandwichs orthotropes, de l'aluminium et de l'acier. Les premières mesures ayant montré qu'il était indispensable de tenir compte de la déformation du sol sous le support, le sol a été très simplement modélisé par 3 ressorts de torsion, un ressort de translation et une contrainte de mouvement de corps rigide pour tous les noeuds de l'interface entre le support et le sol. Au final, le modèle comprend 27648 ddl et 9728 éléments.



Figure 3. Photo du support Syllda5

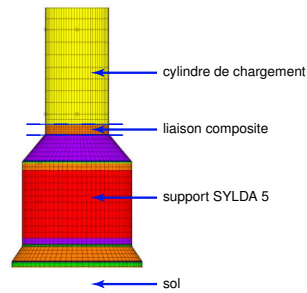


Figure 4. Modèle associé au Syllda5

5.2. Détermination des méconnaissances de base

Au préalable, le modèle a été recalé en utilisant la méthode décrite dans [LAD 99], à l'aide des 12 premiers modes. Il s'agit dès lors de déterminer les méconnaissances restantes. Dans ce but, la structure est divisée en 4 grands groupes de sous-structures, comme précisé sur la figure 4 :

- le groupe g1 est associé au cylindre de chargement ;
- le groupe g2 comprend la liaison composite entre le cylindre et le Syllda5 ;
- le groupe g3 est le support Syllda5 proprement dit ;
- le groupe g4 est associé au modèle de sol.

Groupes	Loi recherchée	$(\overline{m}_E^-, \overline{m}_E^+)$
E=g1	gaussienne	(20%,20%)
E=g2	uniforme	(20%,20%)
E=g3	gaussienne	(20%,20%)
E=g4	uniforme	(50%,50%)

Tableau 4. Méconnaissances initiales

Groupes	Données utilisées
E=g3	mode 4 ( $\omega_{4 exp}^{2 sup}, \omega_{4 exp}^{2 inf}$ )
E=g1	mode 8 ( $\omega_{8 exp}^{2 sup}, \omega_{8 exp}^{2 inf}$ )
E=g4	mode 6 ( $\omega_{6 exp}^{2 sup}, \omega_{6 exp}^{2 inf}$ )
E=g2	mode 3 ( $\omega_{3 exp}^{2 sup}, \omega_{3 exp}^{2 inf}$ )

Tableau 5. Données expérimentales

Le processus de réduction est entrepris en imposant *a priori* les niveaux initiaux de méconnaissances  $(\overline{m}_E^-, \overline{m}_E^+)$  (et lois) décrits dans le tableau 4. L'information

expérimentale est constituée des valeurs extrêmes des fréquences propres et formes propres d'une série de mesures ; on précise dans le tableau 5 dans quel ordre et avec quelles données est réalisée la réduction. Les résultats sont les suivants (avec  $\rho_E = 1$ ) :

$$\begin{array}{cccc} \overline{m}_{g1}^+ = 14,4\% & \overline{m}_{g2}^+ = 0,0\% & \overline{m}_{g3}^+ = 0,0\% & \overline{m}_{g4}^+ = 43,5\% \\ \overline{m}_{g1}^- = 0,0\% & \overline{m}_{g2}^- = 6,0\% & \overline{m}_{g3}^- = 1,5\% & \overline{m}_{g4}^- = 0,0\% \end{array}$$

Ces résultats confirment la qualité du modèle du support (g3) qui a été recalé ainsi que celui de la liaison (quelques %) tandis que la très grande simplicité du modèle introduit pour le sol se traduit par une forte valeur de méconnaissance.

## 6. Conclusion

On a montré dans cet article quelques applications de la théorie des Méconnaissances qui mêle théorie des intervalles et théorie des probabilités. La méthode permet de quantifier les incertitudes au niveau des sous-structures en utilisant des quantités d'intérêt définies sur l'ensemble de la structure. Le procédé de réduction présenté ici permet de déterminer les méconnaissances de base pour chaque sous-structure à partir de valeurs majorantes supposées *a priori* ; pour cela, les données expérimentales sont considérées comme de l'information permettant de réduire les méconnaissances de la structure. Ces études constituent les prémisses de l'élaboration d'une méthode générale de réduction des méconnaissances.

## 7. Bibliographie

- [BEN 99] BEN-HAIM Y., « Design Certification with Information-Gap Uncertainty », *Structural Safety*, vol. 21, 1999, p. 269-289.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., CHOUAKI A., « Application of a Posteriori Error Estimation for Structural Model Updating », *Inverse Problems*, vol. 15, 1999, p. 49-58.
- [LAD 02] LADEVÈZE P., « Sur une Théorie des Méconnaissances en Calcul des Structures », Programme RAF 2001 n° SY/XS 136 127, Avril 2002, EADS Launch Vehicles.
- [LAD 03] LADEVÈZE P., « Théorie des Méconnaissances en Dynamique des Structures : Développement et Premiers Exemples », Programme RAF 2002 n° LY22 139 423, Mai 2003, EADS Launch Vehicles.
- [LAD 04] LADEVÈZE P., PUEL G., ROMEUF T., « On a Strategy of Reduction of the Lack of Knowledge (LOK) in Model Validation », *Proceedings of the Fourth International Conference on Sensitivity Analysis of Modeling Output*, Santa Fe, New Mexico, 2004.
- [MOT 93] MOTTERSHEAD J., FRISWELL M., « Model Updating in Structural Dynamics : A Survey », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, n° 2, 1993, p. 347-375.
- [PUE 03] PUEL G., LADEVÈZE P., DERAEMAERKER A., BARTHE D., « Sur une Théorie des Méconnaissances en Calcul des Structures », *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), 20-23 Mai 2003, p. 399-406.
- [SCH 01] SCHÜLLER G. I., « Computational Stochastic Mechanics - Recent Advances », *Computers and Structures*, vol. 79, 2001, p. 2225-2234.