



Aplicacion del control Hinf al PPCAR

Carolina Albea-Sanchez, Manuel G. Ortega, Francisco Salas, Francisco R. Rubio

► To cite this version:

Carolina Albea-Sanchez, Manuel G. Ortega, Francisco Salas, Francisco R. Rubio. Aplicacion del control Hinf al PPCAR. XXVII Jornadas de Automática, Sep 2006, Almeria, España. pp.Pag. 919-925, 10.1000/ISBN:84-689-9417-0 . hal-00256628v1

HAL Id: hal-00256628

<https://hal.science/hal-00256628v1>

Submitted on 15 Feb 2008 (v1), last revised 21 Aug 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APLICACIÓN DEL CONTROL $\mathcal{H}_\infty$ AL PPCAR

Carolina Albea, Manuel G. Ortega, Francisco Salas, Francisco R. Rubio

Dept. Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla

Camino de los Descubrimientos, s/n. 41092, Sevilla

{calbea, ortega, salas, rubio}@cartuja.us.es

Resumen

En este artículo se presentan controladores $\mathcal{H}_\infty$ lineal para un sistema no lineal subactuado que está sometido a perturbaciones, comparando los resultados obtenidos con otros controladores diseñados en trabajos anteriores.

Palabras clave: Control $\mathcal{H}_\infty$, Sensibilidad Mixta, Realimentación de estados, Péndulo invertido

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se presenta un controlador robusto para un sistema no lineal subactuado que está sometido a perturbaciones, eligiendo la teoría de control $\mathcal{H}_\infty$ por sus buenas características de robustez y comportamiento.

El sistema es un modelo de un vehículo que consta de un péndulo invertido sobre una plataforma móvil con dos ruedas construido en el departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla y bautizado con el nombre de PPCAR.



Figura 1: PPCar

Se han sintetizado controladores $\mathcal{H}_\infty$ lineales siguiendo dos enfoques distintos. En el primero de ellos, se ha utilizado el enfoque de sensibilidad

mixta, ponderando funciones de sensibilidad para imponer cotas superiores a las correspondientes funciones. La otra vía de obtener el control $\mathcal{H}_\infty$ ha sido utilizando realimentación del vector de estados. Para la síntesis del controlador se han usado tanto algoritmos de resolución con vector de estados [1], así como *Linear Matrix Inequalities* (LMI) [4, 5, 2].

Los resultados obtenidos de la simulación de los controladores anteriores aplicados al modelo no lineal del PPCar se han comparado entre sí y con un controlador sintonizado en trabajos anteriores utilizando el método de optimización LQR.

El resto del artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2, se describe el sistema PPCar, obteniéndose el modelo linealizado a partir del cual se van a diseñar los controladores. En la sección 3, se da una breve descripción de las técnicas que serán empleadas en este artículo para la síntesis de controladores robustos y que se aplicarán al sistema PPCar, comprobando su funcionamiento mediante simulación. Se comparan, en el punto 4, los resultados obtenidos entre los controladores sintonizados con $\mathcal{H}_\infty$ y otras técnicas aplicadas anteriormente. Terminando en el punto 5 con las conclusiones.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El PPCar es un sistema que consta de dos subsistemas: un robot móvil con tracción diferencial y un péndulo invertido sobre el vehículo móvil. El esquema del modelo aparece en la Fig. 2. La estrategia de control $\mathcal{H}_\infty$ se aplicará al péndulo invertido sobre un vehículo móvil.

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos se pueden obtener las ecuaciones del modelo del sistema

$$(M + m)\ddot{x} + Ml\ddot{\theta}\cos\theta - Ml\dot{\theta}^2 = F \quad (1)$$

$$\ddot{x}Ml\cos\theta + Ml^2\ddot{\theta} - Mgl\sin\theta = 0 \quad (2)$$

donde

m: masa del carro

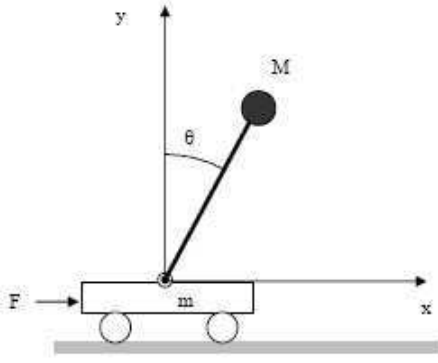


Figura 2: Modelo del PPCar

M: masa del péndulo

l: altura del centro de masa

g: aceleración de la gravedad

La variable de control del sistema es la fuerza F , las variables de estado son: el ángulo θ , la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la velocidad lineal $\dot{x} = v$, y la variable de salida es θ .

El sistema se puede linealizar en torno al punto de equilibrio $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $v = 0$ y $F = 0$ que es localmente inestable, pudiendo hacer las aproximaciones $\cos \theta \approx 1$ y $\sin \theta \approx 0$, de modo que, las ecuaciones en forma matricial queden

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{ml} & 0 & 0 \\ -\frac{Mg}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad (3)$$

3. CONTROL $\mathcal{H}_\infty$ LINEAL

El control robusto está asociado a la necesidad de un controlador que sea válido para todo el conjunto de plantas de una familia. Para ello se suele hacer uso de una estimación de las incertidumbres, de modo que, el rango de funcionamiento de la planta quede acotado.

Por su parte, la idea de la técnica de control $\mathcal{H}_\infty$ es encontrar una ley de control, K , que atenúe la relación entre la energía del vector objetivo, z , y la energía del vector de perturbaciones, w , siendo γ la atenuación conseguida, como se muestra en la Fig. 3

En función de como se diseñe la planta generalizada, $P(s)$, se conseguirán no sólo cotas de comportamiento, sino que además cotas de robustez.

A continuación, se procede a la síntesis de controladores $\mathcal{H}_\infty$ lineales siguiendo dos enfoques distin-

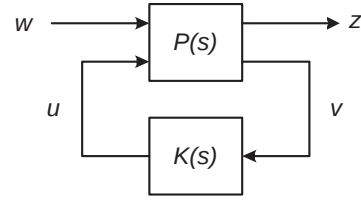


Figura 3: Esquema de la estrategia de control $\mathcal{H}_\infty$.

tos: sensibilidad mixta y realimentación del estado.

3.1. ENFOQUE DEL PROBLEMA DE SENSIBILIDAD MIXTA

El problema de la sensibilidad mixta, en la teoría de control clásica, trata de moldear varias funciones de sensibilidad simultáneamente. En este artículo se moldearán: la función de sensibilidad (S), la función de sensibilidad al control (KS) y la función de sensibilidad complementaria (T) con un mismo controlador. Para moldear dichas funciones se utilizan sus ponderaciones correspondientes a modo de especificaciones del sistema. Estas ponderaciones actuarán como filtros.

Para conseguir esta ponderación, se utilizará la norma infinito, de manera que se obtenga la siguiente desigualdad:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_s S(j\omega) \\ W_{KS} K S(j\omega) \\ W_T T(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (4)$$

Para la elección de las funciones de ponderación es conveniente tener en cuenta ciertas limitaciones, entre las que destacamos las siguientes:

- La habilidad para mantener la salida dentro de unos márgenes determinados depende de las propiedades de la planta. Además, será difícil de controlar si el sistema es inestable o/y si tiene grandes perturbaciones siendo el sistema no lineal.
- Es conveniente realizar un escalado previo del sistema a controlar.
- El desconocimiento relativo del sistema suele aumentar a medida que aumenta la frecuencia y, por consiguiente, no se puede controlar un sistema a frecuencias en las que no se conoce. De alguna manera, tendremos impuesto una cota superior en el ancho de banda de control.

3.1.1. Síntesis de Controladores $\mathcal{H}_\infty$ bajo el enfoque del problema de sensibilidad mixta

Para el caso de sensibilidad mixta $S/KS/T$, la planta generalizada, Fig. 3, tiene la forma particular de la Fig. 4. Como puede observarse, la planta generalizada (y por tanto la síntesis del controlador) depende exclusivamente del sistema nominal elegido y de las funciones de ponderación diseñadas.

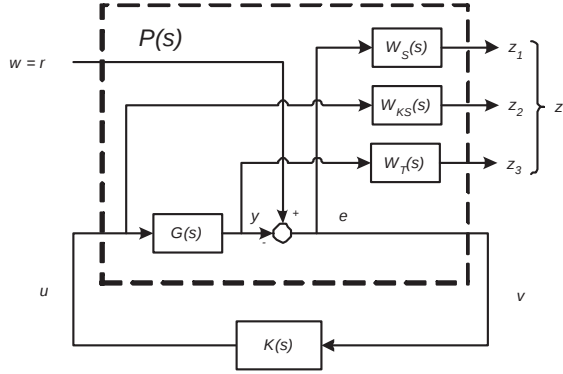


Figura 4: Planta del enfoque de sensibilidad mixta.

El problema de síntesis que se plantea se formula como encontrar un controlador estabilizante, K , tal que se cumpla la siguiente expresión

$$\left\| \begin{array}{c} W_s S(j\omega) \\ W_{KS} K S(j\omega) \\ W_T T(j\omega) \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (5)$$

donde γ es la relación de energía conseguida.

Los pasos propuestos en [3] a seguir para la síntesis de controladores $\mathcal{H}_\infty$ para este tipo de sistema son:

1. Elegir un sistema nominal, preferentemente de bajo orden aunque las incertidumbres sean mayores, y escalarlo.
2. Estimar las incertidumbres multiplicativas a la salida respecto al modelo nominal elegido.
3. Diseñar la matriz de ponderación $W_T(s)$ de modo que sea un filtro paso alto de las incertidumbres multiplicativas anteriores.
4. Diseñar la matriz de ponderación

$$W_S = \left(\frac{\sqrt[N]{\alpha_i} s + 10^{(\kappa_i-1)} \omega_T}{s + \sqrt[N]{\beta_i} 10^{(\kappa_i-1)} \omega_T} \right)^N \quad (6)$$

con

$$\alpha_i \approx 0,5$$

$$\beta_i \approx 10^{-4}$$

ω_T : Frecuencia de corte W_{Tdiag}

N : número de integradores

κ_i : parámetro de ajuste

5. Diseñar la matriz de ponderación $W_{KS}(s)$, tomándola como una constante para ponderar la señal de control.
6. Si no se cumplen las especificaciones aumentar el parámetro de ajuste de $W_S(s)$ y volver a iterar.

3.1.2. Aplicación del control $\mathcal{H}_\infty$ lineal en el PPCar

El problema consiste en rechazo de perturbaciones en el ángulo θ , con resolución del vector de estado.

El controlador será calculado considerando que el sistema está modelado con formulación entrada-salida, siendo su única variable de salida el ángulo θ . De este modo, su función de transferencia queda

$$G(s) = \frac{1}{ml(s^2 - \frac{(M+m)g}{lm})} \quad (7)$$

de la que es fácil deducir que el sistema es inestable en bucle abierto.

Con el controlador obtenido se pretende estabilizar las tres variables de estado.

El valor de las constantes del sistema serán

$$m = 30Kg \quad (8)$$

$$M = 70Kg \quad (9)$$

$$l = 1m \quad (10)$$

$$g = 9,8m/s^2 \quad (11)$$

La incertidumbre utilizada radica en la masa del péndulo ya que los usuarios que lo van a utilizar pueden tener distintos pesos. Las incertidumbres multiplicativas se calcularán con $M_{min} = 40Kg$ y con $M_{max} = 140Kg$.

El sistema se escala teniendo en cuenta que la fuerza máxima que se puede aplicar es 500N y que el ángulo máximo aplicable es 15° sobre la vertical.

Las funciones de ponderación utilizadas

$$W_T = \frac{0,45(0,0015s + 1)}{1,5s + 1} \quad (12)$$

$$W_S = \frac{(0,0015s + 10)}{s + 15} \quad (13)$$

$$W_{KS} = 0,001 \quad (14)$$

Con estas funciones de ponderación se obtiene un controlador donde las funciones multiplicativas de las incertidumbres estén por debajo de la cota superior marcada por las función de ponderación

correspondiente. Y utilizando una $\kappa = 1$ las funciones de sensibilidad y sus ponderaciones tienen una atenuación de $\gamma = 0,5972$. El controlador utilizado tiene la forma

$$K = \frac{1,531 \cdot 10^{11} s^3 + 1,021 \cdot 10^{17} s^2 + 1,157 \cdot 10^{18} + 3,278 \cdot 10^{18}}{s^4 + 6,904 \cdot 10^5 s^3 + 1,587 \cdot 10^{10} s^2 + 1,14 \cdot 10^{13} s + 1,14 \cdot 10^{12}} \quad (15)$$

3.1.3. Resultados y Simulaciones

La evolución de las variables de estado obtenidas se representan en la Fig. 5, Fig. 6 y Fig. 7. En ellas, se observa que la acción de control presenta un buen funcionamiento para las variables de estado θ y $\dot{\theta}$, pero no se controla la velocidad lineal de equilibrio. Esto se debe a que la única variable de estado controlada es θ y cuando ésta alcanza el punto de equilibrio, $\theta = 0$, se tiene $\ddot{x} = 0$, por tanto $v = cte$.

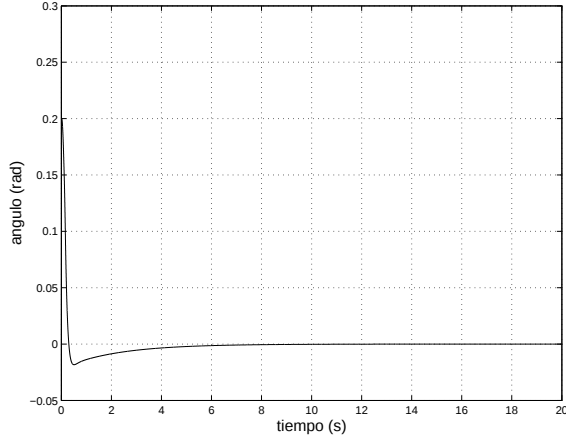


Figura 5: Ángulo θ del péndulo con la vertical utilizando enfoque de sensibilidad mixta.

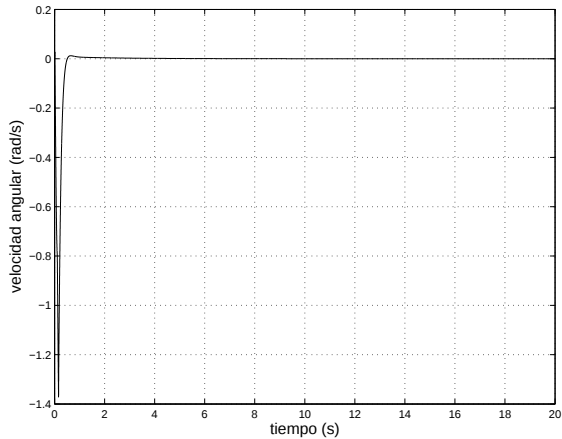


Figura 6: Velocidad angular $\dot{\theta}$ utilizando enfoque de sensibilidad mixta.

Esta estrategia de control es interesante si se desea que el PPCar permanezca con una velocidad

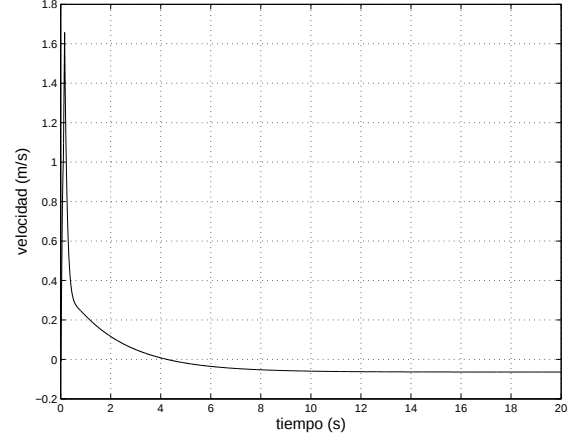


Figura 7: Velocidad lineal v utilizando enfoque de sensibilidad mixta.

constante y en posición vertical tras realizar la perturbación.

3.2. CONTROL $\mathcal{H}_\infty$ CON REALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADOS

La norma $\mathcal{H}_\infty$ representa, como hemos dicho, la atenuación existente entre la energía del vector objetivo y la energía del vector de perturbaciones de un sistema. De esta forma, el control $\mathcal{H}_\infty$ puede ser visto como un problema de optimización que busca una ley de control que minimice la atenuación ofrecida a una señal de perturbación cualquiera, de un sistema en bucle cerrado.

En este apartado, a diferencia del anterior, se va a hacer uso de las medidas de las variables de estado, suponiendo que estas son accesibles. Además, para poder sintetizar una ley de control, se va a utilizar una formulación del problema de síntesis en forma de LMIs.

Para ello, se tendrá en cuenta que un sistema con incertidumbre paramétrica (como es el caso que nos ocupa) se puede representar mediante el siguiente sistema matricial:

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) + B_u(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t) \quad (16)$$

$$z(t) = C_z(\alpha)x(t) + D_{uz}(\alpha)u(t) + D_{wz}(\alpha)w(t) \quad (17)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (18)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{R}^q$ un vector de parámetros de incertidumbre, o lo que es lo mismo, un polítopo de vértices conocidos. Las matrices $A(\alpha)$, $B_u(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C_z(\alpha)$, $D_{uz}(\alpha)$, $D_{wz}(\alpha)$ son matrices afines de α .

Para transformar el sistema (16)–(18) en LMI, se busca una función de Liapunov, V . Con esta función de Liapunov el sistema tendrá que cumplir la restricción

$$\dot{V} + z'z - \gamma^2 w'w < 0 \quad (19)$$

Tras una serie de transformaciones, aplicadas sobre cada uno de los extremos del politopo, se puede hallar un controlador por realimentación del estado que cumplan con las restricciones de atenuación de energía. Estos algoritmos se pueden encontrar programados en herramientas informáticas, como por ejemplo [2].

3.2.1. Aplicación del control $\mathcal{H}_\infty$ por realimentación del estado al PPCar

La aplicación de esta técnica de control al PPCar se ha planteado como un problema de rechazo de perturbaciones con realimentación de las variables de estado, y con una incertidumbre en el parámetro de la masa del péndulo (M). Se toman dos variaciones de M , correspondiente a los valores máximo y mínimo posibles, obteniendo los dos vértices en el politopo. La perturbación existente sólo afecta a la variable de estado correspondiente al ángulo θ . El problema en formulación LMI en bucle cerrado queda de la siguiente manera.

$$\dot{x}(t) = (A + B_u K)x(t) + B_w w(t) \quad (20)$$

$$z(t) = (C_z + D_{uz} K)x(t) + D_{wz} w(t) \quad (21)$$

Al ser un problema de regulación, el vector x corresponde con el vector de variables de estado, y por tanto, las matrices $A(\alpha)$ son de dimensiones 3×3 y las matrices $B(\alpha)$ son de dimensiones 1×3 .

Los valores del parámetro M en los vértices del politopo son: $M = 40Kg$ para el primer vértice y $M = 140Kg$ par el segundo vértice. Con estos valores se calculan las matrices $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$ correspondientes. Asimismo, las matrices para calcular el controlador $\mathcal{H}_\infty$ por realimentación de estados son

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$D_{uz} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$D_{wz} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Tras las iteraciones correspondientes nos queda $\gamma = 41,234$ y las matrices

$$Q = \begin{bmatrix} 0,017 & -0,1241 & 0,0945 \\ -0,1241 & 0,9845 & -0,9703 \\ 0,0945 & -0,9703 & 2,0451 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 17,2439 & -5,0402 & -15,7166 \end{bmatrix} \quad (27)$$

El controlador obtenido es

$$K = \begin{bmatrix} 22907 & 3440 & 566 \end{bmatrix} \quad (28)$$

3.2.2. Resultados y simulaciones

Los resultados de las simulaciones con el controlador (28) en el modelo del sistema real aparecen en la Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10. En ellas se puede apreciar, cómo las tres variables de salida se estabilizan en el punto de equilibrio. Además, se puede notar que las evoluciones de las variables de salida θ y $\dot{\theta}$ son rápidas y suaves.

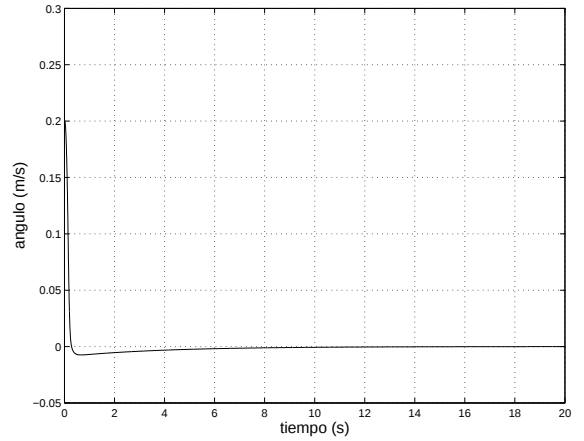


Figura 8: Ángulo θ del péndulo con la vertical utilizando realimentación de estado.

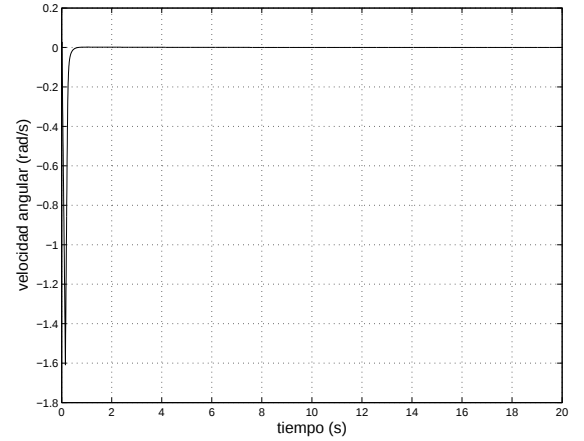


Figura 9: Velocidad angular $\dot{\theta}$ utilizando realimentación de estado.

4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se compararán con otros estudios previos [6], los resultados obtenidos con la estrategia de control $\mathcal{H}_\infty$ lineal y las dos técnicas empleadas para llegar a ella:

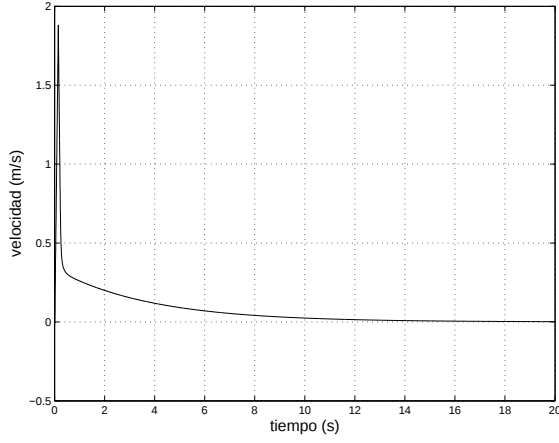


Figura 10: Velocidad lineal v utilizando realimentación de estado.

1. Ponderación de las funciones de sensibilidad para tomarlas como cotas superiores de las correspondientes funciones de sensibilidad
2. LMI

La estrategia de control lineal desarrollada anteriormente fue el método de optimización LQR. La evolución de cada variable de salida se puede observar en las figuras: Fig. 11, Fig. 12 y Fig. 13

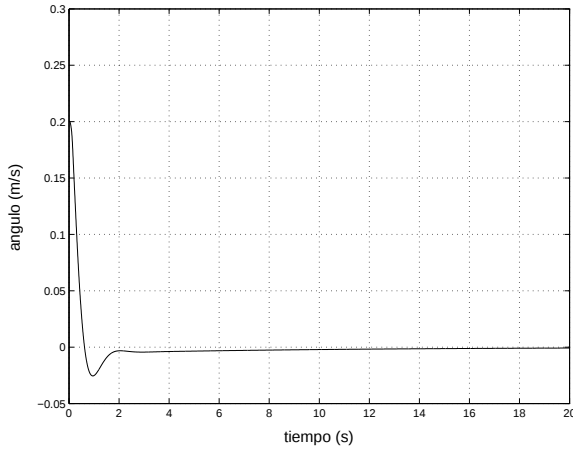


Figura 11: Ángulo θ del péndulo con la vertical utilizando LQR.

En la Fig. 14 se observa que utilizando el control LQR se tiene una sobreoscilación de un 28,24 % más que utilizando control $\mathcal{H}_\infty$ con el enfoque de sensibilidad mixta, siendo el tiempo de establecimiento el mismo en ambas estrategias. No obstante, en la Fig. 7 se nota que con el control $\mathcal{H}_\infty$ anterior la variable de salida velocidad no se estabiliza en el punto de equilibrio. En la Fig. 15 se puede apreciar que utilizando el control LQR se tiene una sobreoscilación de un 71 % y un tiempo de establecimiento de un 16,21 % más que utilizando control $\mathcal{H}_\infty$ con LMI. Una observación más, la

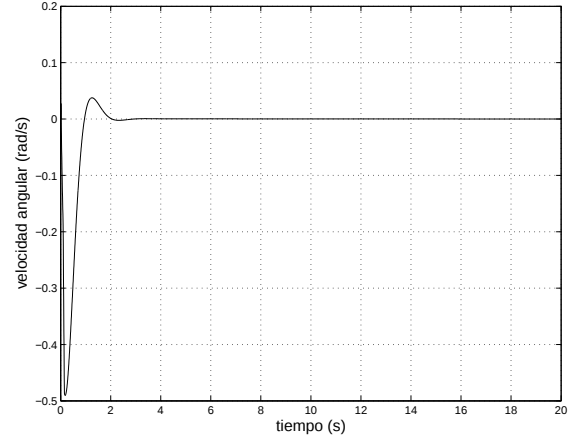


Figura 12: Velocidad angular $\dot{\theta}$ utilizando LQR

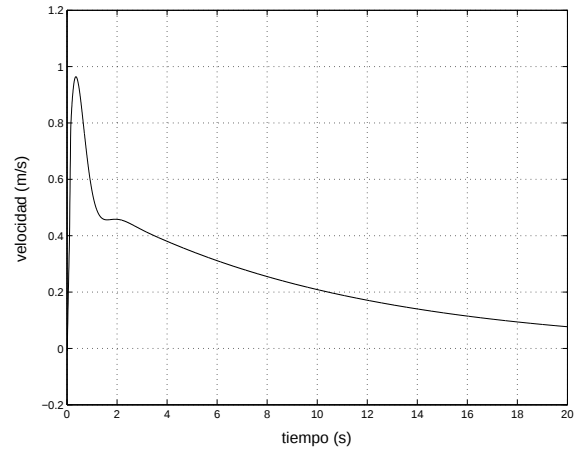


Figura 13: Velocidad lineal v utilizando LQR

podemos hacer en la Fig. 16, donde se nota de forma cualitativa que la variable de salida v tiene un tiempo de establecimiento menor y una sobreoscilación mayor utilizando control $\mathcal{H}_\infty$ con LMI que con el control LQR.

- Con el controlador $\mathcal{H}_\infty$ se tiene menos sobreoscilación y menor o igual tiempo de establecimiento en la variable de salida θ y por consiguiente en la variable $\dot{\theta}$, que con el control LQR. Haciendo que el sistema responda de modo más suave y más rápido.
- Con el control $\mathcal{H}_\infty$ utilizando LMI la variable de salida v tarda menos en estabilizarse que con la optimización LQR, aunque tiene más sobreoscilación.
- Con $\mathcal{H}_\infty$ y utilizando las ponderaciones de las funciones de sensibilidad, ya se vio que la velocidad lineal se establecía en un punto distinto al equilibrio.

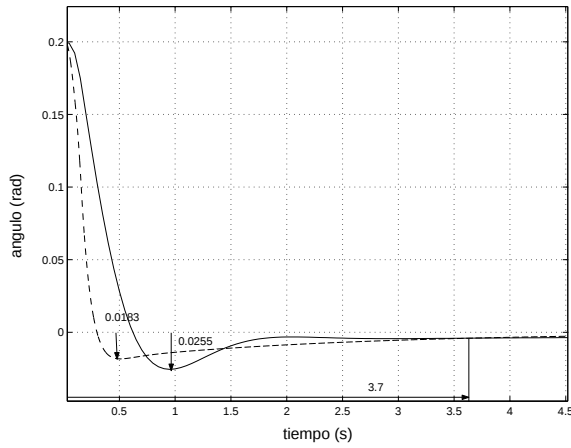


Figura 14: Característica de la variable θ con control LQR (continua), característica de la variable θ con control $\mathcal{H}_\infty$ con enfoque de sensibilidad mixta (discontinua)

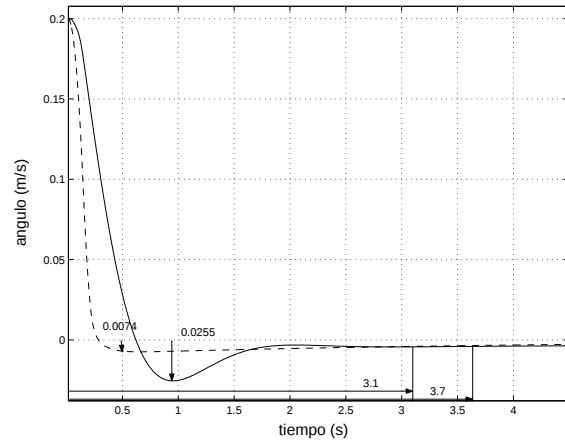


Figura 15: Característica de la variable θ con control LQR (continua), característica de la variable θ con control $\mathcal{H}_\infty$ con LMI (discontinua)

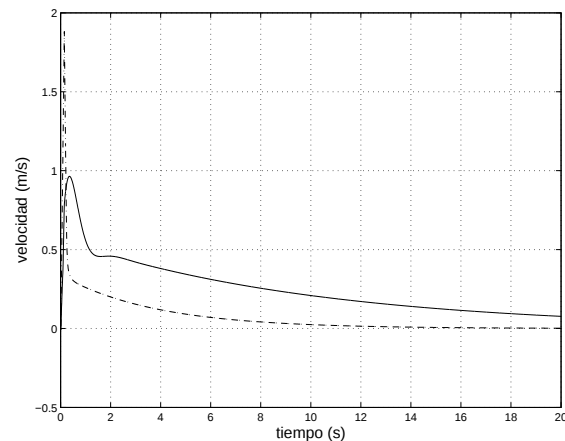


Figura 16: Variable de salida v con control LQR (continua), variable de salida v con control $\mathcal{H}_\infty$ con LMI (discontinua)

5. CONCLUSIONES

En esta memoria se han desarrollado controladores $\mathcal{H}_\infty$ lineales utilizando diferentes enfoques: sensibilidad mixta y realimentación del estado. Estos controladores fueron simulados en el modelo no lineal del sistema y comparados con otros controladores obtenidos en estudios previos a partir de la estrategia LQR.

Los resultados de esta comparación pueden concluir que las respuestas de las variables utilizando los controladores $\mathcal{H}_\infty$ lineales son más suaves y tienen una mayor velocidad de establecimiento, que con la estrategia de optimización LQR desarrollada en estudios previos.

Referencias

- [1] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith. *μ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The MathWorks, The MathWorks, INC. 3 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098, online only for version 3.06 edition, June 2001.
- [2] The MathWorks, The MathWorks, INC. 3 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098. *LMI Control Toolbox: Control Applications*.
- [3] M. G. Ortega, M. Vargas, F. Castaño, and F. R. Rubio. Improved design of the weighting matrices for the s/ks/t mixed sensitivity problem-application to a multivariable thermodynamic system. In *IEEE Transactions on control systems technology*, volume 14, pages 82–90, January 2006.
- [4] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. Technical report, Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology and Department of Electrical Engineering, The Netherlands, October 2000.
- [5] A. Trofino, D. Coutinho, and K. A. Barbosa. Sistemas multivariáveis: Uma abordagem via lmis. Technical report, Universidad Federal de Santa Catarina, Florianópolis, August 2003.
- [6] A. Viguria, R. Cano, M. Fiacchini, A. Prieto, B. J. Vela, F. R. Rubio, J. Aracil, and C. C. de Wit. Ppcar (personal pendulum car): Vehículo basado en péndulo invertido. In *XXVI Jornadas de Automática*, pages 445–451, 2005.