



HAL
open science

Динамика бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов)

Vladimir Gryanik, Mikhail Sokolovskiy, Jacques Verron

► **To cite this version:**

Vladimir Gryanik, Mikhail Sokolovskiy, Jacques Verron. Динамика бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов). Institute of Computer Science, Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolovskiy Moscow-Izhevsk, pp.547-622, 2003. <hal-00230214>

HAL Id: hal-00230214

<https://hal.science/hal-00230214v1>

Submitted on 8 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Динамика бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов)

В. М. Гряник,¹ М. А. Соколовский,² Ж. Веррон³

Приводится обзор работ, посвященных изучению свойств вихревых движений в устойчиво стратифицированной быстро вращающейся жидкости и описываемых уравнением эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Основное внимание уделено вихрям с нулевой суммарной циркуляцией — так называемым хетонам. Рассматриваются задачи самодвижения дискретных хетонов, устойчивости единичного распределенного хетона, взаимодействия двух хетонов конечных размеров. Приводятся также новые решения задач о трех и более дискретных вихрях хетонной структуры. Даются примеры возникновения хаотических режимов. Обсуждаются область применимости хетонной теории и перспективы ее возможных приложений, в частности, — для анализа динамической стадии развития глубокой конвекции в океане.

1. Введение

Теория вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости [5, 29, 35, 38, 40, 52], восходящая к классическим работам Гельмгольца, Гребли,

¹Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва, Россия, Институт полярных и морских исследований им. Альфреда Вегенера, Бремерхаузен, Германия, E-mail: vgyanik@awi-bremerhaven.de;

²Институт водных проблем РАН, Москва, Россия, E-mail: sokol@aqua.laser.ru;

³Лаборатория геофизических и промышленных потоков Национального научного центра Франции, Гренобль, Франция, E-mail: jacques.verron@inpg.fr

Кирхгофа, Рэнкина, Гринхила, Тейлора, Пуанкаре, (см. [4, 45, 60]), в значительной мере возникла из потребности объяснить свойства атмосферных циклонов и антициклонов. Действительно, простейшие двумерные гидродинамические модели дискретных вихрей дают некоторое представление о характере взаимодействий между элементарными вихрями и о структуре индуцируемого ими поля скоростей. Однако многие эффекты, присущие движениям (в частности, — вихревым) в атмосфере или океане, невозможно объяснить без учета факторов вращения среды как целого и неоднородности (стратификации) поля плотности, сформированной под действием силы тяжести. Решение ряда актуальных гидродинамических проблем планетарного характера стало возможным с развитием посвященной изучению этого класса задач *Геофизической гидродинамики (ГГ)* [27, 41, 44, 140] — области гидромеханики, сложившейся за последние три десятилетия в качестве ее самостоятельного раздела, выявлению областей параметров течений, доминируемых вихревыми движениями [3, 5, 76, 81, 112], и обобщению методов гамильтоновой динамики на описание геофизических процессов [6, 10, 140, 4]. Так, в частности, в рамках квазигеострофического приближения, обоснованного для быстровращающихся устойчиво стратифицированных жидкостей [27, 44], Гряником с соавторами последовательно были построены теории дискретных вихрей применительно к двухслойной жидкости [7], слоистой среде с произвольным количеством однородных по плотности слоев [14, 15, 16], а также для случая непрерывно стратифицированной жидкости [8, 9]. Козловым и др. [34] развит метод контурной динамики (МКД) для описания вихрей конечного размера в двухслойной жидкости, в [48] дано его обобщение на случай трех слоев, а в [30, 33] для непрерывной стратификации. Эти работы послужили основой для последующих исследований, результаты которых частично отражены в данной работе.

Статья главным образом (п.п. 3-6) посвящена анализу динамики как дискретных, так и распределенных бароклиных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью — *хетонов*. Бароклиные вихри, в отличие от классических (баротропных) вихрей в идеальной жидкости, обладают запасом не только кинетической, но и доступной потенциальной (тепловой) энергии. Как показано в [7], бароклиная природа вихрей кардинально изменяет как структуру индуцируемых ими полей скорости, так и характер вихревого взаимодействия. При условии равенства нулю суммарной интенсивности вихревые структуры обладают важным свойством *самодвижения* (образуется двухслойная вихревая пара, движущаяся как целое без изменения формы и интенсивности [7]). В частности, каждый из двух точечных вихрей, сосредоточенных в разных слоях двухслойной жидкости и имеющих равновели-

кие интенсивности противоположных знаков, индуцирует прямолинейное и равномерное движение своего партнера.

Понятие *хетон* было введено Хоггом и Стоммелом [85], чтобы подчеркнуть способность бароклиной вихревой пары переносить тепло. «*Хетон (heton)*» — производное от «*heat*», т. е. теплота, тепло. Действительно, при выполнении традиционных в ГГ геострофического и гидростатического приближений [27, 44] любой вихрь верхнего (нижнего) слоя, имеющий отрицательную (положительную) интенсивность, индуцирует локальное искривление поверхности раздела между слоями в виде впадины. Смена знаков завихренности вихрей на противоположные влечет смену знака кривизны поверхности раздела. Поскольку в условиях устойчивой стратификации нижний слой должен быть более плотным и (в предположении об изопикничности) — более холодным, то интегральное количество тепла в области, содержащей вихри указанного вида, очевидно, будет аномальным по отношению к последнему в любой другой равновеликой области. Поэтому ясно, что именно движение хетонов, представляющих собой комбинации вихрей противоположных вращений, в большей степени, чем перемещение каких-либо других вихревых структур, приводит к перераспределению тепла (тепла и солей — в океане). Понятие «хетон» используется и для вихрей с конечными горизонтальными размерами (вихревых пятен — областей с постоянными значениями потенциальной завихренности Π_1 и Π_2 в верхнем и нижнем слоях соответственно). Если центры вихревых пятен разных слоев совпадают, говорят, что хетон имеет вертикальную ось, если разнесены на некоторое расстояние — наклонную ось (рис. 1).

Хетоны генерируются в лабораторных экспериментах источниками и стоками массы [99, 100], механическим локальным закручиванием жидкости верхнего слоя [95, 150], а также тепловыми источниками [106]. Такие вихри естественно возникают при развитии неустойчивости бароклиных течений, связанных с феноменом глубокой конвекции в океане [70, 71, 72, 74, 82, 83, 86, 87, 88, 89, 101, 102, 118, 119, 120, 122, 126, 128, 134, 147, 155]. Хетонная идеализация применяется также при анализе динамики тропических циклонов и ураганов в атмосфере [53, 92], поверхностных температурных аномалий [79, 80] и средиземноморских внутритермомоклинных линз (*meddy*) [111] в океане.

В п.п. 3-4 основное внимание уделено исследованию хетонов в двухслойной среде (с постоянными значениями плотности в слоях равной толщины), поскольку известно [27, 44], что двухслойная модель сохраняет основные черты крупномасштабной (мезомасштабной)⁴ динамики атмосферы и океана. В п. 5 даны обобщения модели для случаев многослойной (преимущественно — трехслойной) и непрерывно стратифицированной сред. В п. 6 анализируются специфика и универсальность хетонной теории, ее область применимости, обсуждаются некоторые результаты ее использования к описанию динамической стадии развития глубокой конвекции в океане

⁴Согласно метеорологической и океанологической терминологии.

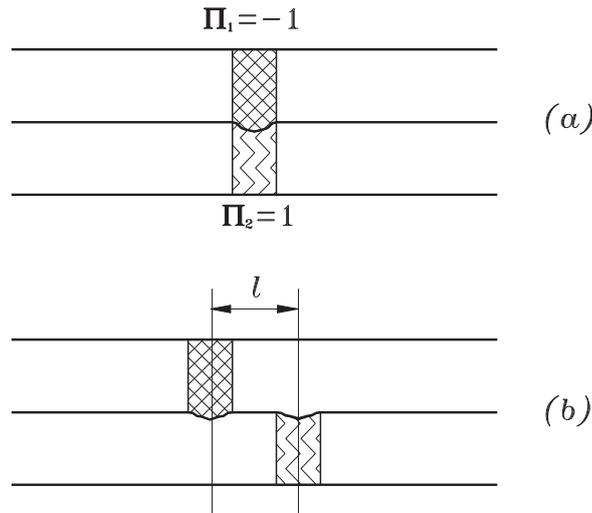


Рис. 1. Схематическое представление распределенного хетона с вертикальной осью — (a) и с наклонной осью — (b).

и вклад в решение проблемы параметризации вихревого переноса тепла в атмосферных и океанологических мезомасштабных процессах.

2. Основные уравнения модели

Будем рассматривать квазиплоские движения вращающейся с угловой скоростью Ω двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с постоянными значениями плотностей ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \leq \rho_2$) и невозмущенных глубин h_1 и h_2 для верхнего и нижнего слоев соответственно. Для адиабатических движений в отсутствие внешних сил и в условиях приближений квазистатики и Буссинеска широко применяется асимптотическая теория [27, 44, 6], в основе которой лежит закон сохранения квазигеострофического потенциального вихря Π_j :

$$\frac{D_j \Pi_j}{Dt} = 0, \quad (2.1)$$

причем

$$\Pi_j = \nabla^2 p_j + F_j (p_{3-j} - p_j), \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Здесь $D_j(\cdot)/Dt \equiv \dot{(\cdot)} + u_j (\partial(\cdot)/\partial x) + v_j (\partial(\cdot)/\partial y)$ и $\nabla^2(\cdot) \equiv \partial^2(\cdot)/\partial x^2 + \partial^2(\cdot)/\partial y^2$ — двумерные операторы полной производной по времени и Лапласа; точкой сверху обозначена частная производная по времени; u_j, v_j — компоненты вектора скорости жидких частиц j -го слоя вдоль осей ортогональной системы координат x и y соответственно; $F_j = 4\rho_* \Omega^2 D^2 / g h_j (h_1 + h_2) \Delta\rho$, ρ_* — среднее значение плотности, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, D — харак-

терный линейный масштаб, g — ускорение свободного падения, p_1 и p_2 — аномалии (относительно равновесного гидростатического состояния) гидродинамического давления в слоях, связанные с компонентами скорости геострофическими соотношениями

$$u_j = -\frac{\partial p_j}{\partial y}, \quad v_j = \frac{\partial p_j}{\partial x}. \quad (2.3)$$

В (2.3) и всюду далее, без специального упоминания, подразумевается что индекс j принимает значения 1 и 2. Из (2.3) следует, что, вводя $J(z, w) \equiv (\partial z/\partial x)(\partial w/\partial y) - (\partial z/\partial y)(\partial w/\partial x)$ — обозначение для якобиана (скобок Пуассона), уравнения (2.1) можно записать в виде

$$\dot{\Pi}_j + J(p_j, \Pi_j) = 0. \quad (2.4)$$

Структура уравнений (2.4) позволяет заметить аналогию с уравнением вихря в классической двумерной гидродинамике; при этом потенциальный вихрь соответствует завихренности⁵. Уравнения (2.1)–(2.4) приведены в безразмерном виде. Связь с размерными величинами осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} (x', y') &= D(x, y); & (u', v') &= D(u, v); & t' &= (D/U)t; \\ \Pi'_j &= (U/D)\Pi_j; & p'_1 &= 2\Omega\rho_*UD\tilde{p}_1 - \rho_1gz; \\ p'_2 &= 2\Omega\rho_*UD\tilde{p}_2 - \rho_1gh_1 - \rho_2g(z - h_1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где \tilde{p}_j означает полное (безразмерное) давление в j -ом слое, штрихи сверху относятся к размерным величинам, прописные буквы, как и выше, представляют собой масштабы соответствующих переменных, а переменная z отсчитывается от невозмущенной поверхности верхнего слоя в направлении центра гравитации. Уравнения (2.1)–(2.3) получены в предположениях, что $U/(2\Omega D) = \varepsilon \ll 1$ и $(p'_2 - p'_1)/[g\Delta\rho(h_1 + h_2)] = \varepsilon$.

Предположим, что потенциальная завихренность, являясь неизвестной функцией, отлична от нуля только в некоторой многосвязной двухслойной области $S = S_1 \cup S_2$ (индексы внизу относятся к номеру слоя). Тогда, обращая операторы в редуцированных (после разделения переменных) правых

⁵Аналогия здесь и далее понимается в смысле формального совпадения уравнений эволюции для завихренности и потенциальной завихренности. Физическое содержание задач при этом различно, что отражается, в частности, в различии уравнений, связывающих функцию тока и давление в классической двумерной гидродинамике и в квазигеострофической ГТ.

частях уравнений (2.2), получим формальные интегральные соотношения для давлений в слоях

$$p_j(x, y) = \iint_{S_j} [h_j G(r) + h_{3-j} G_0(r)] \Pi_j(x', y', t) dx' dy' + \iint_{S_{3-j}} h_{3-j} [G(r) - G_0(r)] \Pi_{3-j}(x', y', t) dx' dy' \quad (2.6)$$

где $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$, $G(r) = (1/2\pi) \ln \gamma_* r$, $\gamma_* = 1/L_{reg}$ (L_{reg} – регуляризирующий масштаб длины)⁶, $G_0(r) = -(1/2\pi) K_0(\gamma r)$, $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя n -го порядка и

$$\gamma = \sqrt{F_j/h_{3-j}} = D/\lambda, \quad (2.7)$$

где $\lambda = [4g \Delta\rho h_1 h_2 / \rho_* \Omega^2 (h_1 + h_2)]^{1/2}$ – масштаб Россби [44].

Легко видеть, что имеют место интегральные инварианты (суммарный потенциальный вихрь, компоненты импульса и момент импульса):

$$Q = \sum_{j=1}^2 h_j \iint_{S_j} \Pi_j dx' dy', \quad P_x = \sum_{j=1}^2 h_j \iint_{S_j} x' \Pi_j dx' dy', \quad (2.8)$$

$$P_y = \sum_{j=1}^2 h_j \iint_{S_j} y' \Pi_j dx' dy', \quad M = \sum_{j=1}^2 h_j \iint_{S_j} [(x')^2 + (y')^2] \Pi_j dx' dy'.$$

Выражения (2.6) упрощаются в предположении, что функции Π_j имеют кусочно-постоянный характер. Действительно, пусть $\Pi_j = \Pi_j^1 \cup \Pi_j^2 \cup \dots \cup \Pi_j^{N_j}$, где все Π_j^α – константы на конечных носителях S_j^α : $S_j = S_j^1 \cup S_j^2 \cup \dots \cup S_j^{N_j}$, $j = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, \dots, N_j$ – количество вихрей в j -ом слое (всюду далее греческая символика будет задавать нумерацию вихрей внутри каждого слоя). Тогда вместо (2.6) будем иметь

$$p_j(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{N_j} \Pi_j^\alpha \iint_{S_j^\alpha} [h_j G(r) + h_{3-j} G_0(r)] dx' dy' + \sum_{\alpha=1}^{N_{3-j}} h_{3-j} \Pi_{3-j}^\alpha \iint_{S_{3-j}^\alpha} [G(r) - G_0(r)] dx' dy'. \quad (2.9)$$

⁶Например, в задачах динамики вихрей на сфере L_{reg} пропорционален ее радиусу [2, 3]; в задачах, учитывающих эффекты двумерной сжимаемости среды или свободной поверхности, – масштабу Обухова-Россби [7].

Аналогичным образом упрощаются и выражения (2.8). Уравнения (2.9) показывают, что если константы Π_j^α известны, то аномалии давления (а, согласно (2.3), — и скорости в слоях) полностью определяются только конфигурациями эволюционирующих областей $S_j^\alpha(x, y, t)$. Этот факт лежит в основе метода контурной динамики [157], развитого для случая двухслойной жидкости в [34]. Действительно, с помощью теоремы Стокса в (2.9) можно перейти от поверхностных интегралов к контурным:

$$p_j(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{N_j} h_j \Pi_j^\alpha \oint_{C_j^\alpha} w \left[W(r) + \frac{h_{3-j}}{h_j} W_0(r) \right] d\nu + \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_{3-j}} h_{3-j} \Pi_{3-j}^\alpha \oint_{C_{3-j}^\alpha} w \left[W(r) - W_0(r) \right] d\nu. \quad (2.10)$$

Здесь C_j^α — контуры областей S_j^α , а также введены обозначения:

$$w = \frac{(x' - x)(\partial y' / \partial \nu) - (y' - y)(\partial x' / \partial \nu)}{r^2}, \\ W = \frac{r^2}{4\pi} \left(\ln \gamma_* r - \frac{1}{2} \right), \\ W_0 = \frac{1}{2\pi\gamma^2} \left[\gamma r K_1(\gamma r) - 1 \right];$$

ν — линейный параметр, отсчитываемый против часовой стрелки вдоль каждого из контуров C_j^α .

С помощью (2.3) и (2.10) можно через контурные интегралы записать также выражения для компонент скорости жидких частиц. Не останавливаясь на деталях алгоритма, отметим, что в рамках МКД задача сводится к численному решению уравнений движения маркерных частиц, принадлежащих контурам C_j^α областей S_j^α .

Случай дискретных вихрей с интенсивностями κ_j^α будем иметь в пределе

$$\lim_{\substack{S_j^\alpha \rightarrow 0 \\ \Pi_j^\alpha \rightarrow \infty}} \Pi_j^\alpha S_j^\alpha = \kappa_j^\alpha,$$

где S_j^α — невозмущенная круговая область. Тогда

$$\Pi_j^\alpha = \kappa_j^\alpha \delta(x - x_j^\alpha) \delta(y - y_j^\alpha), \quad (2.11)$$

и (2.9) преобразуется в

$$p_j(x, y) = \frac{h_j}{2\pi} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{N_j} \kappa_j^\alpha \left[\ln \gamma_* r - \frac{h_{3-j}}{h_j} K_0(\gamma r) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^{N_j} \frac{h_{3-j}}{h_j} \kappa_{3-j}^\alpha \left[\ln \gamma_* r + K_0(\gamma r) \right] \right\}, \quad (2.12)$$

где $r = \left[(x - x_j^\alpha)^2 + (y - y_j^\alpha)^2 \right]^{1/2}$ для каждого κ_j^α ($\alpha = 1, 2, \dots, N_j; j = 1, 2$), причем, поскольку теперь мы имеем единственный линейный масштаб (Россби), то в выражении (2.7) следует принять $D = 1$. Из (2.3) и (2.12) можно получить уравнения движения вихрей:

$$\dot{x}_j^\alpha = -\frac{h_j}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{N_j} \kappa_j^\alpha \frac{y_j^\alpha - y_j^\beta}{r_{jj}^{\alpha\beta}} \left[1 + \frac{h_{3-j}}{h_j} \gamma r_{jj}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \right. \\ \left. \sum_{\beta=1}^{N_{3-j}} \kappa_{3-j}^\alpha \frac{h_{3-j}}{h_j} \frac{y_j^\alpha - y_{3-j}^\beta}{r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}, \quad (2.13)$$

$$\dot{y}_j^\alpha = \frac{h_j}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{N_j} \kappa_j^\alpha \frac{x_j^\alpha - x_j^\beta}{r_{jj}^{\alpha\beta}} \left[1 + \frac{h_{3-j}}{h_j} \gamma r_{jj}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \right. \\ \left. \sum_{\beta=1}^{N_{3-j}} \kappa_{3-j}^\alpha \frac{h_{3-j}}{h_j} \frac{x_j^\alpha - x_{3-j}^\beta}{r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Здесь $r_{ij}^{\alpha\beta} = \left[(x_i^\alpha - x_j^\beta)^2 + (y_i^\alpha - y_j^\beta)^2 \right]^{1/2}$.

Выражения для интегральных инвариантов (2.8) приобретают вид

$$Q = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{N_j} \kappa_j^\alpha, \quad P_x = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{N_j} x_j^\alpha \kappa_j^\alpha, \quad (2.15) \\ P_y = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{N_j} y_j^\alpha \kappa_j^\alpha, \quad M = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{N_j} \left[(x_j^\alpha)^2 + (y_j^\alpha)^2 \right] \kappa_j^\alpha.$$

Система (2.13)–(2.14) может быть записана в гамильтоновой форме

$$\dot{q}_j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j^\alpha} \equiv J(q_j^\alpha, \mathcal{H}), \quad \dot{p}_j^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^\alpha} \equiv J(p_j^\alpha, \mathcal{H}), \quad (2.16)$$

где $q_j^\alpha = x_j^\alpha$ — обобщенные координаты, $p_j^\alpha = y_j^\alpha \kappa_j^\alpha / 2$ — обобщенные импульсы и

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 h_j \left\{ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{N_j} \kappa_j^\alpha \kappa_j^\beta \left[\ln \gamma_* r_{jj}^{\alpha\beta} - \frac{h_{3-j}}{h_j} K_0(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \right. \\ & \left. \sum_{\alpha, \beta=1}^{N_j, N_{3-j}} \frac{h_{3-j}}{h_j} \kappa_j^\alpha \kappa_{3-j}^\beta \left[\ln \gamma_* r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} + K_0(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\} \quad (2.17) \end{aligned}$$

гамильтониан, совпадающий с энергией взаимодействия вихрей.

Ниже (п.п. 3, 4) рассматриваются задачи как о дискретных, так и о распределенных двухслойных вихрях при равных толщинах слоев $h_1 = h_2 = 1/2$, а эффекты, обусловленные неэквивалентностью слоев, обсуждаются в п. 5.

3. Динамика дискретных хетонов

Обозначим через N общее число вихрей (т. е. $N = N_1 + N_2$). Легко проверить, что инварианты M , \mathcal{H} и комбинация $(P_x^2 + P_y^2)$ попарно инволютивны, и следовательно, в случае трех вихрей в двухслойной жидкости, как и в однородной среде [4, 29, 54, 56, 57, 59, 66, 67, 68, 69], задача всегда имеет регулярное решение. В баротропной жидкости при $N = 4$ в общем случае [26, 29, 40, 42, 43] задача неинтегрируема. В [4, 61, 90] показано, что при

$$Q = P_x = P_y = 0 \quad (3.1)$$

возможна редукция к задаче о трех вихрях, и, таким образом, при условиях (3.1) задача о четырех вихрях всегда интегрируема. Этот результат не зависит от конкретного вида гамильтониана и, следовательно, верен также для двухслойного случая. В отличие от случая однородной жидкости, для которого известно большое количество частных случаев интегрируемости вихревой задачи при $N > 3$ [4, 29, 40, 130], для слоистой среды соответствующих результатов чрезвычайно мало [102, 109, 110, 144, 145].

Некоторые результаты по исследованию движений четырех вихрей в двухслойной жидкости изложены ниже в разделе 3.3.

Рассмотрим некоторые задачи о движении двухслойных вихрей хетонного типа (т. е. при $Q = 0$).

3.1. Случай двух вихрей: $N = 2$

Движения данного класса изучались в [7, 109, 144, 145, 156]. Возможны варианты а) $N_1 = 2, N_2 = 0$ либо $N_1 = 0, N_2 = 2^7$ и б) $N_1 = N_2 = 1$. Уравнения (2.13)–(2.14) дают соответственно:

а)

$$\begin{aligned}
 u_1^1 &= -\frac{\kappa_1^2}{4\pi} \frac{y_1^1 - y_1^2}{(r_{11}^{12})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{12} K_1(\gamma r_{11}^{12}) \right], \\
 u_1^2 &= -\frac{\kappa_1^1}{4\pi} \frac{y_1^2 - y_1^1}{(r_{11}^{12})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{12} K_1(\gamma r_{11}^{12}) \right]; \\
 v_1^1 &= \frac{\kappa_1^2}{4\pi} \frac{x_1^1 - x_1^2}{(r_{11}^{12})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{12} K_1(\gamma r_{11}^{12}) \right], \\
 v_1^2 &= \frac{\kappa_1^1}{4\pi} \frac{x_1^2 - x_1^1}{(r_{11}^{12})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{12} K_1(\gamma r_{11}^{12}) \right]; \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 u_1^1 &= -\frac{\kappa_2^1}{4\pi} \frac{y_1^1 - y_2^1}{(r_{12}^{11})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{11} K_1(\gamma r_{12}^{11}) \right], \\
 u_2^1 &= -\frac{\kappa_1^1}{4\pi} \frac{y_2^1 - y_1^1}{(r_{12}^{11})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{11} K_1(\gamma r_{12}^{11}) \right]; \\
 v_1^1 &= \frac{\kappa_2^1}{4\pi} \frac{x_1^1 - x_2^1}{(r_{12}^{11})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{11} K_1(\gamma r_{12}^{11}) \right], \\
 v_2^1 &= \frac{\kappa_1^1}{4\pi} \frac{x_2^1 - x_1^1}{(r_{12}^{11})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{11} K_1(\gamma r_{12}^{11}) \right]. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

⁷Формулы (2.13) и (2.14) показывают, что в условиях рассматриваемого предположения о равенстве толщин слоев эти варианты дают эквивалентные результаты, поэтому можно рассматривать лишь один из них, например, первый.

В общем случае вихри совершают круговые движения с угловыми скоростями

а)

$$\omega = \frac{\kappa_1^1 + \kappa_1^2}{4\pi(r_{11}^{12})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{12} K_1(\gamma r_{11}^{12}) \right], \quad (3.4)$$

б)

$$\omega = \frac{\kappa_1^1 + \kappa_2^1}{4\pi(r_{12}^{11})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{11} K_1(\gamma r_{12}^{11}) \right] \quad (3.5)$$

относительно центров завихренности с координатами

а)

$$(x_c, y_c) = \frac{\kappa_1^1(x_1^1, y_1^1) + \kappa_1^2(x_1^2, y_1^2)}{\kappa_1^1 + \kappa_1^2}, \quad (3.6)$$

б)

$$(x_c, y_c) = \frac{\kappa_1^1(x_1^1, y_1^1) + \kappa_2^1(x_2^1, y_2^1)}{\kappa_1^1 + \kappa_2^1}. \quad (3.7)$$

Конструкцию из двух вихрей, принадлежащих различным слоям совершающую при $\kappa_1^1 + \kappa_2^1 \neq 0$ вращение (3.5) относительно центра (3.7), будем называть *двухъярусным волчком*.

Формулы (3.2)–(3.7) указывают на общую специфику двухслойной модели: *вихри, принадлежащие одному слою, и вихри из разных слоев взаимодействуют по разным законам* [7]. Особенно отчетливо это видно на примерах однослойной и двухслойной вихревых пар, когда в случае а) имеем $\kappa_1^1 = -\kappa_1^2 \equiv \kappa$, а в случае б) $\kappa_1^1 = -\kappa_2^1 \equiv \kappa$, и, очевидно, центр завихренности находится в бесконечно удаленной точке, а угловые скорости (3.4) и (3.5) принимают нулевые значения.

Пусть в начальный момент оба вихря расположены на оси x на расстоянии l друг от друга. Тогда формулы (3.2)–(3.3) дают выражения для скоростей вихревых пар:

а)

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1^2 = 0; \\ v_1^1 &= v_1^2 = \pm \frac{\gamma\kappa}{4\pi L} \left[1 + LK_1(L) \right] \equiv \pm \frac{\gamma\kappa}{4\pi} f_1(L); \end{aligned} \quad (3.8)$$

б)

$$u_1^1 = u_2^1 = 0;$$

$$v_1^1 = v_2^1 = \pm \frac{\gamma\kappa}{4\pi L} \left[1 - LK_1(L) \right] \equiv \pm \frac{\gamma\kappa}{4\pi} f_2(L), \quad (3.9)$$

где $L = \gamma l$. Здесь при $\kappa > 0$ верхний (нижний) знак отвечает ситуации, в которой вихрь с положительной интенсивностью занимает левое (правое) положение; при $\kappa < 0$ ориентация движения пары вихрей меняется на противоположную.

Формулы (3.8)–(3.9) и рис. 2, где показано поведение функций $f_1(L)$ и $f_2(L)$ (в сравнении с функцией $f(L) = 1/L$), демонстрируют их существенные различия. Важно отметить, что скорость хетона (3.9) имеет немонотонную зависимость от расстояния между вихрями, причем

$$f_2(L) \sim -L \ln L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L \ll 1, \quad f_2(L) \sim 1/L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L \gg 1$$

и $f_2(L^*) = \max f_2(L)$, где значение $L^* = 1.114$ является решением уравнения

$$f_2'(L) = K_0(L) + \frac{1}{L}K_1(L) - \frac{1}{L^2} = 0.$$

Таким образом, хетон с вертикальной осью всегда неподвижен, а хетон, имеющий наклонную ось, движется поступательно со скоростью, принимающей максимальное значение при $l = L^*/\gamma$.

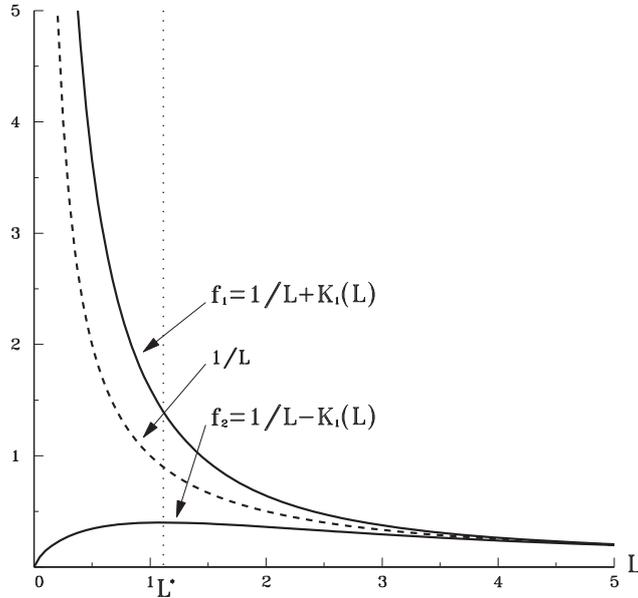


Рис. 2. Зависимости (3.8) и (3.9) для $f_1(L)$ и $f_2(L)$.

3.2. Случай трех вихрей: $N = 3$

Рассмотрим варианты 1) $N_1 = 3$ и 2) $N_1 = 1, N_2 = 2$ (случаи $N_2 = 3$ и $N_1 = 2, N_2 = 1$, соответственно, эквивалентны им в силу симметрии). Уравнения (2.13), (2.14) дают:

1)

$$u_1^\alpha = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \kappa_1^\beta \frac{y_1^\alpha - y_1^\beta}{(r_{11}^{\alpha\beta})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{11}^{\alpha\beta}) \right], \quad (3.10)$$

$$v_1^\alpha = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \kappa_1^\beta \frac{x_1^\alpha - x_1^\beta}{(r_{11}^{\alpha\beta})^2} \left[1 + \gamma r_{11}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{11}^{\alpha\beta}) \right], \quad (3.11)$$

$\alpha = 1, 2, 3.$

2)

$$u_1^1 = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^2 \kappa_2^\alpha \frac{y_1^1 - y_2^\alpha}{(r_{12}^{1\alpha})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{1\alpha} K_1(\gamma r_{12}^{1\alpha}) \right],$$

$$u_2^\alpha = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \kappa_2^{3-\alpha} \frac{y_2^\alpha - y_2^{3-\alpha}}{(r_{22}^{\alpha(3-\alpha)})^2} \left[1 + \gamma r_{22}^{\alpha(3-\alpha)} K_1(\gamma r_{22}^{\alpha(3-\alpha)}) \right] + \right.$$

$$\left. \kappa_1^1 \frac{y_2^\alpha - y_1^1}{(r_{21}^{\alpha 1})^2} \left[1 - \gamma r_{21}^{\alpha 1} K_1(\gamma r_{21}^{\alpha 1}) \right] \right\}, \quad (3.12)$$

$$v_1^1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^2 \kappa_2^\alpha \frac{x_1^1 - x_2^\alpha}{(r_{12}^{1\alpha})^2} \left[1 - \gamma r_{12}^{1\alpha} K_1(\gamma r_{12}^{1\alpha}) \right],$$

$$v_2^\alpha = \frac{1}{4\pi} \left\{ \kappa_2^{3-\alpha} \frac{x_2^\alpha - x_2^{3-\alpha}}{(r_{22}^{\alpha(3-\alpha)})^2} \left[1 + \gamma r_{22}^{\alpha(3-\alpha)} K_1(\gamma r_{22}^{\alpha(3-\alpha)}) \right] + \right.$$

$$\left. \kappa_1^1 \frac{x_2^\alpha - x_1^1}{(r_{21}^{\alpha 1})^2} \left[1 - \gamma r_{21}^{\alpha 1} K_1(\gamma r_{21}^{\alpha 1}) \right] \right\}, \quad (3.13)$$

В (3.12) и (3.13) $\alpha = 1, 2.$

Далее, будем считать, что для варианта 1) $\kappa_1^1 = -2\kappa, \kappa_1^2 = \kappa_1^3 = \kappa$, а для варианта 2), следуя [50, 146], ограничимся двумя случаями: 2а) $\kappa_1^1 = -2\kappa, \kappa_2^1 = \kappa_2^2 = \kappa$; 2б) $\kappa_1^1 = \kappa_2^2 = -\kappa, \kappa_1^2 = 2\kappa$ и примем $\kappa > 0.$

3.2.1. Нулевой суммарный импульс: $P_x = P_y = 0$

При этих условиях три вихря должны лежать на одной прямой с симметричным расположением одноименных вихрей относительно более сильного центрального ядра с противоположной по знаку интенсивностью.

1) В этом случае центр вращения совпадает с центральным вихрем. Аналогичные симметричные вихревые структуры типа в однородной жидкости широко известны как триполярные вихри (или триполи) [31, 32, 39, 75, 76, 77, 78, 108, 103, 104, 105, 123, 130, 131, 135, 152], вращающиеся с постоянной угловой скоростью вокруг центрального вихря в направлении, определяемом знаком его завихренности. В данной ситуации для угловой скорости периферийных вихрей из (3.10)–(3.11) получаем выражение

$$\omega = -\frac{\kappa\gamma^2}{4\pi L^2} \left\{ L \left[K_1(2L) + 2K_1(L) \right] + \frac{3}{2} \right\}, \quad (3.14)$$

отличающееся от формулы для угловой скорости триполя в баротропной среде (при условии твердой крышки на поверхности) множителем $1/2$, равным толщине слоя, а также слагаемыми, содержащими функции Макдональда. Последние характеризуют влияние нижней (для верхнего слоя) свободной поверхности раздела слоев.

2а) В данном случае центральное ядро, совпадающее с центром вращения, и периферийные вихри принадлежат разным слоям. Последние, как и в баротропном случае, вращаются по круговым орбитам с постоянной угловой скоростью. Такой вихревой структуре в [143, 146] дано название *карусель*. Из (3.12)–(3.13) получаем следующее выражение для скорости вращения:

$$\omega = \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi L^2} \left\{ L \left[K_1(2L) + 2K_1(L) \right] - \frac{3}{2} \right\}. \quad (3.15)$$

Здесь $L = \gamma l$, где l — половина расстояния между периферийными вихрями.

Приравнивая угловую скорость (3.15) к нулю, находим единственное решение этого уравнения $L = L^{**} = 0.8602$. Таким образом, при $L > L^{**}$ вихри нижнего слоя, как и в баротропном случае, вращаются в антициклоническом направлении, индуцируемом вихрем верхнего слоя, и мы имеем *обычную карусель*. При $L < L^{**}$ взаимодействие между циклоническими вихрями становится преобладающим, и они, несмотря на антициклоническую закрутку со стороны центрального вихря, движутся вдоль круговой траектории в направлении против часовой стрелки (*инверсная карусель*). При $L = L^{**}$ мы имеем неустойчивое стационарное состояние, при котором вихри нижнего слоя неподвижны.

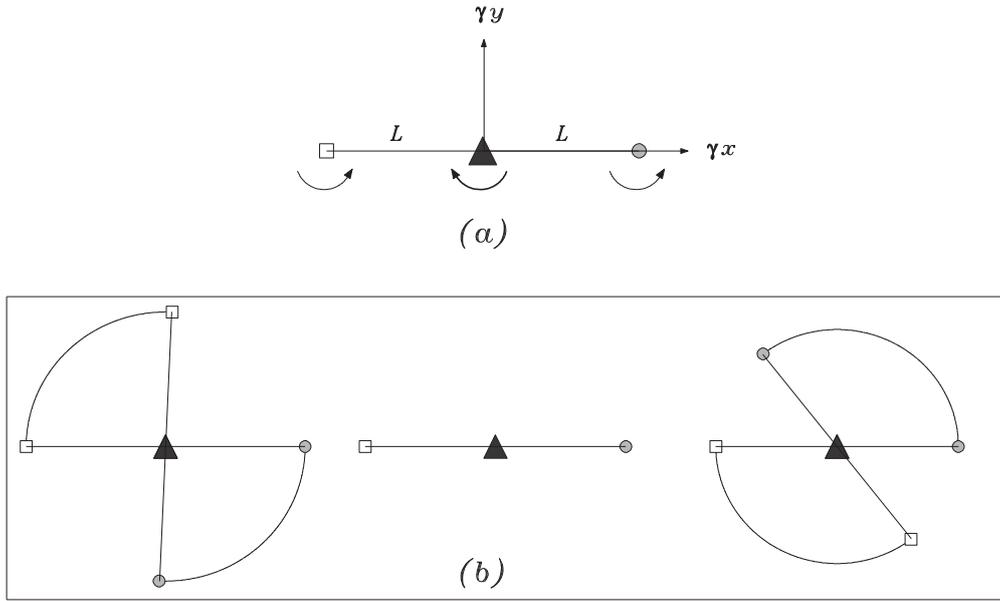


Рис. 3. Случай 2а): Схема начального расположения вихрей — (а); начальные участки траекторий вихрей — (b). Отрезками соединены положения вихрей для начального и конечного (расчетного) моментов времени.

На рис. 3а представлена схема начального расположения вихрей, а на рис. 3б — траектории движения вихрей на небольшом интервале времени для случаев $L > L^{**}$, $L = L^{**}$ и $L < L^{**}$ (слева направо). Здесь (и на рис. 4, 6 и 7) треугольным маркером обозначен вихрь верхнего слоя с интенсивностью κ_1^1 , а вихрям нижнего слоя с интенсивностями κ_2^1 и κ_2^2 отвечают, соответственно, круглый и квадратный маркеры. Размеры значков пропорциональны абсолютным значениям интенсивностей вихрей ($|\kappa_1^1| = 2\kappa$, $|\kappa_2^1| = |\kappa_2^2| = \kappa$).

2б) Периферийные вихри принадлежат разным слоям, и поэтому воздействие на них центрального вихря различно. Центр вращения при этом принадлежит отрезку между вихрем верхнего слоя и центральным вихрем, принадлежащем нижнему слою, и отстоит от первого из них на расстояние

$$L_c = L - \frac{2L^2 K_1(L)}{LK_1(2L) + 3/2}. \quad (3.16)$$

Такую твердотельную вихревую структуру будем называть *эксцентричной каруселью*⁸. Угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi L^2} \left[LK_1(2L) + \frac{3}{2} \right], \quad (3.17)$$

⁸Аналог двухвихревого *двухъярусного волчка*, имеющий, однако, нулевую суммарную интенсивность.

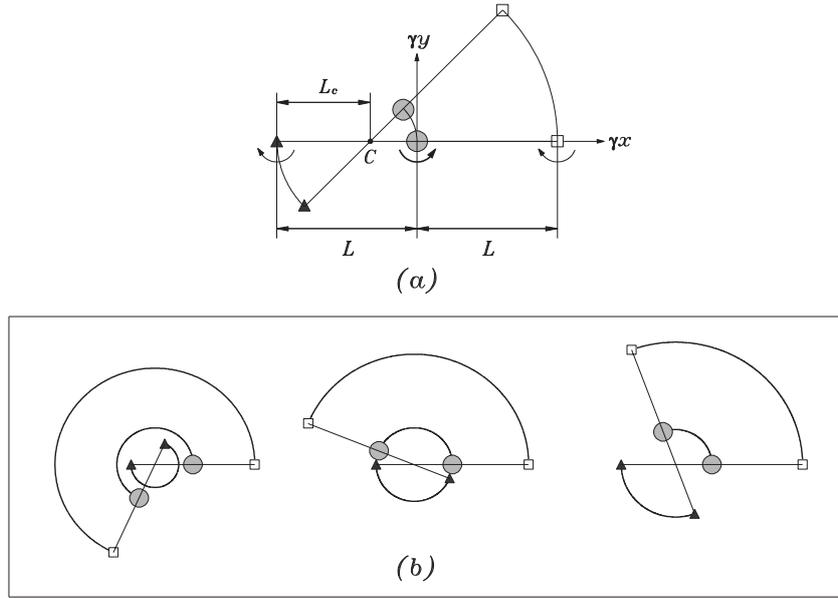


Рис. 4. Случай 2б): Схематическое представление движения вихрей — (a); начальные участки траекторий вихрей — (b).

и ее знак всегда совпадает со знаком завихренности сильного вихря. Рис. 4а демонстрирует схему начального расположения вихрей и поясняет характер движения периферийных вихрей, а рис. 4б изображает траектории движения вихрей на небольшом интервале времени для случаев, когда представленная формулой (3.15) величина L_c удовлетворяет условиям $L_c < L/2$, $L_c = L/2$ и $L_c > L/2$.

3.2.2. Ненулевой суммарный импульс

В этом случае качественное исследование относительного движения вихрей удобно проводить в так называемых трilinearных координатах (t_1, t_2, t_3) [54, 57, 138, 139, 50, 146] — см. рис. 5. Для примера, ограничимся случаем 2а), когда трilinearные координаты принимают вид

$$t_1 = -\frac{3\kappa^2(r_{22}^{21})^2}{P^2} \leq 0, \quad t_2 = \frac{6\kappa^2(r_{21}^{21})^2}{P^2} \geq 0, \quad t_3 = \frac{6\kappa^2(r_{21}^{11})^2}{P^2} \geq 0,$$

причем $t_1 + t_2 + t_3 = 3$, $P^2 = P_x^2 + P_y^2$, (3.18)

а «физическая область» определяется выражением

$$12t_1 + (t_2 - t_3)^2 \leq 0. \quad (3.19)$$

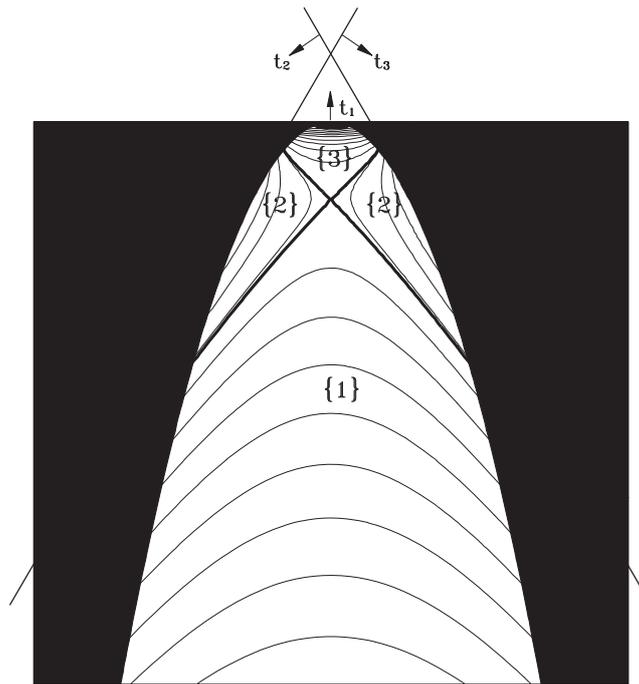


Рис. 5. Схема трилинейных координат (3.18) и фазовый портрет задачи о движении трех вихрей в «физической области» (3.19): случай 2a). Толстые линии представляют собой сепаратрисы, разделяющие подобласти $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$.

Характерный фазовый портрет изображен на рис. 5. Черным цветом на рисунке закрашена «нефизическая область», для которой расстояния между вихрями не удовлетворяют неравенству треугольника. В процессе движения вихрей соответствующая изображающая точка фазовой плоскости совершает движение вдоль соответствующей траектории, периодически «отражаясь» от границы (в эти моменты вихри принимают коллинеарное расположение) и переходя к реверсивному движению. Анализ фазового портрета дает следующие качественные результаты:

- Все относительные движения — периодические, причем в течение каждого периода система дважды проходит через коллинеарные состояния. Отсюда, в частности, следует, что свойства абсолютных движений могут быть исследованы исчерпывающе, если ограничиться начальными условиями, отвечающими коллинеарному расположению трех вихрей (во всех демонстрируемых ниже примерах использованы именно такие начальные условия). Абсолютное движение имеет поступательную составляющую, определяемую величиной суммарного импульса системы.
- Относительные движения финитны.

- Возможны движения трех типов, отличающихся между собой характером взаимодействия между вихрями:

- Тип {1} — преобладающее значение имеет внутрислойное взаимодействие между вихрями нижнего слоя, и движение условно можно определить схемой

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где обозначению $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ отвечает вихрь с интенсивностью κ_j^i ;

- Тип {2} — один из вихрей нижнего слоя захватывается вихрем верхнего, и имеет место одна из формул:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Тип {3} — оба вихря нижнего слоя вовлекаются в антициклоническое движение, индуцируемое вихрем $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Примеры абсолютного движения для трех указанных типов показаны на рис. 6.

- Фазовый портрет имеет три эллиптические (устойчивые) и одну гиперболическую (неустойчивую) особые точки. Одной из эллиптических точек (при $t_1 = 0$) соответствует случай, когда система вихрей образует пару (хетон) из слившихся циклонов нижнего слоя и антициклона верхнего слоя. Двум другим эллиптическим точкам отвечают нетривиальные коллинеарные состояния, представляющие собой равномерно перемещающуюся тройку вихрей. Такой структуре в [50, 146] дано наименование *тритон*. Условие существования тритона задается дисперсионным уравнением

$$\frac{A^2 - 2AL + 4L^2}{2AL(2L - A)} = K_1(A) + K_1(2L - A) + K_1(2L), \quad (3.20)$$

а скорость его движения — равенством

$$V = \frac{\kappa\gamma}{4\pi} \left\{ \frac{1}{A} - K_1(A) - \left[\frac{1}{2L-A} - K_1(2L-A) \right] \right\} \equiv \frac{\kappa\gamma}{4\pi} F[A(L)]. \quad (3.21)$$

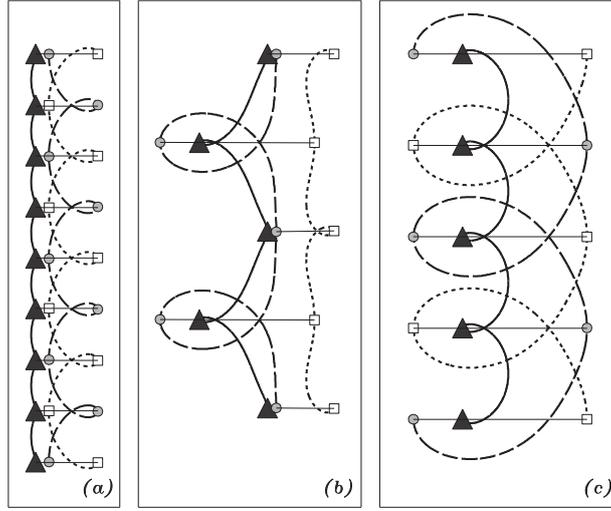


Рис. 6. Примеры движений типов $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$. Сплошная линия изображает траекторию вихря верхнего слоя ($\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$), крупный штрих — первого вихря нижнего слоя ($\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$), мелкий штрих - второго вихря нижнего слоя ($\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$). Маркеры, проставленные через каждые пол-периода, фиксируют синхронные (коллинеарные) положения вихрей.

Смысл переменной A ясен из рис. 7a. На рис. 7b изображены дисперсионная кривая $A(L)$, как решение (3.20), и функция F из (3.21). Сплошным (штриховым) линиям соответствуют ветви, для которых $A < L$ ($A > L$). Из рис. 7, в частности, видно, что при $L < L^{**}$ решений типа *тритон* не существует.

Гиперболической точке фазовой плоскости соответствует конфигурация вихрей в виде равнобедренного треугольника с вихрем верхнего слоя в выделенной вершине. Длина боковой стороны и угол при основании треугольника связаны дисперсионным уравнением

$$\frac{1 + 2L|\cos \phi|K_1(2L|\cos \phi|)}{\cos^2 \phi} = 4[1 - LK_1(L)], \quad (3.22)$$

а скорость равномерного движения вихревой структуры в направлении, параллельном основанию треугольника, выражается формулой⁹

$$V = -\frac{\kappa\gamma \sin \phi}{4\pi L} [1 - LK_1(L)]. \quad (3.23)$$

⁹В однородной жидкости [152] стационарному решению типа (3.22) соответствует равнобедренный треугольник, причем с произвольной длиной стороны. Выражения (3.20) и (3.22) представляют собой частный случай более общих соотношений, полученных в [9] для условий непрерывной стратификации и с учетом дифференциального (неравномерного) вращения для треугольной конфигурации вихрей, два из которых (одного знака) расположены на одном горизонте, а третий - на другом.

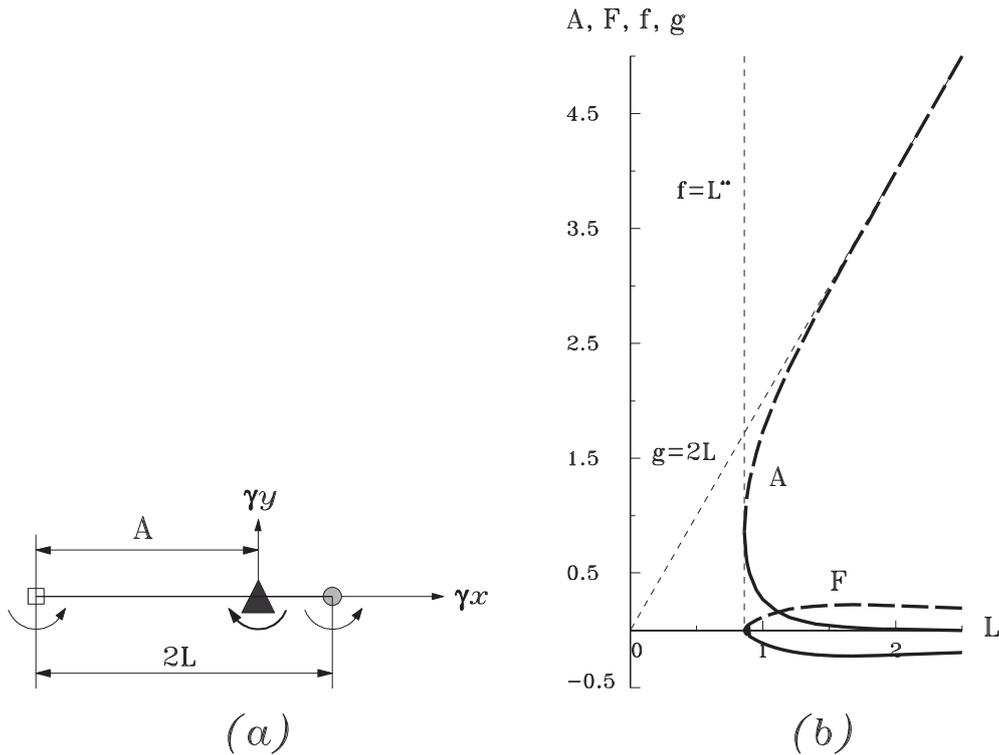


Рис. 7. Схема первоначального расположения вихрей для коллинеарной структуры *тритон* — (a); дисперсионная кривая $A(L)$ и функция F (3.21), характеризующая поступательную скорость *тритона* — (b). Наклонная мелкоштриховая линия $g = 2L$ задает асимптоту для дисперсионной кривой ($A \sim 2L$), а вертикальная определяется равенством $f = L^{**}$, где L^{**} — решение уравнения $\omega = 0$ из (3.15) для предельного случая нулевого суммарного импульса ($A = L$).

Примеры траекторий абсолютного движения устойчивой конфигурации *тритон* и неустойчивой треугольной конфигурации при условиях выполнения дисперсионных соотношений (3.20) и (3.22) приведены, соответственно, на рис. 8a и 8b. На первом из них коллинеарность имеет место постоянно, и отрезки, проходящие через все три вихря, здесь проставлены только для начального и конечного расчетного моментов времени. Во втором случае каждую четверть периода вихри образуют либо коллинеарную конфигурацию, либо принимают форму равнобедренного треугольника, причем, в обеих ситуациях через пол периода вихри нижнего слоя меняются местами (если не учитывать поступательного движения всей системы вихрей). Ясно, что в данном эксперименте соответствующая изображающая точка фазовой плоскости «скатывается» из седлового положения в область $\{3\}$.

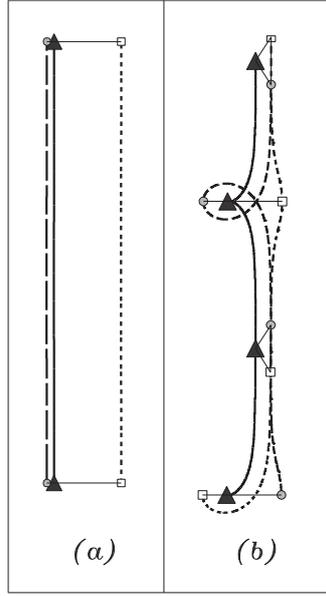


Рис. 8. Стационарные траектории трех вихрей в устойчивом (*третон* — эллиптическая особая точка) — (a) и неустойчивом (в виде равнобедренного треугольника — гиперболическая особая точка) — (b) случаях.

3.3. Случай четырех вихрей с нулевыми суммарными интенсивностью и импульсом

Свойства взаимодействия четырех дискретных вихрей в двухслойной жидкости, удовлетворяющих условиям (3.1), изучены достаточно подробно [109, 156, 102, 144, 145] для частного случая $N_1 = N_2 = 2$. Следуя этим работам, укажем на основные результаты. Уравнения движения (2.13)–(2.14) в этом случае принимают вид:

$$u_j^\alpha = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \kappa_j^{3-\alpha} \frac{y_j^\alpha - y_j^{3-\alpha}}{(r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)})^2} \left[1 + \gamma r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)}) \right] + \sum_{\beta=1}^2 \kappa_{3-j}^\beta \frac{y_j^\alpha - y_{3-j}^\beta}{(r_{j(3-j)}^{\alpha\beta})^2} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}, \quad (3.24)$$

$$v_j^\alpha = \frac{1}{4\pi} \left\{ \kappa_j^{3-\alpha} \frac{x_j^\alpha - x_j^{3-\alpha}}{(r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)})^2} \left[1 + \gamma r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha(3-\alpha)}) \right] + \sum_{\beta=1}^2 \kappa_{3-j}^\beta \frac{x_j^\alpha - x_{3-j}^\beta}{(r_{j(3-j)}^{\alpha\beta})^2} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}, \quad (3.25)$$

где $j, \alpha = 1, 2$. Таким образом, (3.24)–(3.25) представляют собой систему восьми уравнений. Пусть, далее, $\kappa_1^1 = \kappa_1^2 = -\kappa_2^1 = -\kappa_2^2 = -\kappa < 0$.

Как указывалось выше, при выполнении условий (3.1) возможна редукция к задаче о трех вихрях, когда с помощью трилинейных координат удается провести качественный анализ свойств относительного движения. Однако в частном случае равенства нулю суммарного момента системы четырех вихрей такой анализ можно осуществить и в обычных ортогональных координатах.

3.3.1. Нулевой суммарный момент: $M = 0$

Полный анализ относительных движений дает фазовый портрет (изолинии гамильтониана на плоскости $(\gamma x, \gamma y)$) на рис. 9а, впервые полученный в [109]. На рис. 9б представлен эквивалентный ему фазовый портрет в трилинейных координатах.

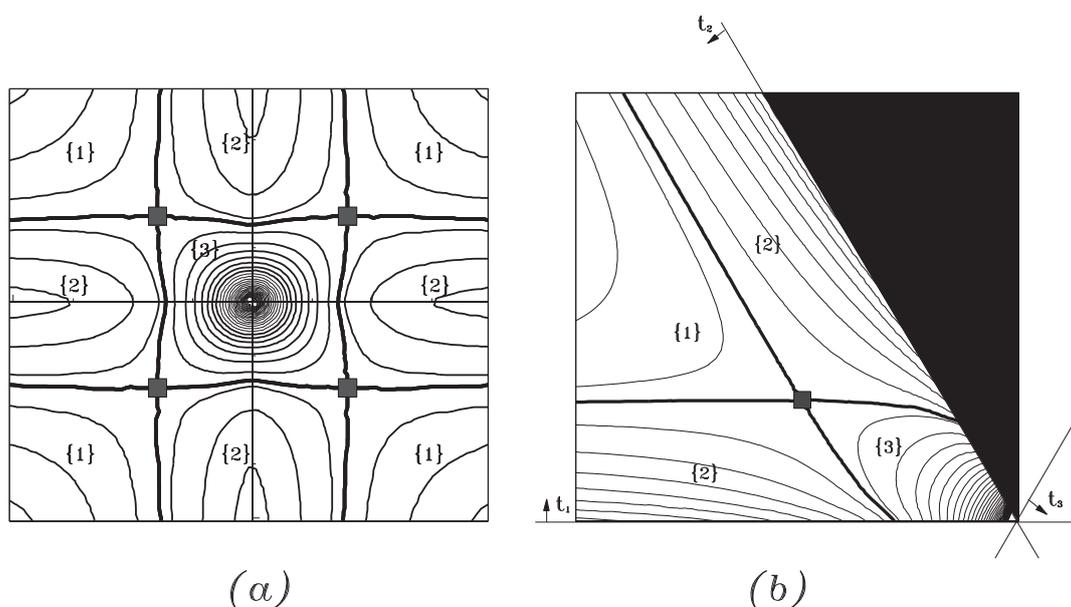


Рис. 9. Фазовые портреты задачи о четырех вихрях с нулевым суммарным моментом в прямоугольных – (а) и треугольных – (б) координатах.

В этом случае оси трилинейной системы координат

$$t_1 = 3\kappa^2(r_{21}^{12})^2 \geq 0, \quad t_2 = 3\kappa^2(r_{21}^{11})^2 \geq 0, \quad t_3 = -3\kappa^2(r_{11}^{21})^2 \leq 0, \\ \text{при } t_1 + t_2 + t_3 = 0, \quad (3.26)$$

имея ту же ориентацию, что на рис. 5, пересекаются в точке $(0, 0, 0)$, а «физическая область» задается неравенствами (3.26).

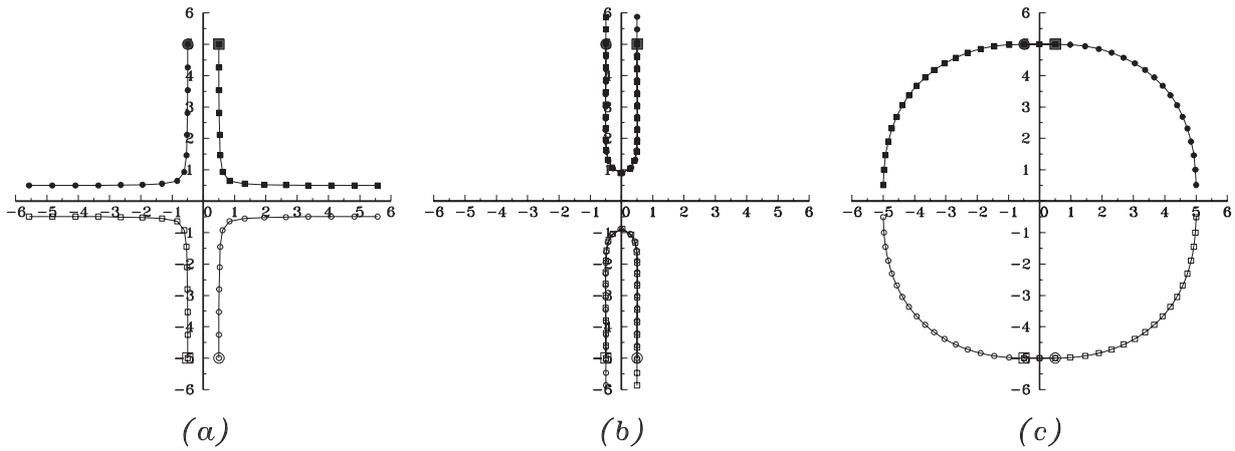


Рис. 10. Траектории движений типов $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$ четырех вихрей (двух хетонов с наклонными осями) с нулевым суммарным моментом.

Помимо областей $\{1\}$ ¹⁰, имеющих место и для вихревых взаимодействий в однородной жидкости [5, 38], в двухслойном случае появляются еще области $\{2\}$ и $\{3\}$. Геометрически, областям $\{1\}$ и $\{2\}$ соответствуют инфинитные относительные движения, а области $\{3\}$ — финитные. С точки зрения динамики, для движений типов $\{1\}$ и $\{2\}$ преобладающим является межслойное взаимодействие вихрей, а для $\{3\}$ — внутрислойное.

Если в начальный момент времени расположение вихрей таково, что хетоны способны к встречному движению, то в области $\{2\}$ сближение двухслойных пар сопровождается непрерывным уменьшением наклонов их осей (т. е. расстояний между вихрями верхнего и нижнего слоев) вплоть до нулевого значения; затем вихри в каждом из хетонов меняются местами (в проекции сверху), и пары переходят к реверсивному движению: имеет место как бы упругое «соударение на расстоянии» хетонов с последующим их разбеганием в противоположных направлениях. Если же в исходном состоянии хетоны имеют вертикальные оси, то наблюдается только вторая часть этого сценария. При этом области $\{2\}$ будут отвечать только те положения, для которых расстояние c между вертикальными осями хетонов удовлетворяет неравенству $c > C^*/\gamma$, где $C^* = 1.4332$. В случае обратного неравенства мы попадаем в область $\{3\}$.

В области $\{3\}$ вихри верхнего и нижнего слоев движутся в противоположных направлениях вдоль финитных O -образных (по терминологии [109]) покрывающих друг друга траекторий. В силу инвариантности M , в любой момент времени соблюдается как осевая, так и зеркальная симмет-

¹⁰Этим областям соответствует встречное движение пар и последующий обмен партнерами. Отличие от баротропного случая состоит лишь в том, что каждая пара имеет двухслойную структуру, т. е. представляет собой хетон с наклонной осью.

рия расположения вихрей (таким образом, в каждом из слоев два вихря в любой момент времени расположены на противоположных концах некоторого воображаемого отрезка с центром в начале координат). В окрестности начала координат траектории имеют квази-круговую форму, а при удалении от него в пределе принимают вид четырехугольной звезды с точками торможения в ее острых углах (это — точки пересечения сепаратрис, отмеченные на рисунке квадратными маркерами).

Полагая для этих точек

$$x_j^\alpha = x_{3-j}^{3-\alpha} = -x_j^{3-\alpha} = -x_{3-j}^\alpha = y_j^\alpha = y_{3-j}^{3-\alpha} = -y_j^{3-\alpha} = -y_{3-j}^\alpha = b/2,$$

из (3.24)–(3.25) получаем для величины $B = \gamma b$ трансцендентное уравнение

$$\frac{1}{B} = 2 \left[K_1(B) + \frac{1}{\sqrt{2}B} K_1(\sqrt{2}B) \right] \quad (3.27)$$

с решением $B = B^* = 1.5947$.

Важно отметить, что если в случае трех вихрей для полного анализа всех возможных движений достаточно было рассматривать только коллинеарные начальные состояния, то теперь этого недостаточно (т.к. не все фазовые траектории выходят на границу «физической области»), и кроме коллинеарного состояния необходимо ввести в рассмотрение, например, начальные конфигурации с расположением вихрей в углах квадратов с длиной стороны, превышающей B^* .

Примеры движений типов $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$ приведены на рис. 10а, 10б и 10с соответственно. Здесь круглыми (квадратными) маркерами обозначены антициклонические (циклонические) вихри верхнего (нижнего) слоя. Темные (светлые) значки отвечают вихрям, которые в начальный момент времени расположены в верхней (нижней) части рисунков. Начальным положениям вихрей соответствуют более крупные маркеры. Временные интервалы расчета выбраны такими, чтобы на 10б продемонстрировать процесс движения (на фазе разлета) каждого из вихрей вдоль прямых, совпадающих с первоначальной траекторией его партнера из другого слоя, а на 10с — до начала взаимного перекрытия траекторий.

3.3.2. Ненулевой суммарный момент: $M \neq 0$

В этом случае характерный фазовый портрет в трilinearных координатах

$$t_1 = \frac{3\kappa^2 (d_{21}^{12})^2}{M} \geq 0, \quad t_2 = \frac{3\kappa^2 (d_{21}^{11})^2}{M} \geq 0, \quad t_3 = -\frac{3\kappa^2 (d_{11}^{21})^2}{M} \leq 0, \\ \text{при } t_1 + t_2 + t_3 = 3 \quad (3.28)$$

в «физической области»

$$t_1 t_2 \leq \frac{9}{4} \quad (3.29)$$

задается рисунком 11, откуда видно, что относительные движения, как и в предыдущем случае, разбиваются на три качественно различных типа. Однако, в отличие от случая $M = 0$, теперь все траектории вихрей имеют только центральную симметрию.

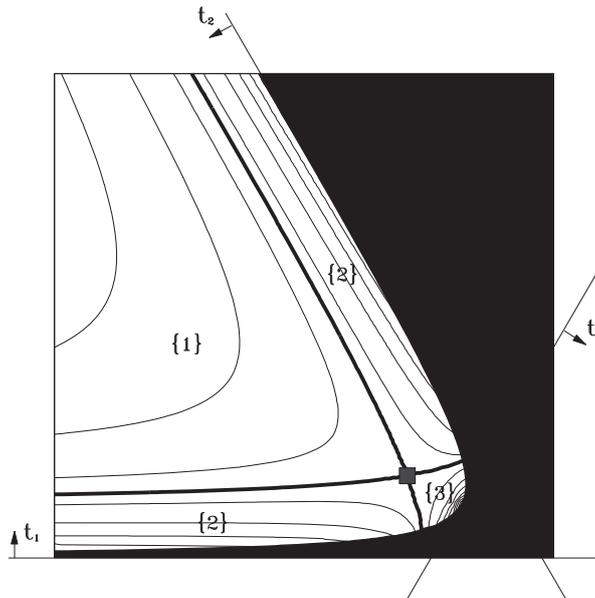


Рис. 11. Характерный фазовый портрет в трilinearных координатах задачи о четырех вихрях с ненулевым суммарным моментом.

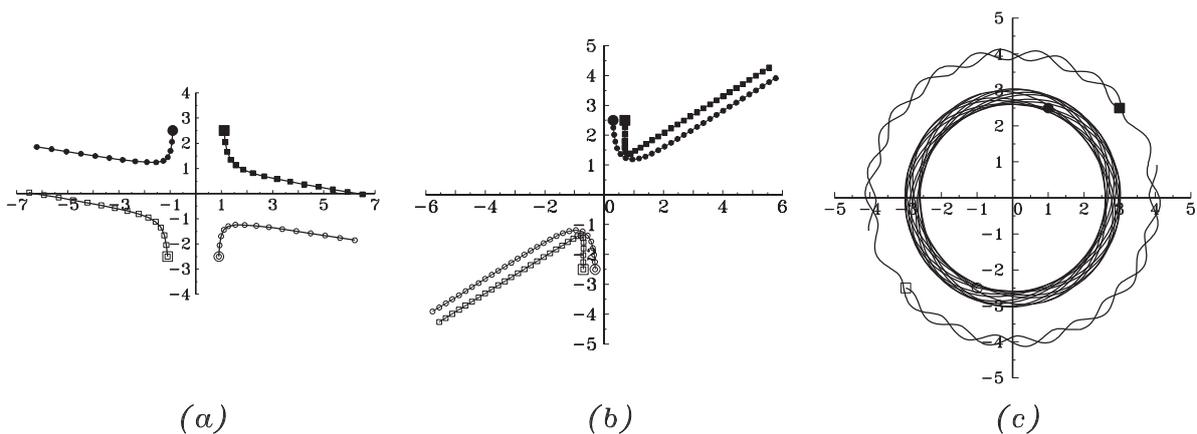


Рис. 12. Траектории движений типов {1} — (a), {2} — (b) и {3} — (c) четырех вихрей с ненулевым суммарным моментом.

Примеры траекторий четырех вихрей для случаев {1}, {2} и {3} даны на рис. 12а, 12b и 12с соответственно, причем на последнем из них, во избежание загромождения рисунка, маркерами отмечены только начальные положения вихрей. Ясно, что движения типов {1} и {2} представляют собой случаи встречного, но нелобового столкновения хетонов. В первом случае происходит обмен партнерами между парами вихрей, а во втором каждый из хетонов в процессе взаимодействия остается неделимой двухслойной парой.

Движения типа {3} теперь характеризуются антициклоническими вращениями вихрей верхнего слоя и циклоническими — нижнего, имеющими различные средние радиусы и сопровождающиеся нутационными осцилляциями. Интересно, что в области {3} всегда существует единственная фазовая траектория (обозначим ее через χ), которой соответствует стационарное решение, демонстрируемое рис. 13b. При этом все вихри совершают чисто периодические движения. Два вихря верхнего слоя все время принадлежат противоположным концам вращающегося в *антициклоническом* направлении «диаметра» квазиэллиптической неподвижной конфигурации, а каждый из двух вихрей нижнего слоя совершает *циклоническое* вращение относительно симметрично расположенных неподвижных периферийных точек. Каждые пол-периода все четыре вихря выстраиваются в коллинеарную конфигурацию. Периоды обращения вихрей верхнего и нижнего слоев относятся как 1:2. Поскольку внешний вид фигуры, образованной траекториями вихрей напоминает форму неподвижной карусели, это состояние будем называть *составной каруселью*.

Переход на другие фазовые кривые в окрестности χ в одну или другую сторону (это соответствует незначительным изменениям начальных координат вихрей, при которых остается неизменным суммарный момент системы) приводит к тому, что соответствующие периферийные точки перестают быть неподвижными, и, в результате, вихри нижнего слоя, совершая осцилляции, начинают перемещаться в циклоническом либо антициклоническом направлениях — соответственно рис. 13а и 13с. Ясно, что в первом из этих случаев взаимодействие вихрей в основном имеет внутрислойный характер, а во втором — межслойный.

Гиперболической стационарной точке, отмеченной на рис. 11 квадратиком, в данном случае отвечает расположение четырех вихрей в углах ромба, вращающегося с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\kappa\gamma^2}{2\pi B^2} \left[1 - BK_1(B) - \frac{1 + 2B|\sin\phi|K_1(2B|\sin\phi|)}{4\cos^2\phi} \right], \quad (3.30)$$

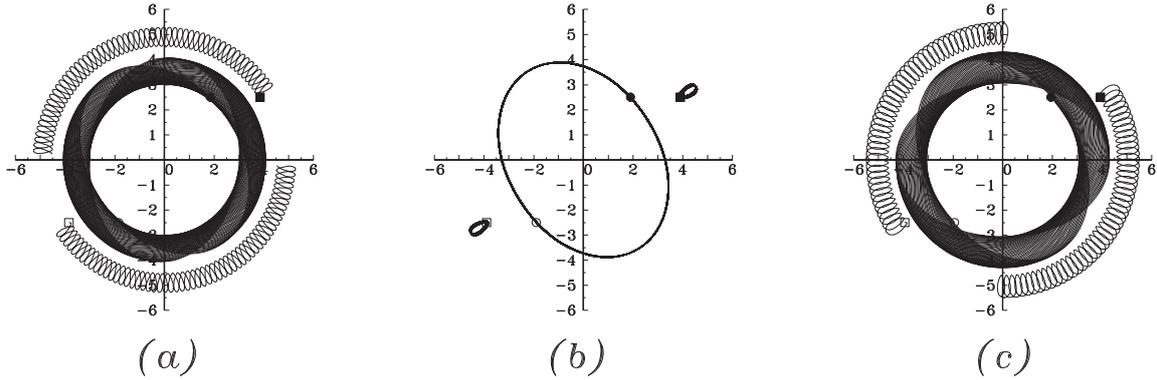


Рис. 13. Траектории движений типа {3} четырех вихрей с ненулевым суммарным моментом, отвечающие фазовым кривым в окрестности χ — (a) и (c) — и на самой кривой χ — (b).

где B теперь представляет длину стороны ромба, а ϕ — половину его острого угла. Вместо (3.27) получаем

$$8[1 - BK_1(B)] = \frac{1 + 2B|\sin \phi|K_1(2B|\sin \phi|)}{\sin^2 \phi} + \frac{1 + 2B|\cos \phi|K_1(2B|\cos \phi|)}{\cos^2 \phi}. \quad (3.31)$$

В частном случае вырождения ромба в квадрат ($\phi = \pi/4$) из (3.31) следует (3.27), в силу чего (3.30) дает $\omega = 0$.

3.4. Случай $N > 4$

3.4.1. Интегрируемые случаи

Система вихрей с $N > 4$ допускает интегрируемость в случаях, когда она обладает дополнительными симметриями [132, 63, 55, 40, 116]. Например, если $N_1 = N_2 = n$, и хетоны в начальный момент расположены в вершинах правильного n -угольника, уравнения относительного движения могут быть редуцированы к уравнениям, описывающим эволюцию одного эквивалентного хетона. Методика такой редукции гамильтоновых систем описана в [55, 40] в рамках модели двумерных вихрей.

Следуя [55], ищем решение (2.13)–(2.14) в виде

$$x_j^\alpha = r(t) \cos\left(\phi_j + \frac{2\pi(\alpha - 1)}{n}\right), \quad y_j^\alpha = r(t) \sin\left(\phi_j + \frac{2\pi(\alpha - 1)}{n}\right), \quad (3.32)$$

где (r, ϕ_j) - полярные координаты, $j = 1, 2$ - номер слоя, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ - номер хетона. Тогда, полагая $\kappa_j^\alpha = -\kappa_{3-j}^\alpha = \kappa$, получим редуцированные уравнения

$$\dot{r} = -\frac{\kappa}{4\pi r} \left\{ \frac{n}{2} s(0, n\phi) - \gamma r \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} s(\alpha, 0) S(\alpha, 0) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} s(\alpha, \phi) S(\alpha, \phi) \right] \right\}, \quad (3.33)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\kappa}{4\pi r^2} \left\{ -\frac{1}{2} + \gamma r \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} S(\alpha, 0) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} S(\alpha, \phi) \right] \right\}, \quad (3.34)$$

для эквивалентного хетона. Здесь $\phi = \phi_{3-j} - \phi_j$ и

$$s(a, b) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{n} + b\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi a}{n} + b\right)},$$

$$S(a, b) = \left| \sin\left(\frac{\pi a}{n} + \frac{b}{2}\right) \left| K_1\left(2\gamma r \left| \sin\left(\frac{\pi a}{n} + \frac{b}{2}\right) \right| \right) \right| \right|.$$

Условие инвариантности гамильтониана принимает вид

$$\Phi(r, \phi, n) = \ln \left[r \prod_{\alpha=1}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{\pi \alpha}{n} + \frac{\phi}{2}\right) \right| \right] + K_0\left(2\gamma r \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \right) - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left\{ K_0\left(2\gamma r \left| \sin \frac{\pi \alpha}{n} \right| \right) - K_0\left[2\gamma r \left| \sin\left(\frac{\pi \alpha}{n} + \frac{\phi}{2}\right) \right| \right] \right\} = const. \quad (3.35)$$

В качестве примеров на рис. 14 приведены фазовые портреты — линии равного уровня функции (3.35) — для относительного движения трех и шести хетонов, при условиях существования, соответственно, трех и шести радиальных осей симметрии. При этом области {3} принимают в первом случае вид шестиугольной, а втором — двенадцатиугольной звезды (аналогично тому, как для случая двух хетонов эта область имела форму четырехугольной звезды — рис. 9а). Следует отметить, что в данном случае фазовые кривые построены в осях (x, y) при различных значениях γ (см. подпись к рисунку), и при переходе к координатам $(\gamma x, \gamma y)$ линейный масштаб на рис. 14b увеличится вдвое.

Решения типа {1} по-прежнему представлены движениями, при которых хетоны «соударяются на расстоянии» и затем разбегаются в противоположные стороны. Решения типа {2} характеризуются попарным обменом

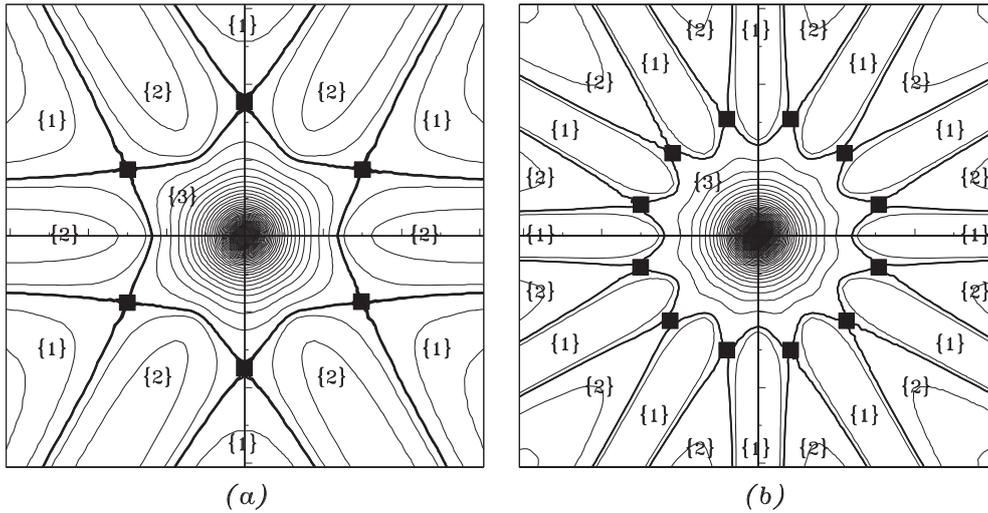


Рис. 14. Фазовые портреты (изолинии гамильтониана) в осях (x, y) системы из трех ($\gamma = 1$) — (a) и шести ($\gamma = 2$) — (b) хетонов, равномерно размещенных на окружности. Обозначения $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$ имеют тот же смысл, что на рис. 9. Квадратными маркерами отмечены положения точек пересечения сепаратрис.

партнерами между хетонами, первоначально двигавшимися вдоль соседних осей симметрии. Примеры движений этих двух типов для $n = 6$ показаны на рис. 15. Временные интервалы для расчетов здесь подобраны таким образом, что на рис. 15a конечные координаты каждого из вихрей совпадают с начальными координатами его партнера, а на рис. 15b представляют свое зеркальное отображение относительно индивидуальной для каждого хетона оси симметрии. Устойчивым решениям типа $\{3\}$ соответствуют вращения вихрей (в антициклоническом направлении в верхнем слое и в циклоническом — в нижнем). При этом вихри в обоих слоях все время располагаются в углах правильных n -угольников с периодически изменяющимися длинами сторон. Длины сторон минимальны в моменты, когда соответствующие n -угольники накладываются один на другой (и мы наблюдаем n хетонов с вертикальными осями), и максимальны — когда вихри образуют правильную $2n$ -угольную структуру (т.е. один из n -угольников развернут относительно другого на угол $\pi/2n$). Угловая скорость вращения каждого из n -угольников, наоборот, принимает максимальное значение в первом случае и минимальное во втором. Однако чисто периодические решения такого типа имеют место только для $n = 2$ (т.е. $N = 4$, когда — при условии нулевой суммарной интенсивности вихрей — система интегрируема); для $n > 2$ можно говорить только о квазипериодичности. Больше того, как будет показано в п. 3.4.2, решения типа $\{3\}$ могут быть и неустойчивыми.

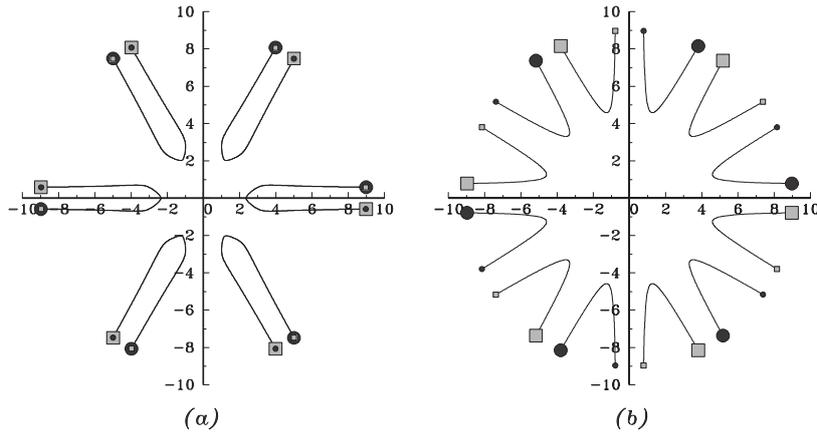


Рис. 15. Траектории движений типов $\{1\}$ — (a) и $\{2\}$ — (b) для системы хетонов с начальными координатами, задаваемыми формулами (3.29) при $n = 6$, $r = 9$, $\phi = \pi/24$ — (a) и $\phi = \pi/18$ — (b). Начальные положения вихрей задаются крупными маркерами (круг — для верхнего слоя и квадрат — для нижнего), конечные положения — мелкими.

Седловым стационарным неустойчивым состояниям системы вихрей на рис. 14 соответствуют точки, помеченные темными квадратиками. Полярные координаты седел находим, приравнявая нулю правые части уравнений (3.33)–(3.34). При этом из (3.33) получаем

$$\phi = \pi/n,$$

а (3.34) сводится к трансцендентному соотношению

$$\frac{1}{2R} = S\left(0, \frac{\pi}{n}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[S(\alpha, 0) + S\left(\alpha, \frac{\pi}{n}\right) \right], \quad (3.36)$$

где $R = \gamma r$. Пусть для каждого фиксированного значения n решение (3.36) обозначается как R_{max}^S , тогда уравнение для R_{min}^S — расстояния от центра до ближайшей точки сепаратрисы — можно получить из условия принадлежности соответствующих изображающих точек одной фазовой кривой, т. е. приравнявая между собой значения функции Φ из (3.32) при $R = R_{max}^S$ и $R = R_{min}^S$. На рис. 16 значения $R_{max}^S(n)$ и $R_{min}^S(n)$ представлены соответственно круглыми и треугольными светлыми маркерами. Интересно отметить, что как R_{max}^S , так и R_{min}^S , являются практически линейными функциями от n . Темные кружки и треугольники задают положения $R_{max}^N(n)$ и $R_{min}^N(n)$ — соответственно максимальное и минимальное расстояния от центра до границ области неустойчивости. Область «регулярный разлет» на этом рисунке относится к решениям типов $\{1\}$ и $\{2\}$, а область «захват» —

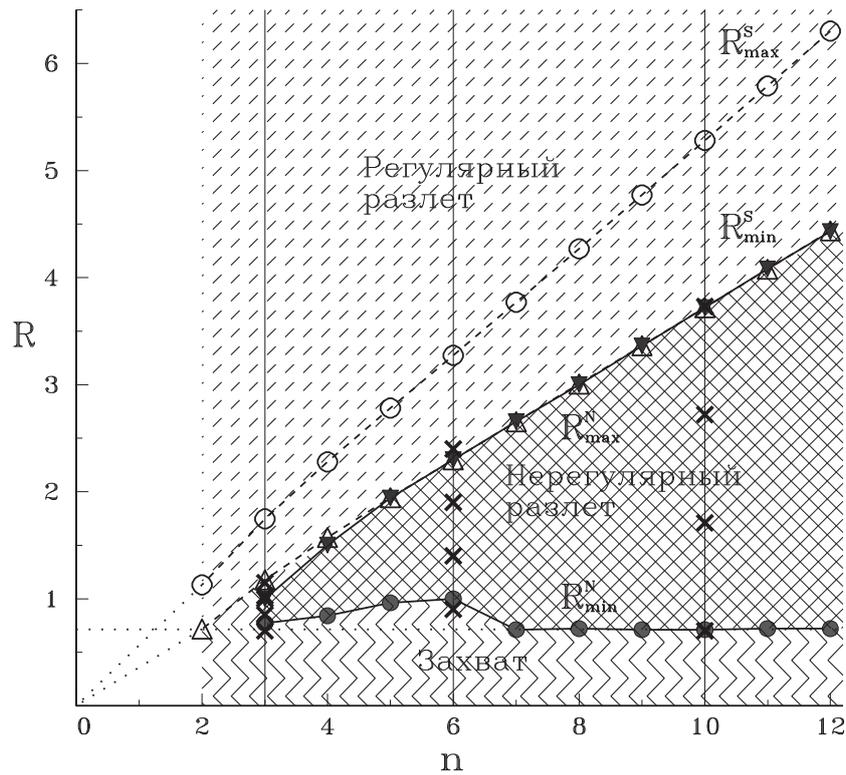


Рис. 16. Диаграмма состояний n -симметричной конфигурации хетонов с первоначально вертикальными осями для $n = 2, 3, \dots, 12$. Пунктирные наклонные линии являются «продолжениями» в начало системы координат воображаемых кривых, проходящих через $R_{min}^S(n)$ и $R_{max}^S(n)$. Положения крестиков соответствуют параметрам расчетов, представленных на рис. 19. Остальные пояснения по рисунку даны в тексте.

к финитным квазиустойчивым решениям типа $\{3\}$. Более подробное обсуждение этого рисунка содержится ниже в п. 3.4.2.

Хетонные аналогии дорожек Кармана [101] (см. рис. 17) дают пример интегрируемой хетонной системы, образованной из бесконечного числа вихрей. Дорожки состоят из двух параллельных рядов вихрей с периодом a . Один из рядов расположен в верхнем слое, второй — в нижнем. Вихри, принадлежащие разным слоям, имеют противоположные знаки. Расстояние между рядами равно b . В антисимметричной дорожке (рис. 17b) вихри из нижнего слоя сдвинуты на половину периода относительно вихрей из верхнего слоя. Возможность точного интегрирования уравнений движения в рассматриваемом случае обусловлена инвариантностью относительно смещения на период вдоль дорожки. Как показано в [101], хетонные дорожки Кармана движутся с постоянной скоростью в направлении оси дорожки. Для моделей равных по толщине слоев скорость симметричной дорожки

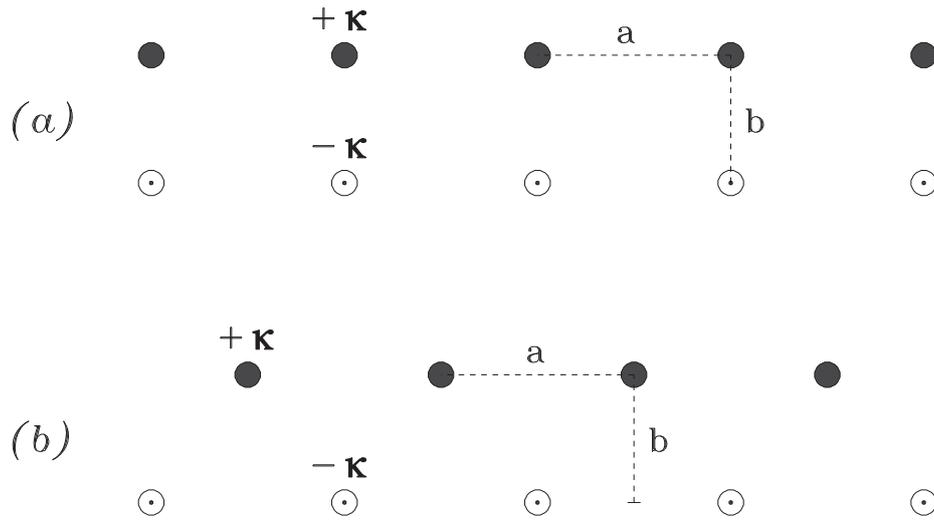


Рис. 17. Схематическое представление геометрии хетонных вихревых дорожек: (а) — симметричная (б) — антисимметричная дорожки. Вихри с интенсивностями $+\kappa$ и $-\kappa$ расположены в разных слоях.

дается выражением

$$u = \frac{\kappa}{4a} \coth \frac{\pi b}{a} - \frac{\kappa \gamma}{4\pi} \left[K_1(\gamma b) + 2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b}{\sqrt{(\alpha a)^2 + b^2}} K_1(\gamma \sqrt{(\alpha a)^2 + b^2}) \right], \quad (3.37)$$

а антисимметричной

$$u = \frac{\kappa}{4a} \tanh \frac{\pi b}{a} - \frac{\kappa \gamma}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2b}{\sqrt{(a/2 + \alpha a)^2 + b^2}} K_1(\gamma \sqrt{(a/2 + \alpha a)^2 + b^2}). \quad (3.38)$$

Дорожки движутся без изменения формы вследствие того факта, что скорость, наводимая в месте расположения каждого из вихрей всеми остальными вихрями, равна скорости перемещения дорожки как целого. Первый член в выражениях (3.37)–(3.38) описывает вклад от баротропного взаимодействия между вихрями, а второй — от бароклинного. Баротропный член доминирует при больших расстояниях между рядами, и скорость дорожек совпадает со скоростью классических дорожек Кармана в этом пределе. При стремлении периода a к бесконечности скорость симметричной дорожки стремится к скорости индивидуального хетона (3.9). Представление о зависимости от параметров асимметрии $k = b/a$, стратификации $\sigma = \gamma a$ и относительных толщин слоев дает рис. 18. Диаграмма состояний, классифицирующая области существования хетонных дорожек Кармана в зависимости от параметра асимметрии k , а также полный разбор предельных случаев приведены в работе [101].

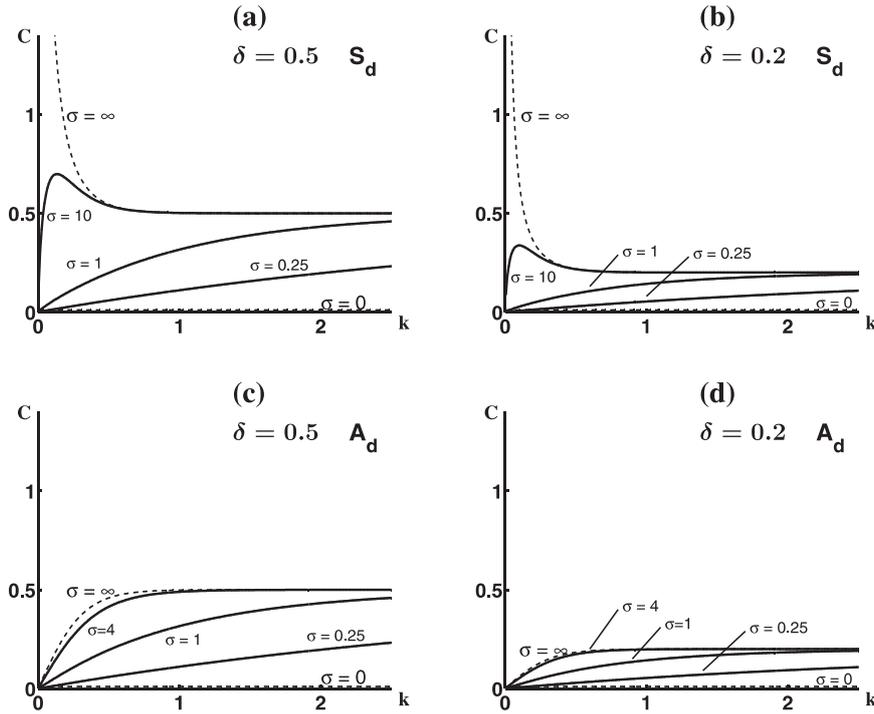


Рис. 18. Скорость u симметричных (S_d) и антисимметричных (A_d) хетонных вихревых дорожек Кармана, нормированная на $\kappa/2a$ ($C = 2au/\kappa$) в зависимости от параметра k при различных значениях параметров $\sigma = \gamma a$ и $\delta = h_1/(h_1 + h_2)$.

В баротропном пределе $\sigma \rightarrow \infty$ условие линейной устойчивости дорожек аналогичны классическим [38]. Экранировка вихрей (конечность σ) повышает устойчивость дорожек. Этот эффект, в приближении эквивалентно-баротропной модели, исследован в [127]. В полной постановке задача устойчивости решений (3.37) и (3.38) не исследована.

Хотя круг задач, допускающих точную интегрируемость, очевидно, не исчерпывается приведенными примерами, он ограничен и не дает полного представления о поведении хетонных систем.

3.4.2. Квазирегулярная и хаотическая динамика хетонов

В случае общего положения системы с числом хетонов $n > 2$ не интегрируемы, так как не имеют достаточного количества интегралов движения (общее число вихрей, формирующих хетоны, $N > 4$). Динамика популяций хетонов носит сложный характер сосуществования регулярных и хаотических режимов [110, 119, 89, 82, 83, 102]. Реализация того или иного режима зависит от параметров задачи и начальных условий. Простейшие примеры неинтегрируемых ситуаций возникают уже при случайном возмущении начальных положений хетонов в рассмотренном выше случае

n -симметричных хетонных конфигураций. Действительно, численные эксперименты показывают, что задание небольших случайных (белый шум) возмущений ε^α ($\max \varepsilon^\alpha \leq 0.01$) координат вихрей

$$R_j^\alpha|_{t=0} = \bar{R} + \varepsilon^\alpha \quad (3.39)$$

приводит к неустойчивости симметричного решения (3.32) на интервале $\bar{R} \in [R_{min}^N, R_{max}^N]$, причем $R_{max}^N \leq R_{min}^S$ (см. на рис. 16 область «нерегулярный разлет»).

Анализ численных экспериментов показывает, что имеют место неустойчивости двух типов:

- При $n \in [3; 5]$ неустойчивость обусловлена бароклинным взаимодействием между вихрями из *разных* слоев (эвивалентно-баротропная подсистема вихрей каждого из слоев устойчива [10]). В этом случае зоны неустойчивости на фазовой плоскости принадлежат области {3} — их внешние границы отстоят от сепаратрис на конечное расстояние — и, таким образом, слой стохастичности, образующийся вблизи точек пересечения сепаратрис, практически не сказывается на поведении системы вихрей.
- С ростом n (при $n \geq 6$) наряду с межслойным взаимодействием все большее значение приобретает баротропная неустойчивость, связанная с внутрислойным взаимодействием между вихрями. На рис. 16 показано, что в этих случаях внешние границы областей неустойчивости принадлежат окружности, вплотную подходящей к точкам сепаратрис с минимальным расстоянием R_{min}^S до центра. Что касается внутренней границы области нерегулярного разлета, то при $n \geq 7$ она выходит на асимптоту (представлена на рисунке горизонтальной пунктирной линией), определяемую значением R_{min}^S для $n = 2$.

Отметим, что факт сосуществования хаотичности и квазиупорядоченности движений в рамках аналогичной постановки задачи для случая $n = 6$ отмечен в [110]. Границы областей неустойчивости, установленные в [110], совпадают с точностью до ε с указанными на рис. 16.

Некоторые результаты расчетов для $n = 3$, $n = 6$ и $n = 10$ приведены на рис. 19. Важно отметить, что, как указывается в перечне особенностей типов неустойчивости, при $n = 3$ движения финитного характера (рис. 19.4.а) наблюдаются при $\bar{R} \in [R_{max}^N; R_{min}^S]$, т. е. за пределами локальной области нерегулярного разлета. Внутри же области неустойчивости движения квазиупорядочены (рис. 19.2.а, 19.3.а). На верхней части рис. 20 изображен

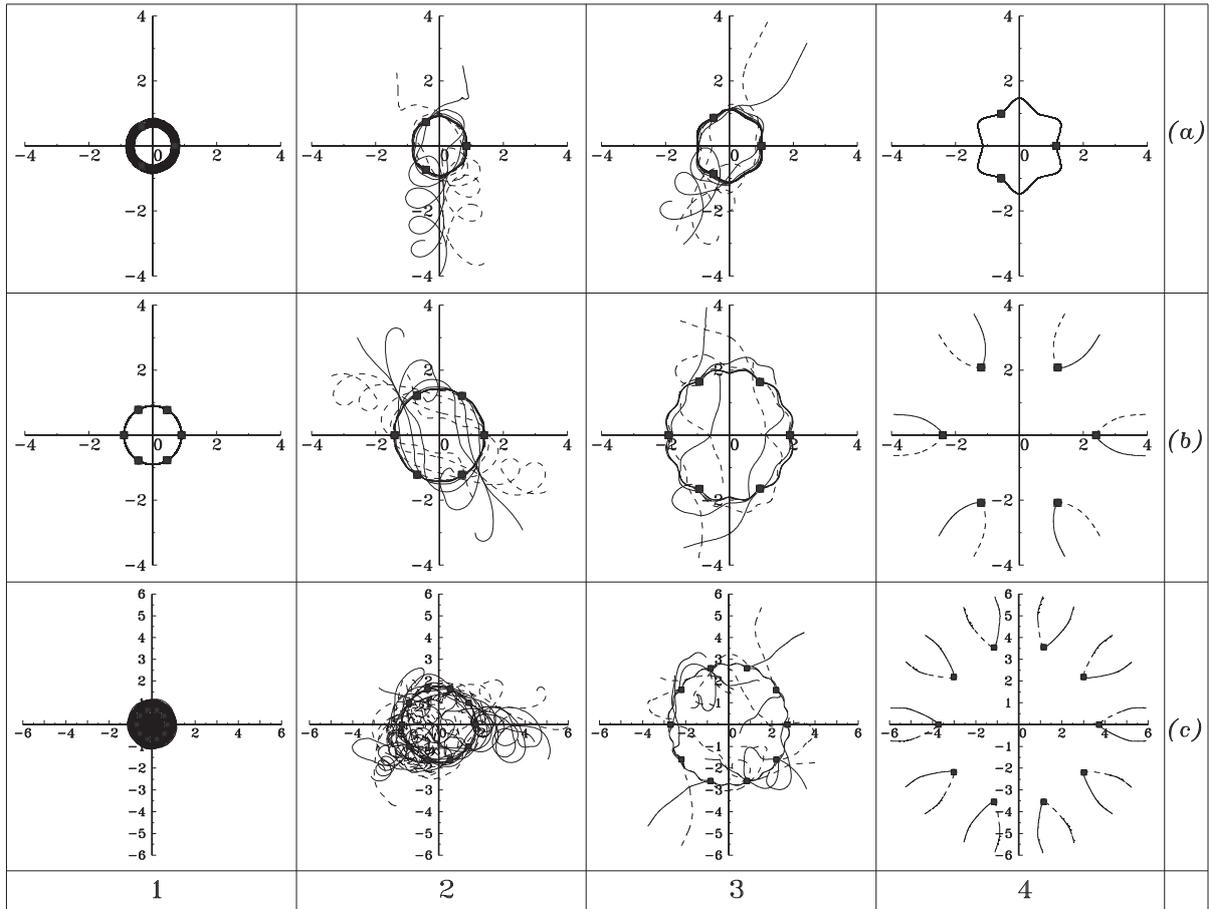


Рис. 19. Траектории движения хетонов с первоначально вертикальными осями, локализованными в окрестностях вершин правильных n -угольников со случайными возмущениями их радиальных координат по формулам (3.39), когда среднее значение их расстояния от центра представлено равенством $\bar{R} = r + \Delta r(i - 1)$, где i - номер столбца рисунка: (a) $n = 3$, $r = 0.7$, $\Delta r = 0.15$; (b) $n = 6$, $r = 0.9$, $\Delta r = 0.5$; (c) $n = 10$, $r = 0.7$, $\Delta r = 1.01$ (этим параметрам отвечают положения крестиков на рис. 16).

участок траекторий вихрей, для второго из этих случаев, на коротком этапе выхода на режим разлета после того, как все вихри уже совершили два полных оборота вдоль замкнутых звездообразных траекторий. Начальный и конечный моменты этого временного интервала обозначены, соответственно, через T_1 и T_2 . Нижняя часть рисунка более детально демонстрирует конфигурации троек вихрей обоих слоев в начальный, промежуточный и конечный моменты. В дальнейшем двухслойная вихревая пара верхней части рисунка будет двигаться практически прямолинейно, а две двухслойные пары из нижней части будут смещаться в противоположном направлении, принимая участие в «чехарде» вихрей.

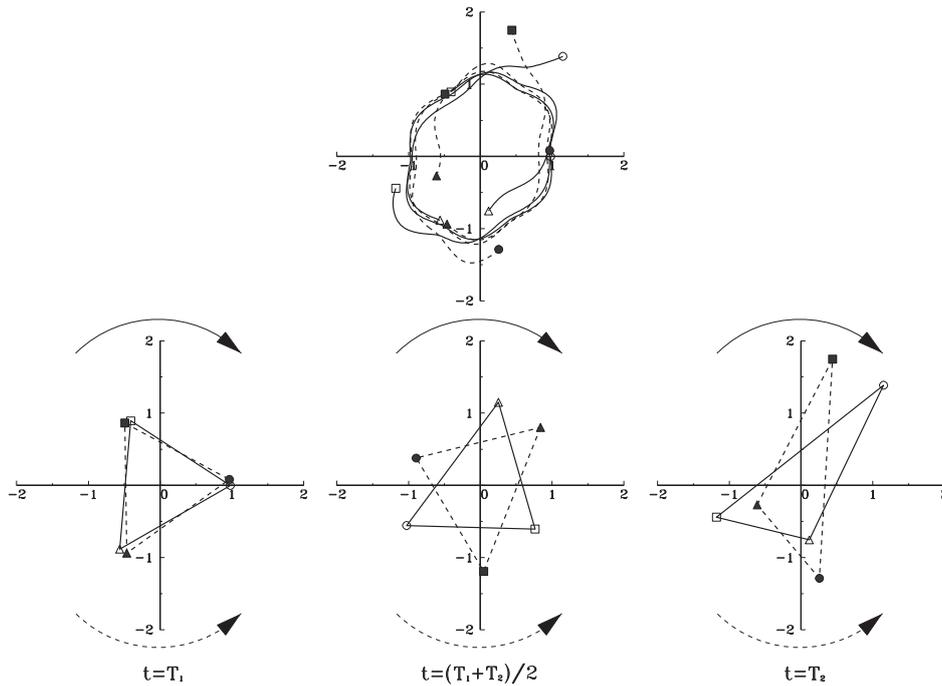


Рис. 20. Сверху: детализация процесса выхода на инфинитный режим системы из трех хетонов по сценарию рис. 19.3.а. Снизу: набор синхронных треугольных конфигураций, построенных на вихрях верхнего (сплошная линия) и нижнего (штриховая линия) слоев. Дуговые стрелки показывают соответствующие направления вращения на этапе, предшествующем разлету вихрей.

В целом, исследование поведения первоначально n -симметричной конфигурации хетонов в области неустойчивости представляет собой пока нерешенную задачу¹¹.

Численные эксперименты [110] с 37 хетонами ($N = 74$), первоначально равномерным образом заполняющими гексагональную область при различных значениях γ , также указывают на возможность формирования как хаотических, так и квазиупорядоченных (по крайней мере на начальной стадии эволюции) двухслойных структур.

Легг и Маршалл [119] представили результаты исследований эволюции популяции хетонов, случайно распределенных в круге или внутри эллипса, Данилов и др. [82, 83] — внутри полосы фиксированной ширины; Доронина и Гряник с соавторами [89, 102] — на окружности.

Подчеркнем, что в поведении достаточно сложных вихревых струк-

¹¹В пределе $\gamma \rightarrow 0$, т. е. $\Delta\rho \rightarrow \infty$, вихри, расположенные в разных слоях, практически не взаимодействуют, и мы имеем классическую задачу Томсона [38, 35, 40, 10, 63, 132, 117] об эволюции независимых друг от друга n -угольных вихревых структур — антициклонической в верхнем слое и циклонической в нижнем.

тур хетонного типа (по крайней мере при $N \geq 4$), могут наблюдаться как финитные, так и инфинитные типы движений. Во втором случае эффектом взаимодействия становится разбегание хетонов с наклонными осями. Отдельный хетон, как показано в разделе 3.1, движется прямолинейно и с постоянной скоростью. Оценки и результаты расчетов показывают, что у разбегающихся в разные стороны нескольких хетонов с большой степенью точности скорость также является константой (в этом случае взаимодействие между различными хетонами в основном определяет лишь направление их разлета). Таким образом, при регулярном поведении системы вихрей линейный (по времени) закон распространения бароклинных вихрей может быть принят с очевидностью. Оказывается, что в стохастическом режиме этот закон также имеет место. Подтверждение данному факту получено в [82, 83, 89, 102].

4. Распределенные хетоны

Рассмотренная выше модель дискретных вихрей в высшей степени идеализирована. Вихри всегда имеют конечный горизонтальный масштаб, тем более — вихри геофизической природы. Следующим приближением к реальности может служить уже обсуждавшаяся в разделе 2 модель вихревых пятен — конечных областей с постоянным значением завихренности. Распределенные вихри имеют два принципиальных отличия от дискретных — это свойство неустойчивости (даже для одиночного хетона) [34, 62, 64, 65, 113, 136, 107, 144] и тенденция к слиянию достаточно близко расположенных друг другу вихревых пятен одного знака [52, 76, 112, 130, 144, 151, 153].

Общие соображения подсказывают, что если несколько вихрей конечных размеров разнесены далеко, то их взаимодействие должно мало отличаться от взаимодействия эквивалентных им дискретных вихрей. Анализ многочисленных конкретных расчетов показывает, что так оно и есть. Больше того, зачастую оказывается, что в относительно широких интервалах внешних параметров поведение достаточно близко друг к другу расположенных вихрей с конечным ядром также вполне удовлетворительно описывается в рамках простой сингулярной модели. В действительности, общего рецепта выбора в вопросе о применимости дискретного подхода к различным задачам не существует, но в каждом конкретном случае он может быть подобран с помощью численных экспериментов, как, в частности, проделано в [144, 146]. Широко известен метод дискретных вихрей [1], дающий пригодные для приложений результаты. В рамках такого под-

хода моделируется, в частности, динамика изолированного вихря конечных размеров за счет оптимальным образом подобранного набора заданного числа дискретных вихрей. Мы будем использовать экономичный и, на наш взгляд, более наглядный, метод контурной динамики. С помощью МКД в [46, 47, 144, 145, 146] рассмотрен ряд задач о взаимодействии хетонов. Здесь мы кратко остановимся лишь на двух задачах — об устойчивости осесимметричного хетона (в контексте обсуждавшейся выше проблемы разбегания двухслойных вихрей) и о взаимодействии двух распределенных хетонов, первоначально имеющих вертикальные оси.

4.1. Эволюция единичного хетона

Рассмотрим распределенный хетон, имеющий в невозмущенном состоянии осесимметричный вид: двухслойная цилиндрическая структура из круговых вихревых пятен единичного радиуса, расположенных строго один над другим. Такое состояние является стационарным решением уравнений сохранения потенциального вихря (2.1), и правомерен вопрос об устойчивости этого решения.

4.1.1. О линейном анализе устойчивости хетона

Пусть жидкие линии, совпадающие с внешними границами вихрей, описываются параметрическими соотношениями

$$r = f_j(\theta, t; \alpha), \quad \alpha = f_j(\theta, 0; \alpha), \quad j = 1, 2, \quad (4.1)$$

где параметр α характеризует радиальную лагранжеву координату точек, принадлежащих контурам, а θ - полярный угол. Представим

$$f_j(\theta, t; 1) = 1 + \varepsilon_j \exp[i m (\theta - \delta_m t)], \quad |\varepsilon_j| \ll 1, \quad j = 1, 2, \quad m \geq 1, \quad (4.2)$$

где m — номер азимутальной моды. Очевидно, для неустойчивых мод должно выполняться условие $Im \delta_m > 0$.

Алгоритм исследования устойчивости изложен в [34]. По существу, задача сводится к анализу решений системы линейных алгебраических уравнений относительно ε_j .

На рис. 21 изображены кривые нейтральной устойчивости неустойчивых мод на плоскости (h_1, γ) и показаны величины инкрементов роста этих мод при $h_1 = h_2 = 1/2$ (приведенные ниже расчеты проведены для этого случая). На рис. 21а области неустойчивости каждой из указанных мод отвечает часть плоскости, расположенная выше соответствующей нейтральной кривой. Видно, что неустойчивыми могут быть моды с $m \geq 2$,

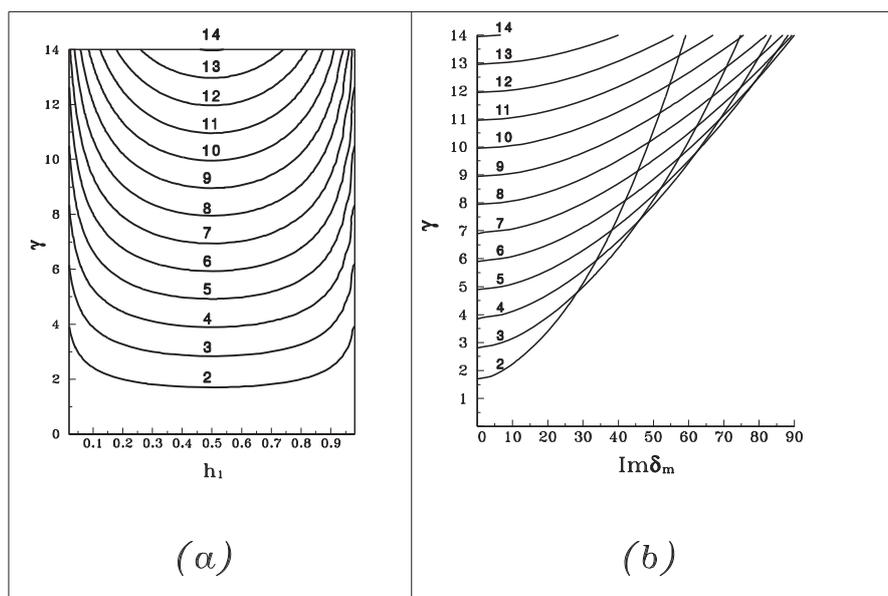


Рис. 21. Кривые нейтральной устойчивости различных мод — (a) и инкременты их роста для случая равных толщин слоев — (b).

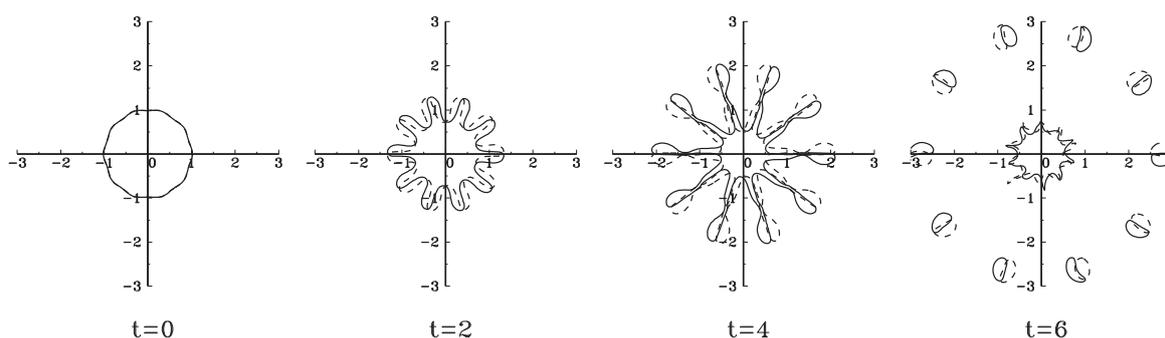


Рис. 22. Эволюция неустойчивого хетона с регулярными начальными возмущениями контуров при $\gamma = 14$. Сплошной линией изображены контуры вихревых пятен верхнего слоя, штриховой — нижнего слоя.

причем минимальный запас устойчивости имеет случай равных по толщине слоев. С ростом γ число неустойчивых мод растет (сравните с примером в разделе 3.4, где при увеличении γ у дискретных хетонов, равномерно распределенных на окружности, наблюдался переход от финитных движений к инфинитным, что аналогично развалу неустойчивой вихревой структуры).

4.1.2. Моделирование нелинейного этапа неустойчивости хетона

Расчеты, проведенные в [34, 144] показывают, что линейный анализ устойчивости правильно предсказывает начальный этап развития неустой-

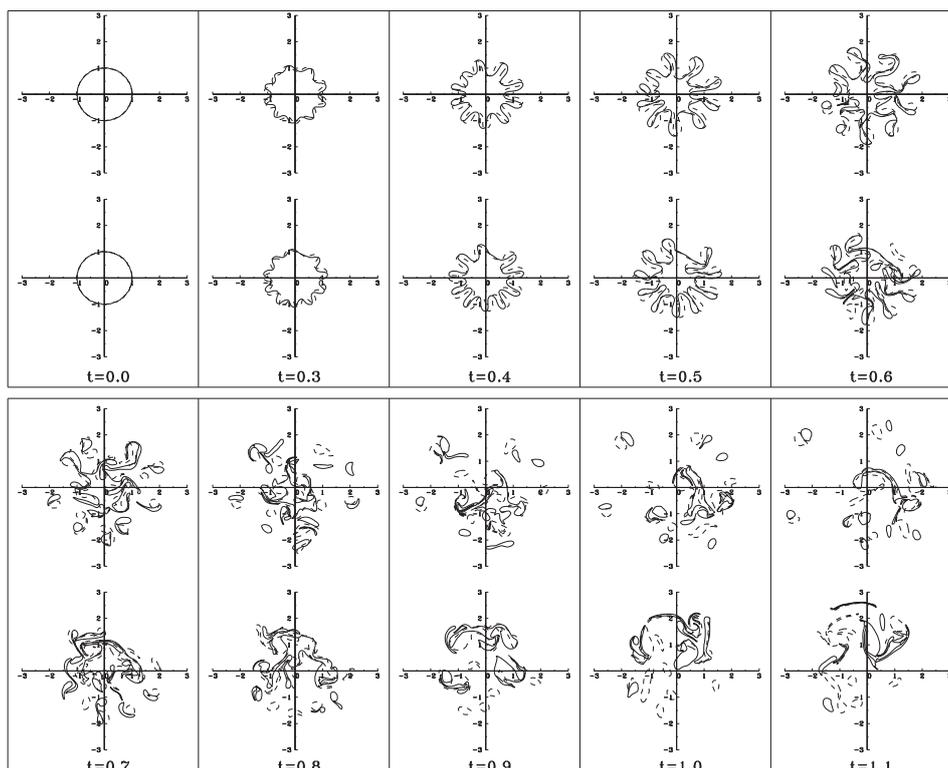


Рис. 23. Эволюция неустойчивого хетона со случайными начальными возмущениями контуров при $\gamma = 14$. В верхней и нижней строках обеих рамок изображены синхронные конфигурации вихревых пятен верхнего и нижнего слоев соответственно.

чивости, а именно, определяемые им максимально неустойчивые моды, как правило, и реализуются.

Если исследование эволюции неустойчивого вихря с помощью МКД вести из невозмущенного состояния вихрей, переход к стадии его разрушения все равно рано или поздно происходит за счет так называемого «машинного шума», обусловленного неизбежными погрешностями любого численного счета. Переход на нелинейную стадию неустойчивости можно ускорить, задавая небольшие (регулярные или случайные) возмущения контуров вихрей. Однако, если у нескольких неустойчивых мод инкременты роста близки, то задаваемые искусственно начальные возмущения могут вызвать развитие неустойчивости не у самой неустойчивой моды. Такой случай иллюстрируется на рис. 22, где показан развал хетона для случая, когда теоретически максимально неустойчивой является шестая мода, но в начальный момент времени на его контуре заданы небольшие возмущения (с амплитудой 0.02), соответствующие $m = 10$, что и обусловило формирование десятой моды. Под каждым из фрагментов рисунка указано соответ-

ствующее ему время (единице безразмерного времени отвечает половина ротационного периода жидкой частицы, принадлежащей границе невозмущенного вихря). На рис. 23 дан пример эволюции неустойчивого хетона при $\gamma = 14$ при начальных условиях, когда на каждом из контуров задавались 120 равномерно распределенных маркерных точек, и эти жидкие частицы подвергались случайным смещениям в радиальном направлении с амплитудой 0.05. Развал, естественно, проходит в существенно несимметричном режиме. На этом рисунке, во избежание нагромождения, конфигурации вихревых пятен верхнего и нижнего слоев искусственно разнесены.

4.2. О взаимодействии двух распределенных хетонов

Различные случаи взаимодействия двух распределенных хетонов с наклонными осями при их первоначальном расположении, симметричном относительно одной из осей, изучались в [46, 47, 144, 145]. Однако для демонстрации основных различий с моделью дискретных вихрей рассмотрим частный случай, касающийся хетонов с вертикальными осями.

Пусть вертикальные оси двух двухслойных вихрей, каждый из которых, в свою очередь, состоит из двух круговых вихревых пятен (верхнего и нижнего слоев) единичного радиуса, разнесены на расстояние b . Диаграмма их возможных состояний в указанной части плоскости параметров $(\gamma, b/2)$ представлена на рис. 24. Здесь штриховой линией отмечена граница, определяемая решением уравнения (3.27) и разделяющая данную плоскость на части с финитным (слева) и инфинитным (справа) поведением дискретных вихрей. Как видно, эта линия вполне удовлетворительно отвечает и случаю распределенных вихрей между областями S_3 и S_1 . Важно отметить, что подобный эффект получен и в [151], где расчеты велись с помощью разностного псевдо-спектрального кода и с учетом диссипации (бигармонического трения)¹². Однако ясно, что взаимодействие распределенных вихрей значительно сложнее и имеет множество специфических отличий. Приведем только три примера, относящиеся, соответственно, к типам S_2 , S_1 и U_1 , которым на диаграмме отвечают круглые маркеры (здесь расстояние между центрами вихревых пятен фиксировано, а параметр стратификации γ принимает различные значения).

На рис. 25 демонстрируется эволюция конфигурации в случае, когда вихревые пятна в обоих слоях сливаются, образуя вихри квазиэллиптиче-

¹²Легра и Дритчел [121], осуществившие сравнение результатов расчетов псевдо-спектральным методом и с помощью МКД, отмечают качественное их сходство. Вместе с тем, авторы [121] отмечают, что МКД является более удобным при изучении процессов формирования вихревых нитей, слияния вихрей и их разделения.

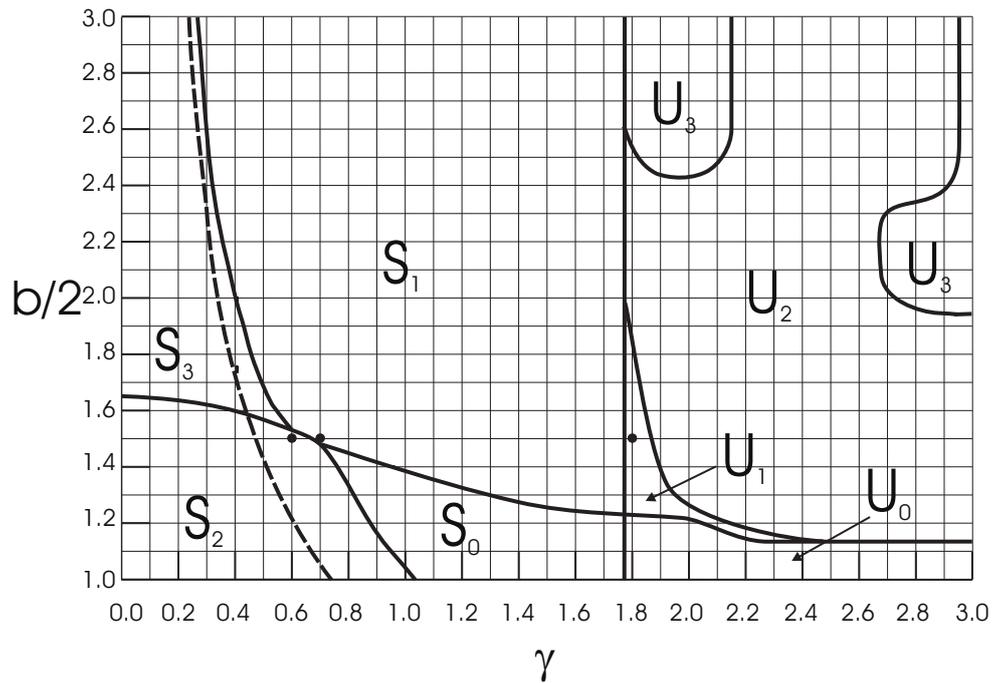


Рис. 24. Диаграмма возможных состояний двух распределенных хетонов, состоящих из круговых вихревых пятен единичного радиуса и первоначально имеющих вертикальные оси, разнесенные на расстояние b в прямоугольной области ($\gamma \in (0; 3]$; $b/2 \in [1; 3]$). Обозначения для подобластей: S_1 — разлет хетонов в противоположные стороны вдоль прямой, проходящей через их центры в начальный момент времени (аналог движений типа {2} для дискретных вихрей); S_0 — то же самое, что в S_1 , но после временного слияния вихревых пятен в слоях и последующего их разделения; S_2 — слияние первоначально круговых пятен в вихревые структуры квазиэллиптической формы, вращающиеся в противоположные стороны; S_3 — послонное вращение вихревых пятен в противоположные стороны (аналог движений типа {3} для дискретных вихрей); U_0 — слияние хетонов и последующее их разделение на более чем два разбегающихся хетона; U_1 — разбегание двух хетонов, сопровождающееся их развалом и формированием четырех новых хетонов; U_2 — развал хетонов на некомпенсированные двухслойные вихри, последующее слияние вихревых пятен и повторное формирование хетонов; U_3 — развал хетонов на разбегающиеся двухслойные вихри без последующего слияния.

ской формы и совершая при этом вращения в противоположные стороны. Отметим, что на временном интервале от 2 до 5 единиц безразмерного времени система практически не эволюционирует, поскольку центр каждого из вихрей находится в окрестности неподвижной седловой точки (точки торможения) — соответствующий маркер на рис. 24 расположен очень близко к границе между областями финитных и инфинитных движений.

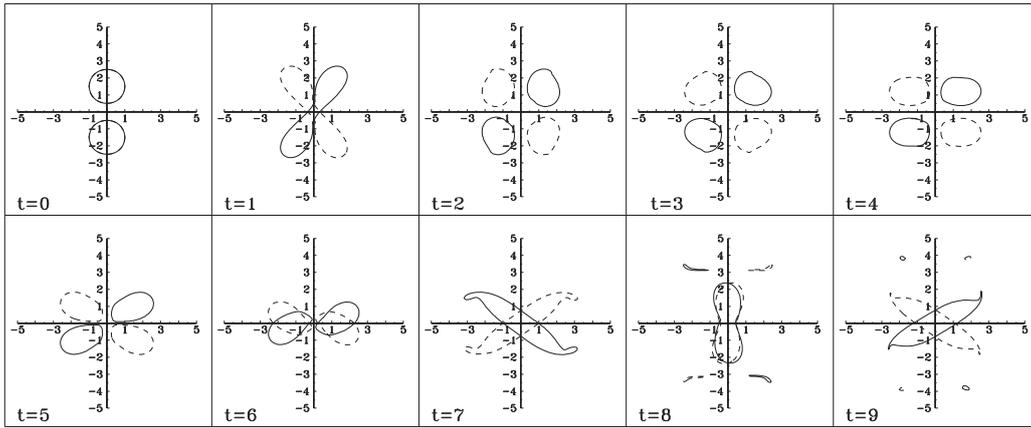


Рис. 25. Пример формирования вихревой структуры типа S_2 ($\gamma = 0.6; b = 1.5$).

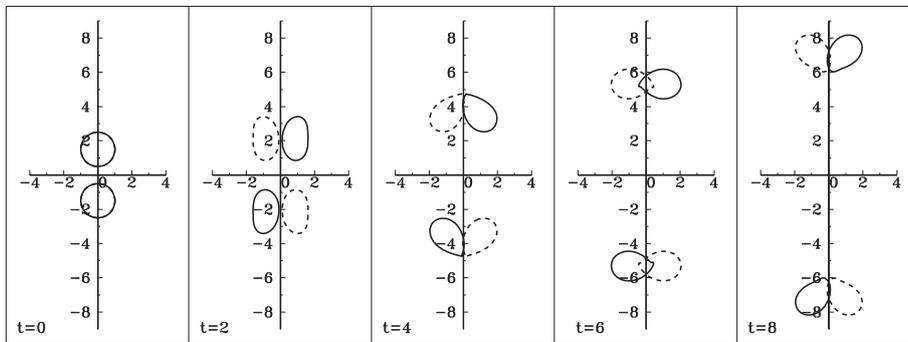


Рис. 26. Пример формирования вихревой структуры типа S_1 ($\gamma = 0.7; b = 1.5$).

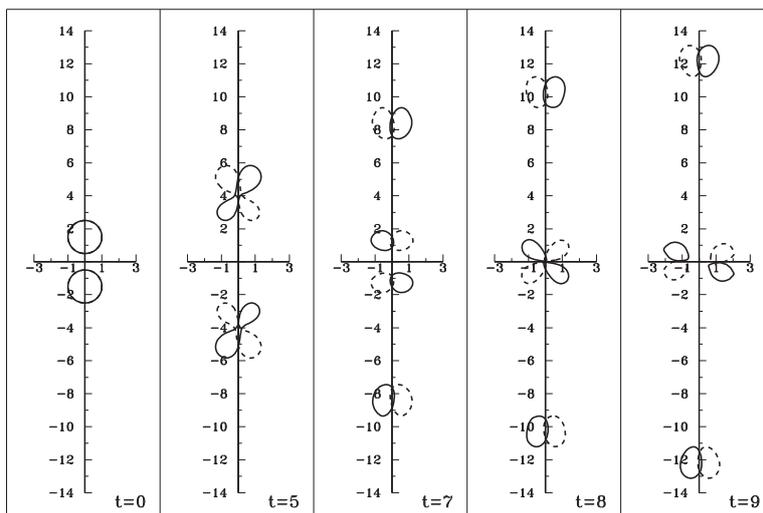


Рис. 27. Пример формирования вихревой структуры типа U_1 ($\gamma = 1.8; b = 1.5$).

Рис. 26 иллюстрирует пример формирования хетонов с наклонными осями и их последующего разбегания в противоположные стороны. Факт, что незначительные отличия параметра γ в этом и предыдущем экспериментах приводят к качественно различным результатам, говорит о «жестком» характере решений соответствующей системы уравнений.

Интересная картина взаимодействия хетонов в условиях их неустойчивости показана на рис. 27 для случая относительно слабой стратификации (или малых значений радиуса деформации). На начальном этапе хетоны начинают разбегаться, но, в то же время, каждый из них разваливается на две двухслойные пары, такие, что одна из них продолжает двигаться в первоначальном направлении, а вторая — в обратном. Далее, в каждом из слоев происходит кратковременное слияние вихревых пятен хетонов, участвовавших во встречном движении, а затем — их разделение с последующим разбеганием новых двухслойных пар в нормальном направлении. Если, не вдаваясь в детали промежуточных процессов, сравнивать результирующие эффекты взаимодействия двух хетонов на этом и предыдущем рисунках, то получается, что в первом случае формируются две разлетающиеся двухслойные пары, а во втором — четыре.

Приведенные примеры, отражая лишь некоторые частные особенности процесса взаимодействия распределенных вихрей, демонстрируют, на наш взгляд, их широкое разнообразие. Более подробно различные типы взаимодействия распределенных хетонов обсуждаются в [46, 47, 144, 151].

5. Другие хетонные теории и область применимости двухслойной модели с равными толщинами слоев

Подавляющая часть результатов данной статьи относится к случаю равных h_1 и h_2 . Роль неравнозначности толщин слоев двухслойной жидкости (и, в частности, для хетонов, когда $h_1 \sum_{\alpha=1}^{N_1} \Pi_1^\alpha + h_2 \sum_{\alpha=1}^{N_2} \Pi_2^\alpha = 0$) изучена в работах [7, 34, 83, 156]. Одним из важных эффектов неравнозначности слоев является повышение степени устойчивости одиночного осесимметричного хетона ($N_1 = N_2 = 1$) с вертикальной осью. Так, на рис. 21а видно, что хетон с $h_1 = h_2$ для всех неустойчивых мод обладает минимальным запасом устойчивости.

Динамические же последствия условия $h_1 \neq h_2$ аналогичны возникающим в многослойных и непрерывно стратифицированных моделях, где они проявляются наиболее выразительно, и мы переходим непосредственно к их рассмотрению.

5.1. Многослойная модель

Динамика дискретных вихрей в многослойных моделях, для которых потенциальная завихренность имеет вид (2.11) с $j = 1, 2, \dots, M$ (M — число слоев), описывается гамильтоновыми уравнениями вида (2.16) с гамильтонианом [14, 15, 16, 124]

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ m=1}}^M \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^{N_j, N_m} h_j \left[U_{j1} U_{1m}^{-1} \kappa_j^\alpha \kappa_m^\beta \ln \gamma_* r_{jm}^{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^{M-1} U_{jk} U_{km}^{-1} \kappa_j^\alpha \kappa_m^\beta K_0(\gamma_k r_{jm}^{\alpha\beta}) \right]. \quad (5.1)$$

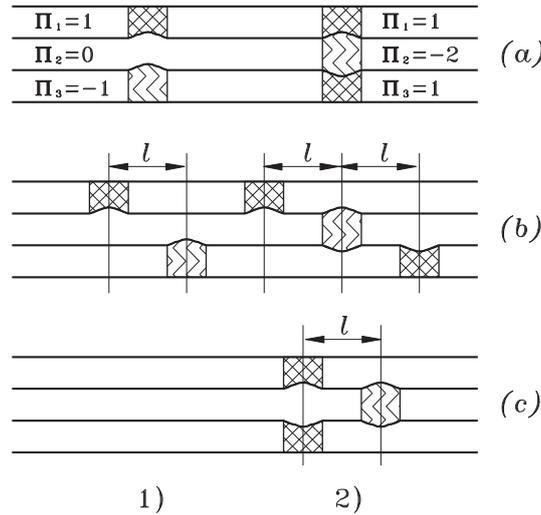


Рис. 28. Схематическое представление распределенного хетона с вертикальной осью — (a), с наклонной осью — (b) и с дугообразной осью — (c) в случае трехслойной жидкости с равными толщинами слоев: 1) — 1-модальный хетон; 2) — 2-модальный хетон.

Здесь γ_k — собственные значения оператора потенциального вихря, такие что $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{M-1}$, а U_{jm} — матрица размерности $M \times M$, составленная из соответствующих собственных векторов. Структура течения, индуцируемого вихрями, характеризуется несколькими масштабами Россби ($L_k = 1/\gamma_k$). Потенциальный вихрь может быть распределен либо однородно по толщине каждого из слоев, либо в пределах нескольких слоев.

В многослойной модели существует иерархия хетонов [14, 16]. Интегральная завихренность каждого из хетонов равна нулю. Распределение завихренности по вертикали повторяет структуру бароклиных мод оператора потенциального вихря. Поэтому такие бароклинные вихревые структуры естественно называть m -модальными хетонами ($m = 1, 2, \dots, M - 1$)¹³. В случае $M = 2$, соответствующем двухслойной модели, присутствует одна бароклиная мода, т. е. просто хетон. При $M > 2$ только первый из m -модальных хетонов наиболее близок к двухслойному (рис. 28). Однако и в этом случае структура поля скорости, индуцируемая хетоном, а, соответственно, и скорость его распространения, зависит уже не только от первого бароклиного радиуса Россби. Если все вихри расположены на одной вертикали, мы по-прежнему будем говорить, что такой m -модальный хетон имеет *вертикальную ось*, если же вихри разнесены на некоторое расстояние, то — *дугообразную ось*.

Например, в трехслойной модели с равными толщинами слоев $h_1 = h_2 = h_3 = h$ и $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = \Delta\rho$ имеем $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \sqrt{F} = \gamma, \gamma_3 = \sqrt{3F} = \gamma\sqrt{3}$, где $F = \rho_*\Omega^2/gh\Delta\rho$. Если расстояние между вихрями равно l , то вводя безразмерное расстояние $L = l\sqrt{F} = l\gamma$, находим, что скорость распространения 1-модального хетона с $\kappa_1^1 = -\kappa_3^1 = \kappa, \kappa_2^1 = 0$ (рис. 28.1.b)¹⁴ с ненулевым импульсом и нулевым моментом импульса равна

$$v = \frac{\gamma\kappa}{3\pi L} \left[1 - \sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) \right], \quad (5.2)$$

(ср. с (3.9)).

2-модальный хетон с *дугообразной осью*, образованный из вихрей с интенсивностями $\kappa_1^1 = \kappa_3^1 = \kappa, \kappa_2^1 = -2\kappa$ (см. рис. 28.2.c), движется со скоростью

$$v = \frac{\gamma\kappa}{6\pi L} \left[1 - \frac{3L}{2}K_1(L) + \frac{\sqrt{3}L}{2}K_1(\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.3)$$

Сравнение (5.2) и (5.3) показывает, что с ростом m скорость m -модального хетона уменьшается из-за возрастания степени локализации по горизонтали.

Если же 2-модальный хетон имеет нулевой импульс (рис. 28.2.b), то он не имеет поступательного движения, и угловая скорость его вращения

¹³По нашему мнению, более удачным был бы термин *модон*, использовавшийся по отношению к таким вихрям в [14, 48]. Однако в океанологической литературе термин *модон* уже закреплен за распределенными дипольными вихревыми структурами [148]).

¹⁴В данном случае речь идет о дискретных вихрях, и при ссылке на рисунок имеется ввиду расположение центров вихревых пятен.

равна

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) + \frac{3}{2}LK_1(2L) - \frac{\sqrt{3}}{2}LK_1(2\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.4)$$

Отметим, что вихревая структура (5.4) объединяет в себе свойства *хетона* (нулевая суммарная интенсивность) и аналога *обычной (двухъярусной) карусели*. Поэтому данную структуру естественно назвать *трехъярусной каруселью*.

Приведем еще несколько примеров решений, описывающих равномерно вращающиеся вихревые структуры в трехслойной жидкости:

- *Триполь*, локализованный в верхнем ($\kappa_1^1 = -2\kappa$, $\kappa_1^2 = \kappa_1^3 = \kappa$) либо в нижнем ($\kappa_3^1 = -2\kappa$, $\kappa_3^2 = \kappa_3^3 = \kappa$) слое, периферийные вихри которого вращаются с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} + 3LK_1(L) + \sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) - \frac{3}{2}LK_1(2L) - \frac{\sqrt{3}}{2}LK_1(2\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.5)$$

- *Триполь*, локализованный в среднем слое ($\kappa_2^1 = -2\kappa$, $\kappa_2^2 = \kappa_2^3 = \kappa$), с угловой скоростью вращения

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) - 2\sqrt{3}LK_1(2\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.6)$$

- Симметричная *карусель*, образованная из вихрей с интенсивностями $\kappa_1^1 = \kappa_1^2 = \kappa$ в верхнем слое (либо $\kappa_3^1 = \kappa_3^2 = \kappa$ в нижнем слое) и центрального вихря $\kappa_2^1 = -2\kappa$ в среднем. Угловая скорость вращения равна

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}L \left(K_1(\sqrt{3}L) + K_1(2\sqrt{3}L) \right) \right]. \quad (5.7)$$

- Симметричная *обратная карусель*, образованная из двух вихрей среднего слоя $\kappa_2^1 = \kappa_2^2 = \kappa$ и одного вихря верхнего $\kappa_1^1 = -2\kappa$ (либо

нижнего $\kappa_3^1 = -2\kappa$) слоя. В этом случае угловая скорость вращения есть

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) - \frac{3}{2}LK_1(2L) - \frac{\sqrt{3}}{2}LK_1(2\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.8)$$

- Симметричная *карусель*, образованная из вихря $\kappa_1^1 = -2\kappa$ верхнего слоя (либо $\kappa_3^1 = -2\kappa$ нижнего слоя) и двух вихрей с интенсивностями $\kappa_3^1 = \kappa_3^2 = \kappa$ в нижнем слое (либо, во втором случае, $\kappa_1^1 = \kappa_1^2 = \kappa$ — двух вихрей в верхнем слое). Угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{6\pi L^2} \left[\frac{3}{2} - 3LK_1(L) + \sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) + \frac{3}{2}LK_1(2L) - \frac{\sqrt{3}}{2}LK_1(2\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.9)$$

- Вихревая структура с наклонной осью, дополняющая (5.2), для которой $\kappa_1^1 = \kappa_3^1 = \kappa$, $\kappa_2^1 = 0$, и определяющая *волчок* с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{3\pi L^2} \left[1 - \frac{3L}{2}K_1(L) + \frac{\sqrt{3}L}{2}K_1(\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.10)$$

Укажем также наличие *хетонных* немодальных структур с наклонной осью, локализованных либо в двух верхних слоях ($\kappa_1^1 = -\kappa_2^1 = \kappa$, $\kappa_3^1 = 0$), либо в двух нижних слоях ($\kappa_3^1 = -\kappa_2^1 = \kappa$, $\kappa_1^1 = 0$), перемещающихся со скоростью

$$v = \frac{\gamma \kappa}{6\pi L} \left[1 - \sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) \right] \quad (5.11)$$

и соответствующих им немодальных структур типа *волчок* ($\kappa_1^1 = \kappa_2^1 = \kappa$, $\kappa_3^1 = 0$ и $\kappa_3^1 = \kappa_2^1 = \kappa$, $\kappa_1^1 = 0$), вращающихся с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\gamma^2 \kappa}{3\pi L^2} \left[1 - \sqrt{3}LK_1(\sqrt{3}L) \right]. \quad (5.12)$$

Свойства хетонов (5.11) изучались в [16, 85].

Исследования, выполненные в [14], показали, что взаимодействие друг с другом 1-модальных хетонов (рис. 28а, слева) аналогично взаимодействию хетонов в двухслойной модели, см. рис. 9 и 10. При взаимодействии

2-модальных хетонов (рис. 28а, справа) траектории типа $\{2\}$ становятся несимметричными относительно оси y из-за возникающей асимметрии в межслойном взаимодействии. Однако асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) формируется 2-модальный хетон с дугообразной осью, см. рис. 28с и (5.3). Такой хетон представляет собой простейший пример квазистационарного вихревого кластера, если центры вихрей верхнего и нижнего слоев смещены друг относительно друга на небольшое расстояние a . При $a \ll l$ взаимодействие вихрей верхнего и нижнего слоев приводит к их взаимному вращению, т. е. к образованию вихревого волчка, взаимодействие которого с вихрем противоположного знака в среднем слое приводит к перемещению всей системы вихрей как целого — хетонного кластера. Хетонные кластеры — типичные вихревые структуры в многослойных моделях [14, 16].

Возможность существования как регулярного, так и хаотического поведения системы из четырех дискретных вихрей отмечалась Маршаллом [124] на примере среды с четырьмя слоями равной толщины. В [124] также проведено исследование эффектов стратификации и конечности вихревого ядра в зарождении хаотичности для случаев четырех и более слоев.

Динамика *вихревых пятен* в рамках трехслойной МКД-модели изучалась в [48, 49, 143], где проведено исследование устойчивости осесимметричных трехслойных (и, в частности, модальных) вихревых структур и показано удовлетворительное соответствие между численными расчетами и экспериментом [142]. Показано также, что возмущения верхней и нижней поверхностей раздела между слоями (при характерном для океана соотношении $\Delta\rho_1 \gg \Delta\rho_2$, где $\Delta\rho_1$ задает скачок плотности между верхним и средним слоями, а $\Delta\rho_2$ — между средним и нижним) приводят, соответственно, к формированию неустойчивости низких и высоких неустойчивых мод, что подтверждает аналогичное утверждение, полученное в [141] при анализе устойчивости трехслойного потока в канале.

Задача об устойчивости и динамике распределенных трехслойных модон (вихрей с дипольной баротропной и осесимметричной бароклиной компонентами) на β -плоскости рассмотрена в [115].

5.2. Модель непрерывно стратифицированной жидкости

В непрерывно стратифицированной жидкости адиабатические квази-геострофические течения описываются уравнением эволюции потенциального вихря $\Pi(x, y, z, t)$ [27, 44]

$$\frac{D\Pi}{Dt} = 0, \quad (5.13)$$

$$\Pi = \Delta\Psi + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f^2}{\tilde{N}^2} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right], \quad (5.14)$$

где Ψ — функция тока, $f = 2\Omega$ — параметр Кориолиса и \tilde{N} — частота Брента-Вяйсяля.

Горизонтальная $\mathbf{u} = (u, v)$ и вертикальная w скорости, отклонения p давления от равновесного гидростатического и плотность ρ связаны с функцией тока уравнениями

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (5.15)$$

$$w = \frac{f}{N^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \left(\Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) \right], \quad (5.16)$$

$$p = f\rho_0\Psi, \quad (5.17)$$

$$\rho = \frac{f\rho_0}{g} \frac{\partial\Psi}{\partial z}. \quad (5.18)$$

В этом случае потенциальная завихренность задается локализованной по трем координатам

$$\Pi = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}) \delta(y - y_{\alpha}) \delta(z - z_{\alpha}), \quad (5.19)$$

где Γ_{α} — интенсивность, а $x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}$ — координаты вихря с номером α , что отличает непрерывно стратифицированные модели от многослойных, где потенциальная завихренность предполагается распределенной однородно по толщине слоя.

В однородно стратифицированной жидкости с горизонтальными границами в приближении твердой крышки $w = 0$ при $z = 0$ и $z = H$, описываемой частотой Брента-Вяйсяля \tilde{N} и толщиной H , течение, индуцируемое трехмерными точечными аномалиями потенциальной завихренности (5.19), описывается функцией тока

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} G(x, y, z; x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}). \quad (5.20)$$

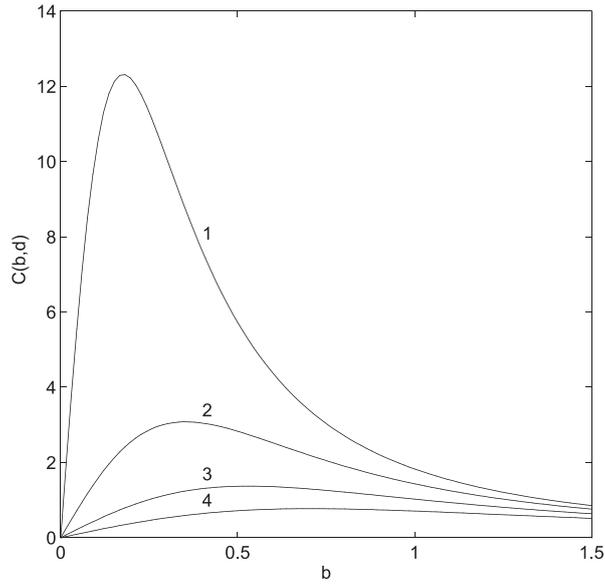


Рис. 29. Скорость индивидуального трехмерного хетона $C(b, d)$, как функция горизонтального расстояния между вихрями b , при вертикальных расстояниях 1) $d = 0.25$, 2) $d = 0.5$, 3) $d = 0.75$, 4) $d = 1$.

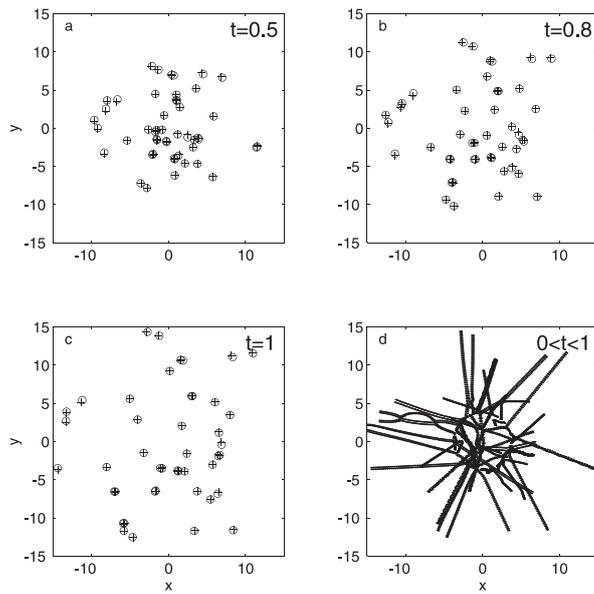


Рис. 30. Результаты численных экспериментов по вырождению температурной аномалии, представленные распределением хетонов в различные моменты времени (a)-(c). Траектории хетонов за фиксированный интервал времени (d).

Функция Грина $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = G(r, z, z_0)$ дается выражением

$$G(r, z, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{G_0(r, z - z_0 + 2Hm) + G_0(r, z + z_0 + 2Hm)\}, \quad (5.21)$$

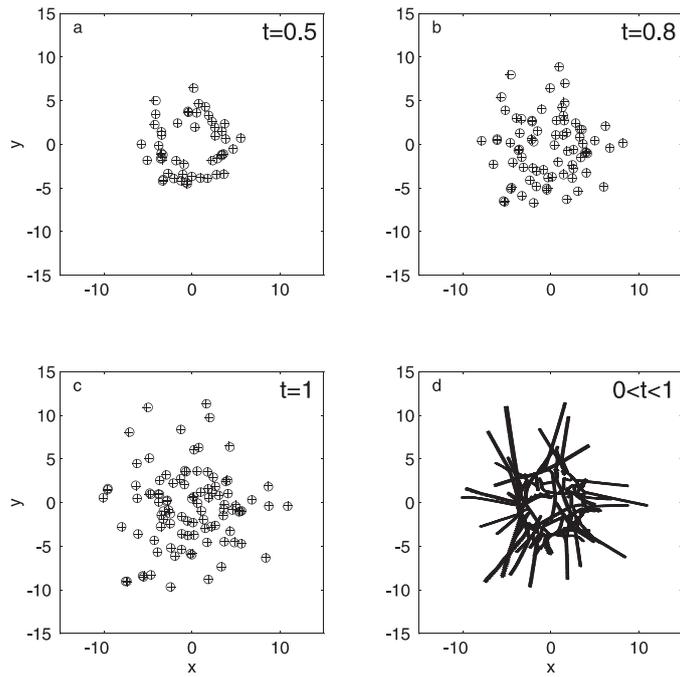


Рис. 31. Численные эксперименты с равновесной температурной аномалией, представленные распределением хетонов в различные моменты времени (a)-(c). Трактории хетонов за фиксированный интервал времени (d).

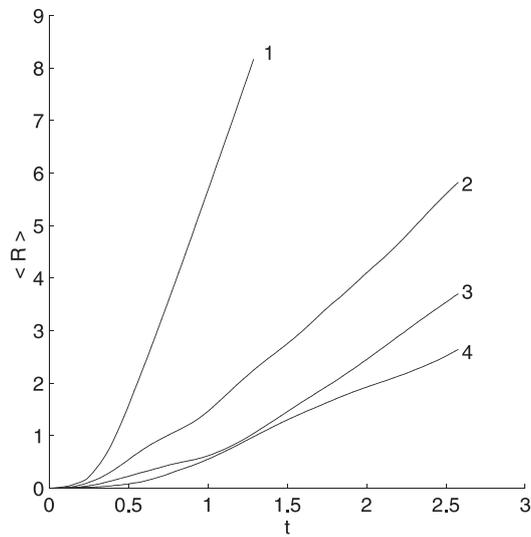


Рис. 32. Зависимость от времени среднего радиуса температурной аномалии при различных значениях относительной толщины перемешанного слоя: 1. $h_{mix}/H = 1/4$; 2. $h_{mix}/H = 1/2$; 3. $h_{mix}/H = 3/4$; 4. $h_{mix}/H = 1$, где H — общая глубина. Осреднение выполнено по 10 реализациям.

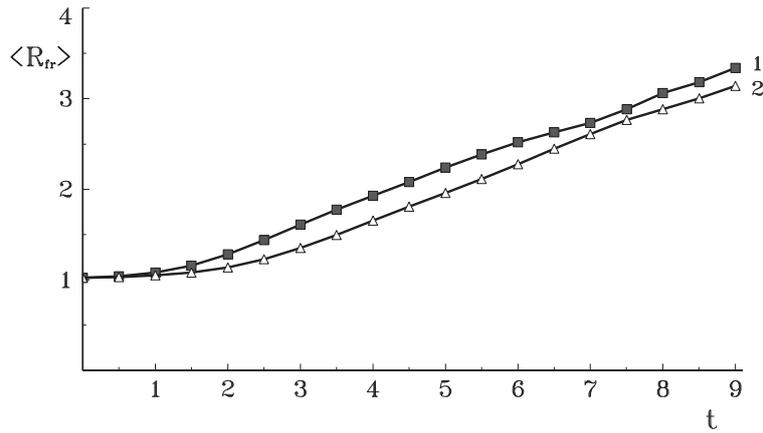


Рис. 33. Зависимости от времени $\langle R_{fr} \rangle$ для $\gamma = 14 - 1$; $\gamma = 10 - 2$.

$$G_0(r, z) = -\frac{\tilde{N}}{4\pi f} \left(r^2 + \frac{\tilde{N}^2}{f^2} z^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.22)$$

где $G_0(r, z)$ — функция Грина в неограниченной среде и $r = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$.

Вычисляя энергию взаимодействия хетонов \mathcal{H} с использованием (5.19)–(5.22) и применяя стандартную процедуру вывода уравнений движения [7], приходим к гамильтоновским уравнениям движения для горизонтальных координат вихрей, совпадающим с (2.16), где интенсивности κ следует заменить на Γ . Зависимость гамильтониана от вертикальных координат z_α в этих уравнениях — параметрическая, что связано с параметрической зависимостью от z уравнения эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Получающаяся система уравнений имеет интегралы движения — импульс и угловой момент, которые также совпадают с традиционными после замены интенсивностей κ соответствующими интенсивностями Γ .

Наиболее близкой (как по кинематическим, так и по динамическим свойствам) к двухслойной модели с равными толщинами слоев является модель непрерывно стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента-Вяйсяля, в которой квази-трехмерные хетоны образованы из вихрей с антициклонической циркуляцией $\Gamma_{a\alpha} < 0$ и координатами $x_{a\alpha}, y_{a\alpha}, z_{a\alpha} = H/4$ и из вихрей с циклонической циркуляцией $\Gamma_{c\alpha} > 0$ и координатами $x_{c\alpha}, y_{c\alpha}, z_{c\alpha} = 3H/4$ (симметричная модель). Гамильтониан системы хето-

нов в этом случае имеет вид

$$\mathcal{H} = - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{\mathcal{N}} \left[\Gamma_{a\alpha} \Gamma_{a\beta} G \left(r_{a\alpha, a\beta}, \frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right) + \Gamma_{c\alpha} \Gamma_{c\beta} G \left(r_{c\alpha, c\beta}, \frac{3H}{2}, \frac{3H}{2} \right) \right] + \\ + \sum_{\alpha, \beta=1}^{\mathcal{N}} \Gamma_{a\alpha} \Gamma_{c\beta} G \left(r_{a\alpha, c\beta}, \frac{H}{2}, \frac{3H}{2} \right). \quad (5.23)$$

В этой модели вихри расположены симметрично относительно середины слоя и симметрично же в пределах эквивалентных верхнего ($0 < z < H/2$) и нижнего ($H/2 < z < H$) слоев. Так как при движении вихрей они не изменяют свои вертикальные координаты $z_{a\alpha} = H/4$ и $z_{c\alpha} = 3H/4$ (зависимость гамильтониана (5.23) только параметрическая), кинематическое соответствие с двухслойной моделью с равными толщинами слоев соблюдается на всех интервалах времени. В общем случае модель непрерывно стратифицированной жидкости позволяет исследовать течения, индуцируемые хетонами с существенно асимметричным по вертикали распределением потенциальной завихренности [102].

Для квазитрехмерных хетонов, образованных из вихрей с циклонической циркуляцией $\Gamma_{c\alpha} > 0$ и координатами $x_{c\alpha}, y_{c\alpha}$ на поверхности жидкости $z_{c\alpha} = 0$ и антициклонической циркуляцией $\Gamma_{a\alpha} < 0$ и координатами $x_{a\alpha}, y_{a\alpha}$ в объеме жидкости $z_{a\alpha} = h$, гамильтониан имеет вид [102, 89]

$$\mathcal{H} = - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{\mathcal{N}} \left[\Gamma_{c\alpha} \Gamma_{c\beta} G(r_{c\alpha, c\beta}, 0, 0) + \Gamma_{a\alpha} \Gamma_{a\beta} G(r_{a\alpha, a\beta}, h, h) \right] + \\ + \sum_{\alpha, \beta=1}^{\mathcal{N}} \Gamma_{c\alpha} \Gamma_{a\beta} G(r_{c\alpha, a\beta}, 0, h). \quad (5.24)$$

Решение уравнений движения с гамильтонианом (5.24) для случая одиночного хетона показывает, что трехмерный хетон движется так же, как и двухслойный (равномерно и прямолинейно), но со скоростью

$$C = - \frac{\partial}{\partial b} G(b, 0, d) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2b}{[b^2 + (d + 2m)^2]^{3/2}}, \quad (5.25)$$

где C нормирована на $\Gamma/2\pi H \tilde{\lambda}$, $b = |r_c - r_a|/\tilde{\lambda}$ и $d = h/H$ - безразмерные расстояния между вихрями по горизонтали и вертикали соответственно, а $\tilde{\lambda} = \tilde{N}H/f$ - радиус Россби в непрерывной модели.

Конкретное представление об общих чертах и различиях в динамике вихрей в непрерывной и двухслойной моделях дает сравнение выражений для скорости движения индивидуального трехмерного хетона (5.25) и двухслойного (3.9), а также рисунков 29 и 2.

Скорость имеет единственный максимум, амплитуда которого уменьшается с увеличением расстояния между вихрями по вертикали. При $b^2 + d^2 \ll 1$ решение (5.25) имеет асимптотику

$$C = \frac{2b}{(b^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (5.26)$$

описывающую хетоны в полубесконечной среде $H \rightarrow \infty$ или в пределе малых вертикальных размеров хетонов $d \rightarrow 0$. При $b \ll d$ получаем

$$C = b \left[\frac{2}{d^3} + \frac{1}{4} \zeta\left(3, \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{4} \zeta\left(3, -\frac{d}{2}\right) \right], \quad (5.27)$$

где $\zeta(q, z)$ – функция Римана. Максимальная скорость хетона достигается при $d \ll 1$:

$$C_{max}(d) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{1}{d^2}, \quad b_{max} = \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (5.28)$$

Скорость хетонов растет линейно с расстоянием при малых b , достигает максимума и затем убывает по алгебраическому закону $\sim b^{-2}$, если расстояние b между вихрями больше локального радиуса Россби $\tilde{N}h/f$, но меньше, чем глобальный радиус Россби $\tilde{\lambda} = \tilde{N}H/f$.

Таким образом, анализ (5.25) показывает, что при $r \leq \tilde{\lambda}$ динамика вихрей в непрерывной модели существенно отличается от соответствующей динамики в двухслойной и многослойной моделях. Чтобы проследить связь непрерывной модели с многослойными на масштабах $r \gg \tilde{\lambda}$, функцию Грина следует записать в эквивалентной форме [9, 102]

$$G(r, z, z_0) = \frac{1}{H} \left[g_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(r) Z_m(z) Z_m(z_0) \right], \quad (5.29)$$

$$g_m(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{re^c}{2L_*} \right), & m = 0, \\ -\frac{1}{2\pi} K_0(\lambda_m r), & m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.30)$$

$$Z_0 = 1, \quad Z_m = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi m}{H} z \right), \quad (5.31)$$

где $\lambda_m = \pi m/L$, c — константа Эйлера.

Хотя в общем случае структура функции Грина зависит от профиля частоты Брента-Вяйсяля $\tilde{N}(z)$ и граничных условий, асимптотическое поведение функции Грина является универсальным как на малых, так и на больших масштабах и хорошо аппроксимируется выражениями (5.21) и (5.30). На малых масштабах ($r \ll \tilde{\lambda}$) стратификация всегда может быть аппроксимирована линейным профилем плотности (постоянная частота Брента-Вяйсяля), и поэтому функция Грина алгебраическая, см. (5.21) и (5.29). На больших масштабах ($r \gg \tilde{\lambda}$) функция Грина имеет универсальную баротропную (логарифмическую) асимптотику и нечувствительна к деталям стратификации, см. (5.29) и (5.30).

Удерживая в разложениях (5.29) и (5.30) два первых члена ($m = 1, 2$), находим, что взаимодействие вихрей в непрерывной модели на масштабах $r \gg \tilde{\lambda}$ совпадает с описываемым двухслойной моделью, при этом эффективная интенсивность двухслойных вихрей $\kappa = \Gamma H$. Так для скорости одиночного хетона при $b > \lambda_1^{-1}$ имеем

$$C = \frac{2}{b} [1 + \lambda_1 b K_1(\lambda_1 b) \cos(\pi d)], \quad (5.32)$$

с оценкой для максимальной скорости

$$C_{max}(1) = 0.8, \quad b_{max} = 1.11 \lambda_1^{-1}. \quad (5.33)$$

Точное совпадение скорости одиночного хетона со скоростью хетона в двухслойной жидкости имеет место в симметричной модели, см. (5.23). Выражение для скорости, полученное в том же приближении, что и (5.32), имеет вид

$$C = \frac{1}{b} [1 - \lambda_1 b K_1(\lambda_1 b)], \quad (5.34)$$

и после идентификации λ_1^{-1} с радиусом Россби двухслойной модели, а γ с κH , совпадает с (2.9). Учет следующих N членов $M = 2, 3, \dots, N$ в разложении функции Грина для модели непрерывно стратифицированной жидкости (5.21) приводит к поправкам, которые имеют аналоги только в эквивалентных N -слойных моделях. Отмеченная выше асимптотическая эквивалентность непрерывных и N -слойных моделей показывает, что классификация стационарных вихревых структур хетонного типа для N -слойных

моделей (отраженная Таблицей 2), имеет место также и в случае непрерывно стратифицированной жидкости. Явный вид решения для хетонов с дугообразной осью и треугольных хетонов приведен в [9]¹⁵.

Динамика хетонов в непрерывной модели исследовалась в [8, 101, 102, 122]. В работе [8] получен ряд точных решений для модели полубесконечной среды. В [102] проинтерпретированы уравнения движения для двух взаимодействующих хетонов, описываемых гамильтонианом (5.23), и исследовано взаимодействие хетонов, распределенных случайным образом на окружности. Более подробно динамика популяции хетонов описана в п. 6.1 в контексте задачи моделирования переноса тепла при развитии глубокой конвекции в океане. В работе [122] обсуждается проблема формирования хетонных кластеров. Отметим также, что Лим и Майда [122] предложили обобщение теории [8, 102], включив в рассмотрение поверхностные аномалии температуры. Такое обобщение, однако, является только терминологическим, поскольку, в силу теоремы Брезертонна [73], оно не приводит к появлению новых эффектов по той причине, что свойства поверхностных аномалий температуры и кинематически и динамически совпадают со свойствами аномалий потенциальной завихренности, когда последние расположены на поверхности. Эта эквивалентность учитывается в моделях [8, 102] по построению.

Эффект конечности размеров вихрей в непрерывной модели может быть учтен, например, в приближении распределенных эллипсоидальных вихрей. В этом случае потенциальная завихренность предполагается однородной внутри эллипсоида и равной нулю вне него [22, 23, 24, 25, 129, 149]. Уравнения движения для центров эллипсоидов и их осей образуют замкнутую гамильтоновскую систему уравнений [23, 129]. В [23, 149] показано, что в главном приближении по малому параметру отношения размера эллипсоида к расстоянию между эллипсоидами уравнения движения центров совпадают с уравнениями движения дискретных вихрей. Этот же вывод имеет место для произвольных локализованных трехмерных аномалий потенциальной завихренности с конечным носителем [9].

Наглядный пример использования МКД в рамках модели непрерывно стратифицированной жидкости [30] приведен в работе Козлова и Мазур [33], где изучается эволюция эллипсоидального вихря, аппроксимируемого набором бесконечно тонких жидких дисков. Авторы [33] исследовали процесс распада неустойчивого сильно вытянутого эллиптического диска, продемонстрировав, таким образом, один из возможных механизмов фор-

¹⁵Решения, соответствующие приближению f -плоскости, получаются, если в [9] положить равной нулю неоднородную часть параметра Кориолиса ($\beta = 0$).

мирования наблюдаемых в Северной Атлантике квазикруглых внутритермоклинных линз.

Суммируя результаты, изложенные в п. 5.1–5.2, можно заключить, что двухслойная модель адекватно воспроизводит асимптотическую динамику вихрей в многослойной жидкости на масштабах, превышающих первый масштаб Россби, но существенно меньших масштаба Обухова ($L_* \gg \tilde{\lambda} \geq L_1$). Это же свойство [102] сохраняется в моделях с непрерывной стратификацией для локализованных трехмерных вихрей [8, 101, 102, 149, 122]. Необходимо, однако, иметь ввиду, что в многослойной и непрерывно стратифицированной моделях возможны решения, не имеющие прямых аналогов в двухслойной модели, например, двухмодальный хетон (5.3) и трехъярусный волчок (5.4).

6. Некоторые прикладные аспекты хетонных теорий

Концепция хетонов нашла приложение в тропической метеорологии при изучении механизмов, определяющих динамику развитых тропических циклонов (ураганов), например, их типичных траекторий [92], и в океанологии при исследовании механизмов, характеризующих типичные траектории средиземноморских внутритермоклинных [111] и глубоководных [149] линз, а также при изучении возможных сценариев переноса тепла локализованными бароклинными вихрями, формирующимися при развитии глубокой конвекции в океане [118, 119, 126, 88, 82, 83, 102]. Все упомянутые геофизические вихревые структуры объединяет тот факт, что они существенно бароклинные, так как формируются в стратифицированной среде; локализованы в пространстве, так как генерируются вследствие действия локализованных тепловых (либо массовых) источников, и, наконец, имеют нулевую суммарную потенциальную завихренность, так как тепловые источники не производят суммарный угловой момент. Таким образом, удовлетворяются необходимые условия применимости хетонных теорий.

6.1. Хетонные теории и проблема переноса тепла при глубокой конвекции

В наиболее чистом виде хетонная теория широко применяется для исследования динамической стадии развития глубокой конвекции в океане [83, 88, 102, 119, 120, 126].

Глубокая конвекция развивается при охлаждении поверхности океана в локализованной области с характерными размерами, большими радиуса Россби. Охлаждение вызывает конвективное перемешивание верх-

него слоя океана и ведет к формированию температурной аномалии. Так как опускание охлажденной жидкости контролируется вращением [18, 70, 71, 72, 91, 106], формируется аномалия потенциальной завихренности с циклонической циркуляцией у поверхности и антициклонической в основном объеме, т. е. формируется хетон [119, 126, 114, 74, 133, 155]. Сильно неоднородные по горизонтали температурные аномалии аппроксимируются популяциями дискретных хетонов; а квазиоднородные аномалии — распределенными хетонами, которые вполне адекватно описываются с помощью МКД. Таким образом, изучение последующей эволюции температурной аномалии сводится к задаче о нелинейной динамике хетонов.

При больших размерах аномалий потенциальной завихренности, удовлетворяющих условиям развития бароклинной неустойчивости, происходит формирование хетонов меньшего размера на границе аномалии, которые отделяются от нее и свободно распространяются в объем жидкости, осуществляя в ней горизонтальное перемешивание. Фаза формирования хетонов хорошо описывается линейной теорией неустойчивости, см. п. 4.1.1, а фазы разлета наглядно демонстрирует задача о N дискретных хетонах, равномерно распределенных на окружности (рисунки п. 3.4.2), а также задача о развале неустойчивого распределенного хетона (рисунки 22 и 23).

Примеры, приведенные на рис. 30 и 31, показывают эволюцию популяции хетонов в модели непрерывно стратифицированной жидкости с постоянным вертикальным градиентом плотности. На рис. 30 хетоны первоначально распределены случайным образом на окружности, и их разлет моделирует вырождение температурной аномалии. На рис. 31 хетоны случайным образом генерируются на окружности. Такая модель описывает стационарную температурную аномалию, когда поток тепла с поверхности балансируется потоком тепла, уносимым хетонами [119]. Результаты большой серии численных экспериментов [102] показывают, что при вырождении температурной аномалии (при различных значениях толщины перемешанного слоя h_{mix}) ее средний радиус линейно растет со временем (рис. 32). Расчеты с распределенными вихрями (см. п. 3.1.2 настоящей работы) демонстрируют, что для распределенных вихрей, как и для дискретных, вырождение аномалии происходит по линейному закону. Подтверждение этому факту дает рис. 33, где показаны зависимости от времени среднего фронта вихревого движения $\langle R_{fr} \rangle$. Осреднение велось как по точкам (по 10 жидким частицам в каждом слое, максимально удаленным от начального центра вихря), так и по реализациям (10 реализаций) для каждого из двух указанных значений γ .

6.2. Проблема параметризации вихревого переноса тепла

Установлено, что конвективные температурные аномалии играют существенную роль в тепловом балансе океана [126]. В моделях общей циркуляции океана мезомасштабный перенос тепла обычно считается диффузионным (пропорциональным локальному градиенту температуры) [154, 96, 134, 125]. В моделях, использующих постоянный коэффициент диффузии, средний радиус температурной аномалии увеличивается по закону $\langle R \rangle \sim t^{1/2}$. В моделях, построенных на нелинейном коэффициенте диффузии, пропорциональном градиенту температуры, рост среднего радиуса еще более слабый: $\langle R \rangle \sim t^{1/3}$. Как следует из результатов, изложенных в разделах 3 и 4, хетонная теория и численные эксперименты убедительно указывают на линейный закон $\langle R \rangle \sim t$, приводящий к более эффективно-му переносу тепла по сравнению с диффузионным. Проблема построения физически обоснованных параметризаций, учитывающих недиффузионный характер переноса тепла хетонами, к настоящему времени полностью не решена [118, 147, 102]. Подход к этой проблеме, основанный на описании динамических и статистических процессов в рамках равновесной статистической теории предложен в [87, 88], а в неравновесной кинетической теории — в [102].

7. Заключение

Обзор публикаций и оригинальные результаты, представленные в настоящей статье, показывают, что за почти 20 лет с момента появления теория локализованных бароклиных вихрей прошла существенный путь и обогатилась многими, подчас неожиданными, результатами, с одной стороны, и нашла свою область приложений в метеорологии и океанологии, с другой. Концепция хетонов — бароклиных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью — оказалась плодотворной и позволила выделить круг важных задач, допускающих полное и последовательное исследование в рамках приближений квазигеострофических дискретных и распределенных вихрей. Успех связан с физической содержательностью аналитической теории хетонов и простотой ее реализации в численных экспериментах. Двухслойная квазигеострофическая модель хетонов зарекомендовала себя как базисная минимальная модель, учитывающая бароклидную природу вихрей в стратифицированной однородно вращающейся жидкости в наиболее простой форме.

Хетонная теория дает ключ к классификации типов стационарных вихревых структур в бароклиной жидкости. Приведенные таблицы 1 и 2

Таблица 1. Основные стационарные состояния вихревых структур в двухслойной жидкости

Тип вихревой структуры	Формула и комментарий	Рисунок
Распределенный хетон с вертикальной осью		1a
Распределенный хетон с наклонной осью		1b
Некомпенсированный дискретный двухслойный вихрь - (<i>двухъярусный волчок</i>)	(3.5) - угловая скорость вращения относительно центра с координатами (3.7)	
Обычный хетон	(3.9) - скорость поступательного движения	2
Трехвихревые дискретные структуры <i>триполь</i> <i>обычная карусель</i>	(3.14) — угловая скорость вращения (3.15) — угловая скорость вращения относительно центрального вихря ($L > L^{**}$) та же формула ($L < L^{**}$)	3b - слева 3b — справа
<i>инверсная карусель</i> <i>эксцентричная карусель</i> устойчивая структура <i>трипон</i>	(3.16) — угловая скорость вращения (3.17) — дисперсионное уравнение, (3.18) — скорость поступательного движения	4 7, 8a
неустойчивая триангулярная конфигурация	(3.19) — дисперсионное уравнение, (3.20) — скорость поступательного движения	8b
Четырехвихревая стационарная конфигурация <i>составная карусель</i>		13b
Хетонные дорожки Кармана: симметричная антисимметричная	Скорость поступательного движения (3.34) (3.35)	17a, 18a, 18b 17b, 18c, 18d

Таблица 2. Основные стационарные состояния дискретных вихревых структур в трехслойной жидкости

Тип вихревой структуры	Формула и комментарий	Рисунок
<p>Трехслойные хетоны: <i>1-модальный хетон с наклонной осью</i> <i>2-модальный хетон с дугообразной осью</i></p>	<p>Скорость поступательного движения (5.2) (5.3)</p>	<p>28b - слева (с учетом сноски 9) 28b - справа</p>
<p>Вращающиеся вихревые структуры <i>трехъярусная карусель</i> <i>триполь</i> верхнего или нижнего слоев <i>триполь</i> среднего слоя <i>карусель</i>, состоящая из центрального вихря верхнего (нижнего) слоя и вихрей-спутников среднего слоя <i>карусель</i>, состоящая из центрального вихря среднего слоя и вихрей-спутников верхнего (нижнего) слоя <i>карусель</i>, состоящая из центрального вихря верхнего (нижнего) слоя и вихрей-спутников нижнего (верхнего) слоя <i>волчок</i> из вихрей верхнего и нижнего слоев <i>волчок</i> из вихрей двух верхних либо двух нижних слоев</p>	<p>Угловая скорость вращения (5.4) (5.5) (5.6) (5.7) (5.8) (5.9) (5.10) (5.12)</p>	
<p><i>Немодальный хетон</i> в двух верхних либо двух нижних слоях</p>	<p>(5.11) - скорость поступательного движения</p>	

синтезируют основные стационарные состояния хетонных структур, представленных в данной статье.

Теория хетонов, будучи использована в области своей применимости, адекватно описывает существенно нелинейные стадии развития чисто бароклинных течений (с нулевой баротропной компонентой), которые естественно генерируются тепловыми источниками в реальных геофизических условиях и в лабораторных экспериментах. Модель удовлетворительно воспроизводит:

- вертикальную и горизонтальную структуры геофизических полей (температуры и скорости);
- характерные размеры как индивидуальных устойчивых вихревых структур, так и вихревых кластеров (ансамблей вихрей);
- механизм развала крупных вихревых образований;
- типы возможных циркуляционных режимов и принципы их классификации;
- асимптотические недиффузионные (баллистические) законы переноса тепла.

Перспективные направления в обобщении теории хетонов связаны с исследованием взаимодействия вихрей с крупномасштабными течениями [15, 120, 154, 102, 19, 20, 21], топографией [84, 85, 88, 51], береговым рельефом [84] и в замкнутых бассейнах, а также - с проблемами переноса примесей [12, 20]. Для исследования эффектов дифференциального вращения (даже в случае однородного градиента - приближении бета-плоскости) теория хетонов требует существенной модификации, главным образом из-за необходимости учета излучения волн Россби [11, 36, 137]. В условиях, когда излучение волн Россби подавлено (распространение хетонов на восток), возможны отдельные точные решения для индивидуальных хетонов [93, 94, 9, 28, 102] и хетонных дорожек Кармана [101].

Эффекты эквивалентной двумерной сжимаемости среды на динамику хетонов на масштабах $\tilde{\lambda} \geq L_*$ могут быть учтены путем отказа от приближения твердой крышки на верхней границе, использованного при выводе уравнений (2.1)–(2.2), и замены его на условие свободной поверхности [7]. В этом пределе баротропная мода экранируется, и логарифмическую функцию Грина в (2.6) и (5.1) следует заменить на $(-1/\pi)K_0(r/L_*)$, где L_* — масштаб Обухова.

Дополнительные эффекты возникновения циклон-антициклонной асимметрии и излучения поверхностных волн хетонами могут исследоваться в рамках теории двухслойной вращающейся мелкой воды [62, 76].

В заключение отметим, что хотя в классе течений геофизической природы квазигеострофические движения составляют существенную часть, налагаемое для них условие малости числа Россби ($\lambda \ll 1$) выполняется не всегда. Для интенсивных вихрей $\lambda \sim 1$, и может иметь место не геострофический, а циклострофический баланс. Примеры решений для циклострофических локализованных вихрей даны в [76, 17, 97, 98].

Представляется, что данный обзор может оказаться полезным при решении различных проблем геофизической гидродинамики.

Благодарности. Мы благодарим наших коллег В. Ф. Козлова, инициировавшего исследование динамики распределенных хетонов, Х. Бота, В. П. Гончарова, В. Н. Зырянова, З. И. Кизнера, Г. М. Резника, Ю. Б. Седова, В. Цейтлина, с которыми в течение ряда лет велись дискуссии по обсуждаемым здесь вопросам. Участие в работе второго автора осуществлялось при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-05-64646) и Министерства Науки Франции. М. А. С. благодарит руководство LEGI CNRS (Гренобль) за гостеприимство, оказанное в период работы над данным обзором.

Литература

- [1] Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. *Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей*. М. Физматлит. 1995, 368 с.
- [2] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере*. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1977, № 6, с. 57-65.
- [3] Богомолов В. А. *О движении на вращающейся сфере*. Изв. АН СССР. ФАО. 1985, т. 21, № 4, с. 391-396.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск. Изд. дом Удмуртский университет. 1999, 464 с.
- [5] Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*. Пер. с англ. М. Мир. 1973. 758 с.
- [6] Гончаров В. П., Павлов В. И. *Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании*. М. МГУ. 1993, 197 с.

- [7] Гряник В. М. *Динамика сингулярных геострофических вихрей в двух-уровневной модели атмосферы (океана)*. Изв. АН СССР. ФАО. 1983, т. 19, № 3, с. 227-240.
- [8] Гряник В. М. *Динамика локализованных вихревых возмущений - «вихревых зарядов» в бароклинной жидкости*. Изв. АН СССР. ФАО. 1983, т. 19, № 5, с. 467-475.
- [9] Гряник В. М. *Локализованные вихревые возмущения - «вихревые заряды» и «вихревые нити» в бароклинной дифференциально вращающейся жидкости*. Изв. АН СССР. ФАО. 1988, т. 24, № 12, с. 1251-1261.
- [10] Гряник В. М. *Теоретические модели динамики локализованных квази-геострофических вихрей в атмосфере и океане. Исследования вихревой динамики и энергетики атмосферы и проблемы климата*. Л. Гидрометеиздат. 1990, с. 31-60.
- [11] Гряник В. М. *Излучение волн Россби и адаптация полей потенциальной завихренности в атмосфере (океане)*. Докл. АН СССР. 1992, т. 326, № 1, с. 976-979.
- [12] Гряник В. М., Дорониная Т. Н. *Адвективный перенос пассивной примеси бароклинными сингулярными квазигеострофическими вихрями в атмосфере (океане)*. Изв. АН СССР. ФАО. 1990, т. 26, № 10, с. 1011-1026.
- [13] Гряник В. М., Дорониная Т. Н. *Взаимодействие между интенсивными бароклинными квазигеострофическими вихрями в потоках с вертикальным и горизонтальным сдвигом скорости*. Изв. АН СССР. ФАО. 1997, т. 33, № 2, с. 171-183.
- [14] Гряник В. М., Тевс М. В. *Динамика сингулярных геострофических вихрей в N-слойной модели атмосферы (океана)*. Изв. АН СССР. ФАО. 1989, т. 25, № 3, с. 243-256.
- [15] Гряник В. М., Тевс М. В. *Динамика сингулярных геострофических вихрей вблизи критических точек течений в N-слойной модели атмосферы (океана)*. Изв. АН СССР. ФАО. 1991, т. 27, № 7, с. 733-745.
- [16] Гряник В. М., Тевс М. В. *Исследование динамики и энергетики взаимодействия хетонов в линейно и экспоненциально стратифицированных средах*. Изв. АН. ФАО. 1997, т. 33, № 4, с. 419-433.
- [17] Гряник В. М. *О вихревой природе горячих пятен в полярной области атмосферы Венеры*. Докл. АН СССР. 1990, т. 313, № 2, с. 300-305.

- [18] Дикарев С. Н. *О влиянии вращения на конвективную структуру в глубокой однородной жидкости*. Докл. АН СССР. 1983, т. 273, с. 718-720.
- [19] Доронина Т. Н. *О структуре интенсивного бароклинного вихря в трехмерных сдвиговых течениях*. Докл. АН. 1994, т. 339, № 4, с. 528-532.
- [20] Доронина Т. Н. *Структура циркуляционных ячеек интенсивных бароклиных вихрей в потоке со сдвигом скорости и адвективный перенос примеси*. Изв. АН. ФАО. 1995, т. 31, № 2, с. 223-232.
- [21] Доронина Т. Н. *Взаимодействие бароклиных точечных вихрей в квазигеострофических баротропных и бароклиных сдвиговых потоках*. Океанология. 1997, т. 37, № 4, с. 506-512.
- [22] Жмур В. В., Панкратов К. К. *Динамика полуэллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке*. Океанология. 1989, т. 29, № 2, с. 205-211.
- [23] Жмур В. В., Панкратов К. К. *Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических вихрей. Гамильтонова формулировка*. Изв. АН СССР. ФАО. 1990, т. 26, № 9, с. 972-981.
- [24] Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. *Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f -плоскости*. Изв. АН СССР. ФАО. 1991, т. 27, № 5, с. 492-503.
- [25] Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. *Взаимодействие двух квазигеострофических бароклиных вихрей: тенденция к сближению и слиянию*. Изв. АН СССР. ФАО. 1992, т. 28, № 5, с. 538-551.
- [26] Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей*. Докл. АН СССР. 1980, т. 250, № 6, с. 1296-1300.
- [27] Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. *Синоптические вихри в океане*. Л. Гидрометеиздат. 1987, 512 с.
- [28] Кизнер З. И. *Солитоны Россби с осесимметричными бароклиными модами*. Докл. АН СССР. 1984, т. 275, № 6, с. 1495-1498.
- [29] Козлов В. В. *Общая теория вихрей*. Ижевск. Изд. дом Удмуртский университет. 1998, 238 с.
- [30] Козлов В. Ф. *Построение численной модели эволюции геострофических вихрей в бароклиной жидкости на основе метода контурной динамики*. Изв. АН СССР. ФАО. 1985, т. 21, № 2, с. 211-213.

- [31] Козлов В. Ф. *Модель взаимодействия эллиптических вихревых пятен с учетом эффектов вовлечения*. Изв. РАН. ФАО. 1993, т. 29, № 1, с. 98-105.
- [32] Козлов В. Ф. *Геофизическая гидродинамика вихревых пятен*. Морской гидрофизический журнал. 1994, № 1, с. 26-35.
- [33] Козлов В. Ф., Мазур И. В. *Об одной модели формирования внутритермоклинных вихрей в океане*. Метеорология и гидрология. 1986, № 8, с. 83-88.
- [34] Козлов В. Ф., Макаров В. Г., Соколовский М. А. *Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойном океане*. Изв. АН СССР. ФАО. 1986, т. 22, № 8, с. 868-874.
- [35] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидродинамика*. Ч. 1. М. Физматгиз. 1963, 400 с.
- [36] Курганский М. В. *О движении пары вихрей на бета-плоскости. Исследования вихревой динамики и энергетики атмосферы и проблемы климата*. Л. Гидрометеиздат. 1990, с. 123-130.
- [37] Курганский М. В., Татарская М. С. *Применение понятия потенциального вихря в метеорологии*. Изв. АН СССР. ФАО. 1987, т. 23, № 8, с. 787-814.
- [38] Ламб Г. *Гидродинамика*. М.-Л. Гостехиздат. 1947, 927 с.
- [39] Макаров В. Г. *Численное моделирование формирования триполярных вихрей методом контурной динамики*. Изв. АН. ФАО. 1996, т. 32, № 1, с. 46-55.
- [40] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. *Динамика вихревых структур*. Киев. Наукова Думка. 1993, 280 с.
- [41] Монин А. С. *Прогноз погоды как задача физики*. М. Наука. 1969. 183 с.
- [42] Новиков Е. А. *Динамика и статистика системы вихрей*. ЖЭТФ. 1975, т. 68, вып. 5(11), с. 1868-1882.
- [43] Новиков Е. А., Седов Ю. Б. *Стохастические свойства системы четырех вихрей*. ЖЭТФ. 1978, т. 75, вып. 3(9), с. 868-876.
- [44] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*. Пер. с англ. М. Мир. 1982, т. 1, 2. 811 с.
- [45] Пуанкаре А. *Теория вихрей*. Пер. с франц. Москва-Ижевск. РХД. 2000, 160 с.

- [46] Соколовский М. А. *О встречном столкновении распределенных хетонов*. Докл. АН СССР. 1989, т. 306, № 1, с. 198-202.
- [47] Соколовский М. А. Численное моделирование взаимодействия распределенных хетонов при встречном столкновении. *Метод контурной динамики в океанологических исследованиях*. Владивосток. ДВО АН СССР. 1990, с. 40-57.
- [48] Соколовский М. А. *Моделирование трехслойных вихревых движений в океане методом контурной динамики*. Изв. АН СССР. ФАО. 1991, т. 27, № 5, с. 550-562.
- [49] Соколовский М. А. *Устойчивость осесимметричного трехслойного вихря*. Изв. АН СССР. ФАО. 1997, т. 33, № 1, с. 16-26.
- [50] Соколовский М. А., Веррон Ж. *Новые стационарные решения задачи о трех вихрях в двухслойной жидкости*. Докл. АН. 2002, т. 383, № 1, с. 61-66.
- [51] Соколовский М. А., Веррон Ж., Вагина И. М. *Влияние подводного препятствия малой высоты на динамику распределенного хетона*. Изв. АН. ФАО. 2001, т. 37, № 1, с. 131-143.
- [52] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. Пер. с англ. М. Научный мир. 2000, 376 с.
- [53] Тевс М. В. *Кинематическое исследование вертикальной структуры тропических циклонов на основе N-уровневой квазигеострофической модели атмосферы*. Изв. АН. ФАО. 1999, т. 35, № 4, с. 481-486.
- [54] Aref H. *Motion of three vortices*. Phys. Fluids. 1979, v. 22, № 3, p. 393-400.
- [55] Aref H. *Point vortex motions with a center of symmetry*. Phys. Fluids. 1982, v. 25, p. 2183-2187.
- [56] Aref H. *Integrable, chaos and turbulent vortex motion in two-dimensional flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. 1983, v. 15, p. 345-389.
- [57] Aref H. *Three-vortex motion with zero total circulation: Addendum*. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1989, v. 40, p. 495-500.
- [58] Aref H. *A transformation of the point vortex equations*. Phys. Fluids. 2002, v. 14, № 7, p. 2395-2401.
- [59] Aref H., Jones S. W., Mofina S., Zawadski I. *Vortices, kinematics and chaos*. Physica D. 1989, v. 37, p. 423-440.

- [60] Aref H., Rott N., Thomann H. *Grobli's solution of the three-vortex problem*. Annu. Rev. Fluid Mech. 1992, v. 24, p. 1-20. (Перевод на русский язык содержится в данном сборнике).
- [61] Aref H., Stremmer M. A. *Four-vortex motion with zero total circulation and impulse*. Phys. Fluids. 1999, v. 11, № 12, p. 3704-3715.
- [62] Baey J.-M., Carton X. *Vortex multipoles in two-layer rotating shallow-water flows*. J. Fluid Mech. 2002, v. 460, p. 151-175.
- [63] Bauer L., Morikawa G. K. *Stability of rectilinear geostrophic vortices in stationary equilibrium*. Phys. Fluids. 1976, v. 19, № 7, p. 929-942.
- [64] Benilov E. S. *Instability of quasi-geostrophic vortices in a two-layer ocean with a thin upper layer*. J. Fluid Mech. 2003, v. 475, p. 303-331.
- [65] Benilov E. S., Broutman D., Kuznetsova E. P. *On the stability of large-amplitude vortices in a continuously stratified fluid on the f -plane*. J. Fluid Mech. 1998, v. 355, p. 139-162.
- [66] Borisov A. V., Pavlov A. E. *Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere. - I. Regular & Chaotic Dyn.* 1998, v. 3, № 1, p. 28-39.
- [67] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. - II. General compact case*. Regular & Chaotic Dyn. 1998, v. 3, № 2, p. 99-114.
- [68] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. - III. Noncompact case. Problem of collapse and scattering*. Regular & Chaotic Dyn. 1998, v. 3, № 4, p. 74-86.
- [69] Borisov A. V., Bolsinov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics. - IV*. Regular & Chaotic Dyn. 1999, v. 4, № 1, p. 23-50.
- [70] Boubnov B. M., Golitsyn G. S. *Experimental study of convective structure in rotating fluids*. J. Fluid Mech. 1986, v. 167, p. 503-531.
- [71] Boubnov B. M., Golitsyn G. S. *Temperature and velocity field regimes of convective motions in a rotating plane fluid layer*. J. Fluid Mech. 1990, v. 219, p. 215-239.
- [72] Boubnov B. M., Golitsyn G. S. *Convection in rotating fluids*. Kluwer Academic Publishers, 1995, 224 p.
- [73] Bretherton F. P. *Critical layer instability in baroclinic flows*. Quart. J. Royal Meteorological Soc. 1966, v. 92, № 393, p. 325-334.

- [74] Brickman D. *Heat flux partitioning in deep-ocean convection*. J. Phys. Oceanogr. 1995, v. 25, № 11, part I, p. 2609-2623.
- [75] Carnevale G. F., Kloosterziel R. C. *Emergence and evolution of triangular vortices*. J. Fluid Mech. 1994, v. 259, p. 305-331.
- [76] Carton X. *Hydrodynamical modelling of oceanic vortices*. Surveys in Geophys. 2001, v. 22, p. 179-263.
- [77] Carton X. J., Flierl G. R., Polvani L. M. *The generation of tripoles from unstable axisymmetric isolated vortex structures*. Europhys. Lett. 1989, v. 9, № 4, p. 339-344.
- [78] Carton X. J., Legras B. *The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows*. J. Fluid Mech. 1994, v. 267, p. 51-82.
- [79] Chao S.-Y., Shaw P.-T. *Close interactions between two pairs of heton-like vortices under sea ice*. J. Geophys. Res. 1999, v. 104, № C10, p. 23591-23605.
- [80] Chao S.-Y., Shaw P.-T. *Fission of heton-lake vortices under sea ice*. J. Oceanogr. 1999, v. 55, p. 65-78.
- [81] Charney J. G. Numerical experiments in atmospheric hydrodynamics. Proc. of Symp. in Appl. Math. *Experimental Arithmetic, High Speed Computing and Mathematics*. Amer. Math. Soc. 1963, p. 289-310.
- [82] Danilov S., Gryanik V., Olbers D. *Equilibration and lateral spreading of a strip-shaped convection region*. Alfred - Wegener - Institut für Polar - und Meeresforschung. März 1998. Report 86, 66 p.
- [83] Danilov S., Gryanik V., Olbers D. *Equilibration and lateral spreading of a strip-shaped convection region*. J. Phys. Oceanogr. 2001, v. 31, № 4, p. 1075-1087.
- [84] Dewar W. K. *Convection in small basins*. J. Phys. Oceanogr. 2002, v. 32, № 10, p. 2766-2788.
- [85] Dewar W. K. *Baroclinic eddy interaction with isolated topography*. J. Phys. Oceanogr. 2002, v. 32, № 10, p. 2789-2805.
- [86] DiBattista M. T., Majda A. J. *An equilibrium statistical theory for large-scale features of open-ocean deep convection*. J. Phys. Oceanogr. 2000, v. 30, № 6, p. 1325-1353.
- [87] DiBattista M. T., Majda A. J. *Equilibrium statistical predictions for baroclinic vortices: the role of angular momentum*. Theoret. Comput. Fluid Dyn. 2001, v 14, № 5, p. 293-322.

- [88] DiBattista M. T., Majda A. J., Marshall A. *A statistical theory for the „pathiness“ of open-ocean deep convection: the effect of preconditioning.* J. Phys. Oceanogr. 2002, v. 32, № 2, p. 599-626.
- [89] Doronina T., Gryanik V., Olbers D., Warncke T. A 3D heton mechanism of lateral spreading in localized convection in a rotating stratified fluid. *Alfred - Wegener - Institut für Polar - und Meeresforschung.* März 1998. Report 87, 84 p.
- [90] Eckhardt B. *Integrable four vortex motion.* Phys. Fluids. 1988, v. 31, № 10, p. 2796-2801.
- [91] Fernando H. J. S., Chen R., Boyer D. L. *Effects of rotation on convective turbulence.* J. Fluid Mech. 1991, v. 228, p. 513-547.
- [92] Flatau M., Schubert W. H., Stovens D. E. *The role of baroclinic processes in tropical cyclone motion: the influence of vertical tilt.* J. Atmos. Sci. 1994, v. 51, № 1, p. 2589-2601.
- [93] Flierl G. R. *Isolated eddy models in geophysics.* Annu. Rev. Fluid Mech. 1987, v. 19, p. 493-530.
- [94] Flierl G. R., Larichev V. D., McWilliams J. C., Reznik G. M. *The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies.* Dyn. Atmos. Oceans. 1980, v. 5, p. 1-41.
- [95] Galmiche M., Sommeria J., Thivolle-Cazat E., Verron. J. Data assimilation applied to laboratory experiments in a rotating, stratified fluid. *Proceedings of the Moscow International Conference on Fluxes and Structures in Fluids.* 2001, p. 56-57.
- [96] Gent P., McWilliams J. *Isopycnal mixing in ocean circulation models.* J. Phys. Oceanogr. 1990, v. 20, № 1, p. 150-155.
- [97] Goncharov V. P., Gryanik V. M., Pavlov V. I. *Venusian «hot spots» Physical phenomenon and its quantification.* Phys. Rev. 2002, v. E66, 066304-1 - 066304-11.
- [98] Goncharov V., Pavlov V. *Cyclostrophic vortices in polar regions of rotating planets.* Nonlinear Processes in Geophys. 2001, v. 8, № 4/5, p. 301-311.
- [99] Griffiths R. W., Hopfinger E. J. *Experiments with baroclinic vortex pairs in a rotating fluid.* J. Fluid Mech. 1986, v. 173, p. 501-518.
- [100] Griffiths R. W., Hopfinger E. J. *Coalescing of geostrophic vortices.* J. Fluid Mech. 1987, v. 178, p. 73-97.
- [101] Gryanik V. M., Borth H., Olbers D. The theory of quasigeostrophic von Karman vortex streets in two-layer fluids on beta-plane and intermittent

turbulent jets. *Alfred - Wegener - Institut für Polar - und Meeresforschung*. November 2001. Preprint 106, 59 p.

- [102] Gryanik V. M., Doronina T. N., Olbers D., Warncke T. H. *The theory of three-dimensional hetons and vortex-dominated spreading in localized turbulent convection in a fast rotating stratified fluid*. J. Fluid Mech. 2000, v. 423, p. 71-125.
- [103] van Heijst G. J. F. *Topography effects on vortices in a rotating fluid*. Meccanica. 1994, v. 29, № 4, p. 431-451.
- [104] van Heijst G. J. F., Kloosterziel R. C. *Tripolar vortices in a rotating fluid*. Nature. 1989, v. 338, p. 569-571.
- [105] van Heijst G. J. F., Kloosterziel R. C., Williams C. W. M. *Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid*. J. Fluid Mech. 1991, v. 225, p. 301-331.
- [106] Helfrich K. R., Battisti T. M. *Experiments on baroclinic vortex shedding from hydrothermal plumes*. J. Geophys. Res. 1991, v. 96, № C12, p. 12511-12518.
- [107] Helfrich K. R., Send U. *Finite-amplitude evolution of two-layer geostrophic vortices*. J. Fluid Mech. 1988, v. 197, p. 331-348.
- [108] Hesthaven J. S., Lynov J. P., Rasmussen J. J., Sutyrin G. G. *Generation of tripolar vortical structures on the beta plane*. Phys. Fluids. 1993, v. A5, № 7, p. 1674-1678.
- [109] Hogg N. G., Stommel H. M. *The heton, an elementary interaction between discrete baroclinic geostrophic vortices, and its implications concerning eddy heat-flow*. Proc. R. Soc. Lond. 1985, v. A 397, p. 1-20.
- [110] Hogg N. G., Stommel H. M. *Hetonic explosions: the breakup and spread of warm pools as explained by baroclinic point vortices*. J. Atmos. Sci. 1985, v. 42, № 14, p. 1465-1476.
- [111] Hogg N. G., Stommel H. M. *How currents in the upper thermocline could advect meddies deeper down*. Deep-Sea Res. 1990, v. 37, № 4, p. 613-623.
- [112] Hopfinger E. J., van Heijst G. J. F. *Vortices in rotating fluids*. Ann. Rev. Fluid Mech. 1993, v. 25, p. 241-289.
- [113] Ikeda M. *Instability and splitting of mesoscale rings using a two-layer quasi-geostrophic model on an f-plane*. J. Phys. Oceanogr. 1981, v. 11, № 7, p. 987-998.

- [114] Ivey G. N., Taylor J. R., Coates M. J. *Convectively driven mixed layer growth in a rotating, stratified fluid*. Deep-Sea Res. 1995, v. 42, № 4, p. 331-349.
- [115] Kizner Z., Berson D., Khvoles R. *Baroclinic modon equilibria on the beta-plane: stability and transitions*. J. Fluid Mech. 2002, v. 468, p. 239-270.
- [116] Koiller J., Carvalho S. P., Silva R. R., Oliveira L. C. G. *On Aref's vortex motions with a symmetry center*. Physica D. 1985, v. 16, № 1, p. 27-61.
- [117] Kurakin L. G., Yudovich V. I. *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon*. Chaos. 2002, v. 12, № 3, p. 574-595. (Русскоязычный вариант статьи содержится в данном сборнике).
- [118] Legg S., Jones H., Visbeck M. *A heton perspective of baroclinic eddy transfer in localized open ocean convection*. J. Phys. Oceanogr. 1996, v. 26, № 10, p. 2251-2266.
- [119] Legg S., Marshall J. *A heton model of the spreading phase of open-ocean deep convection*. J. Phys. Oceanogr. 1993, v. 23, № 6, p. 1040-1056.
- [120] Legg S., Marshall J. *The influence of the ambient flow on the spreading of convected water masses*. J. Marine Res. 1998, v. 56, p. 107-139.
- [121] Legras B., Dritschel D. G. *A comparison of the contour surgery and pseudo-spectral method*. J. Comput Phys. 1993, v. 104, p. 287-302.
- [122] Lim C. C., Majda A. J. *Point vortex dynamics for coupled surface/interior QG and propagating heton clusters in models for ocean convection*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2001, v. 94, p. 177-220.
- [123] Lin S.-J. *Contour dynamics of tornado-like vortices*. J. Atmos. Sci. 1992, v. 49, № 18, p. 1745-1756.
- [124] Marshall J. S. *Chaotic oscillations and breakup of quasigeostrophic vortices in the N-layer approximation*. Phys. Fluids. 1995, v. 7, № 5, p. 983-992.
- [125] Marshall J. S., Parthasarathy B. *Tearing of an aligned vortex by a current difference in two-layer quasi-geostrophic flow*. J. Fluid Mech. 1993, v. 225, p. 157-182.
- [126] Marshall J., Schott F. *Open-ocean convection: observation, theory, and models*. Rev. Geophys. 1999, v. 37, № 1, p. 1-64.
- [127] Masuda A., Miki K. *On the stability of baroclinic vortex streets composed of quasi-geostrophic point eddies*. Deep-Sea Res. 1995, v. 42, № 4, p. 437-453.

- [128] Maxworthy T., Narimousa S. *Unsteady, turbulent convection into a homogeneous rotating fluid, with oceanographic applicatios*. J. Phys. Oceanogr. 1994, v. 24, № 5, p. 865-887.
- [129] Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., Zhmur V. V. *The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid*. Dyn. Atmos. Oceans. 1994, v. 21, p. 167-212.
- [130] Meleshko V. V., van Heijst G. J. F. *Interaction of two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties*. Chaos, Solitons & Fractals. 1994, v. 4, № 6, p. 977-1010.
- [131] Morel Y. G., Carton X. J. *Multipolar vortices in two-dimensional incompressible flows*. J. Fluid Mech. 1994, v. 267, p. 23-51.
- [132] Morikawa G. K., Swenson E. V. *Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices*. Phys. Fluids. 1971, v. 14, № 6, p. 1058-1073.
- [133] Narimousa S. *Turbulent convection into a linear stratified fluid: the generation of 'subsurface anticyclones'*. J. Fluid Mech. 1998, v. 354, p. 101-121.
- [134] Olbers D., Wolff J.-O., Volker C. *Eddy fluxes and second-order moment balances for non-homogeneous quasigeostrophic turbulence in wind-driven zonal flows*. J. Phys. Oceanogr. 2000, v. 30, № 7, p. 1645-1668.
- [135] Orlandi P., van Heijst G. F. *Numerical simulation of tripolar vortices in 2D flow*. Fluid Dyn. Res. 1992, v. 9, p. 179-206.
- [136] Pedlosky J. *The instability of continuous heton clouds*. J. Atmos. Sci. 1985, v. 42, № 14, p. 1477-1486.
- [137] Reznik G. M., Grimshaw R. H. J., Sriskanderejan K. *On basic mechanisms governing two-layer vortices on a beta-plane*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1997, v. 86, p. 1-42.
- [138] Rott N. *Three-vortex motion with zero total circulation*. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1989, v. 40, p. 473-494.
- [139] Rott N. *Constrained three- and four-vortex problems*. Phys. Fluids. 1990, v. A 2, № 8, p. 1477-1480.
- [140] Shepherd T. G. *Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics*. Advances in Geophys. 1990, v. 32, p. 287-338.
- [141] Smeed D. A. *Baroclinic instability of three-layer flows. Part 1. Linear stability*. J. Fluid Mech. 1988, v. 194, p. 217-231.

- [142] Smeed D. A. *Baroclinic instability of three-layer flows. Part 2. Experiments with eddies*. J. Fluid Mech. 1988, v. 194, p. 233-259.
- [143] Sokolovskiy M. A. *Stability analysis of the axisymmetric three-layered vortex using contour dynamics method*. Comput. Fluid Dyn. Journal. 1997, v. 6, № 2, p. 133-156.
- [144] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Finite-core hetons: Stability and interactions*. J. Fluid Mech. 2000, v. 423, p. 127-154.
- [145] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Four-vortex motion in the two layer approximation: Integrable case*. Regular & Chaotic Dyn. 2000, v. 5. № 4, p. 413-436.
- [146] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Dynamics of the triangular two-layer vortex structures with zero total intensity*. Regular & Chaotic Dyn. 2002, v. 7. № 4, p. 435-472.
- [147] Spall M. A., Chapman D. C. *On the efficiency of baroclinic eddy heat transport across narrow fronts*. J. Phys. Oceanogr. 1998, v. 28, № 11, p. 2275-2287.
- [148] Stern M. E. *Minimal properties of planetary eddies*. J. Marine Res. 1975, v. 33, № 1, p. 1-13.
- [149] Sutyrin G. G., McWilliams J., Saravanan R. *Co-rotating stationary states and vertical alignment of geostrophic vortices with thin core*. J. Fluid Mech. 1998, v. 357, p. 321-349.
- [150] Thivolle-Cazat E., Sommeria J., Galmiche M., Verron J. *An experimental investigation of heton instability in a rotating, two-layer fluid. Proceedings of the Moscow International Conference on Fluxes and Structures in Fluids*. 2001, p. 205-206.
- [151] Valcke S., Verron J. *On interactions between two finite-core hetons*. Phys. Fluids. 1993, v. A5, № 8, p. 2058-2060.
- [152] Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., van Lipzing N. P. M. *Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole*. J. Fluid Mech. 1996, v. 307, p. 11-41.
- [153] Verron J., Valcke S. *Scale-dependent merging of baroclinic vortices*. J. Fluid Mech. 1994, v. 264, p. 81-106.
- [154] Walsh D., Pratt L. J. *The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear*. Dyn. Atmos. Oceans. 1995, v. 22, p. 135-160.

- [155] Whitehead J. A., Marshall J., Hufford G. E. *Localized convection in a rotating stratified fluid*. J. Geophys. Res. 1996, v. 101, № C10, p. 25705-25721.
- [156] Young W. R. *Some interactions between small numbers of baroclinic, geostrophic vortices*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1985, v. 33, p. 35-61.
- [157] Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V. *Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions*. J. Comput. Phys. 1979, v. 30, № 1, p. 96-106.