



HAL
open science

Inégalités de Calderon-Zygmund, Potentiels et Transformées de Riesz dans des Espaces avec Poids

Chérif Amrouche, Vivette Girault, Jean Giroire

► **To cite this version:**

Chérif Amrouche, Vivette Girault, Jean Giroire. Inégalités de Calderon-Zygmund, Potentiels et Transformées de Riesz dans des Espaces avec Poids. 2006. hal-00222765

HAL Id: hal-00222765

<https://hal.science/hal-00222765>

Preprint submitted on 29 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE MATHÉMATIQUE.- **Inégalités de Calderón-Zygmund, Potentiels et Transformées de Riesz dans des Espaces avec Poids.** Chérif Amrouche, Vivette Girault, Jean Giroire.

Résumé. Nous complétons ici les résultats d'isomorphismes de l'opérateur de Laplace dans des espaces de Sobolev avec poids et nous donnons quelques applications. Parmi celles-ci, nous obtenons des inégalités semblables à celle de Calderón-Zygmund et en particulier des propriétés de continuité des transformées de Riesz dans des espaces avec poids. Nous donnons également des propriétés de potentiels newtoniens de certaines distributions.

MATHEMATICAL ANALYSIS.- **Calderón-Zygmund Inequalities, Riesz Potentials and Transforms in Weighted Spaces.**

Abstract. In this Note, we give complete isomorphism results for Laplace's operator in weighted Sobolev spaces and we derive some applications. In particular, we establish inequalities similar to those of Calderón-Zygmund and continuity properties of Riesz's transforms in weighted spaces. We also prove some properties of the newtonian potentials of some distributions.

Abridged English Version. Our main results are stated in the following theorem:

Theorem. *i) For any integer l in \mathbb{N} , there exists a constant $C > 0$ such that for every function u of $\mathcal{D}(R^n)$,*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_l^{0,p}(R^n)} &\leq C \|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)}, \text{ iff } n/p' \notin \{1, \dots, l\}, \\ \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_{-l}^{0,p}(R^n)} &\leq C \|\Delta u\|_{W_{-l}^{0,p}(R^n)} \text{ iff } n/p > l. \end{aligned}$$

In particular, the following compound mappings are continuous:

$$\begin{aligned} R_j \circ R_k &: W_l^{0,p}(R^n) \mapsto W_l^{0,p}(R^n) \text{ if } n/p' > l, \\ R_j \circ R_k &: W_{-l}^{0,p}(R^n) \mapsto W_{-l}^{0,p}(R^n) \text{ if } n/p > l. \end{aligned}$$

ii) Let l belong to \mathbf{Z} . Every distribution u of $\mathcal{S}'(R^n)$ such that Δu belongs to $W_l^{0,p}(R^n)$ belongs itself to $W_l^{2,p}(R^n)$ and if $\frac{n}{p} > -l + 2$ and, for positive l , $\frac{n}{p'} \notin \{1, \dots, l\}$, there exists a constant $C > 0$, independent of u , such that

$$\|u\|_{W_l^{2,p}(R^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)}.$$

1. Cadre fonctionnel et notations.

Nous rappelons quelques notations. Pour tout $q \in \mathbf{N}$, \mathcal{P}_q (respectivement \mathcal{P}_q^Δ) désigne l'espace des polynômes (respectivement polynômes harmoniques) de degré $\leq q$. Si q est un entier strictement négatif, on pose $\mathcal{P}_q = \{0\}$. Soient $m \in \mathbf{N}$ et α, β et p trois réels avec $1 < p < \infty$. On introduit l'espace de Sobolev avec poids $\rho = (1 + r^2)^{1/2}$, $\lg r = \ln(2 + r^2)$ où $r = |x|$:

$$W_{\alpha, \beta}^{m, p}(\mathbf{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) ; 0 \leq |\lambda| \leq k, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^{\beta-1} D^\lambda u \in L^p(\mathbf{R}^n) ; \\ k+1 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^\beta D^\lambda u \in L^p(\mathbf{R}^n)\}, \quad (1)$$

où

$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} m - \frac{n}{p} - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \dots, m\}, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui est un Banach pour sa norme naturelle et qui sera noté plus simplement par $W_\alpha^{m, p}(\mathbf{R}^n)$ si $\beta = 0$. Le dual de $W_\alpha^{m, p}(\mathbf{R}^n)$ est noté $W_{-\alpha}^{-m, p'}(\mathbf{R}^n)$ avec $1/p + 1/p' = 1$. De même, pour $m \in \mathbf{Z}$, $l, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ et $1 < p < \infty$, on pose :

$$X_l^{m+l, p}(\mathbf{R}^n) = \{u \in W_0^{m, p}(\mathbf{R}^n) \mid \\ \forall \lambda \in \mathbf{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq l, x^\lambda u \in W_0^{m+|\lambda|, p}(\mathbf{R}^n) ; u \in W_{\text{loc}}^{m+l, p}(\mathbf{R}^n)\},$$

et on note $X_{-l}^{-m-l, p'}(\mathbf{R}^n)$ son dual. Dans tout ce travail, on notera que si l'entier q est négatif ou nul, alors $\{1, \dots, q\}$ est vide.

2. Théorèmes d'isomorphismes.

Certains des isomorphismes ci-dessous sont une version améliorée de [1] et [2].

Théorème 1. *Soient m et l deux entiers naturels quelconques. Alors, les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\begin{aligned} \Delta : W_{-l}^{1, p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta &\mapsto W_{-l}^{-1, p}(\mathbf{R}^n) \quad \text{si } \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, l\} \text{ et } l \neq 0, \\ \Delta : X_{-l}^{1, p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_1 &\mapsto W_{-l}^{-1, p}(\mathbf{R}^n) \quad \text{si } \frac{n}{p} = l, \\ \Delta : X_{-l}^{1, p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta &\mapsto X_{-l}^{-1, p}(\mathbf{R}^n) \quad \text{si } \frac{n}{p} \in \{1, \dots, l-1\}, \\ \Delta : W_m^{1+m, p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[1-n/p]} &\mapsto W_m^{-1+m, p}(\mathbf{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']} \quad \text{si } \frac{n}{p'} \neq 1 \text{ ou } m = 0, \\ \Delta : W_m^{1+m, p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[1-n/p]} &\mapsto X_m^{-1+m, p}(\mathbf{R}^n) \perp \mathcal{P}_0 \quad \text{si } \frac{n}{p'} = 1, m \neq 0. \end{aligned}$$

Théorème 2. Soient m et l deux entiers strictement positifs. Alors les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \Delta : X_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta &\mapsto X_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbf{R}^n) && \text{si } m < l, \frac{n}{p} \in \{1, \dots, l-m\}, \\ \Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbf{R}^n) / \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta &\mapsto W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbf{R}^n) && \text{si } m \geq l \text{ ou } \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, l-m\}, \\ \Delta : W_{l+m}^{1+m,p'}(\mathbf{R}^n) &\mapsto W_{l+m}^{-1+m,p'}(\mathbf{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta && \text{si } \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, l+1\}, \\ \Delta : X_{l+m}^{1+m,p'}(\mathbf{R}^n) &\mapsto X_{l+m}^{-1+m,p'}(\mathbf{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta && \text{si } \frac{n}{p} \in \{1, \dots, l-1\}, \\ \Delta : W_{l+m}^{1+m,p'}(\mathbf{R}^n) &\mapsto X_{l+m}^{-1+m,p'}(\mathbf{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[l+1-n/p]} && \text{si } \frac{n}{p} \in \{l, l+1\}. \end{aligned}$$

Remarque 1. On notera que le quatrième isomorphisme du Théorème 1 ainsi que les deuxième et troisième du Théorème 2 sont partiellement contenus dans les travaux de Lockhart [6] (et d'autres auteurs), lequel s'est servi des résultats de Nirenberg-Walker [7]. Notre approche, qui est fondamentalement différente, nous permet d'obtenir des résultats plus complets qui excluent moins de valeurs critiques des rapports n/p ou n/p' grâce à l'utilisation des poids logarithmiques. Par ailleurs, les autres isomorphismes, et notamment le premier isomorphisme fondamental du Théorème 1, sont tous originaux.

La proposition qui suit améliore la Proposition 2 de la Note [2] et montre à quel point les espaces X et W sont proches.

- Proposition 1.** (i) Si $m \in \mathbf{Z}, l \in \mathbf{N}$, alors $W_{l,1}^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) \subset X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) \subset W_{l,-1}^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$.
(ii) Si $m \in \mathbf{N}, l \in \mathbf{N}$ ou si $m \in \mathbf{Z}$ et $l = 0$, alors $X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) = W_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$.
(iii) Si $-m \in \mathbf{N}^*, l \in \mathbf{N}^*$, on a $X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) = W_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si $\frac{n}{p'} \notin \{1, \dots, \min(-m, l)\}$.
(iv) Soit $-m \in \mathbf{N}^*$ et $l \in \mathbf{N}^*$. Lorsque $m+l \geq 0$, on a toujours $X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) \subset W_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$. Lorsque $m+l < 0$, on a $X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) \subset W_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$ si $\frac{n}{p'} \notin \{1+l, \dots, -m\}$ et $W_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n) \subset X_l^{m+l,p}(\mathbf{R}^n)$ si $\frac{n}{p'} \notin \{1, \dots, l\}$.

3. Inégalités de Calderón-Zygmund avec poids.

Soit $R_j f = v.p.(f \star \frac{x_j}{|x|^{n+1}})$ la transformée de Riesz de la fonction f . On sait que sa transformée de Fourier vérifie (voir [9]) : $\widehat{R_j f} = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}$, $j = 1, \dots, n$ et les applications $R_j : L^p(\mathbf{R}^n) \mapsto L^p(\mathbf{R}^n)$ sont continues. De plus, comme $R_j \circ R_k(\Delta u) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$, on en déduit l'inégalité de Calderón-Zygmund [5] pour toute fonction u de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$:

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}. \quad (2)$$

Nous allons voir qu'on peut démontrer des inégalités similaires avec des poids. C'est l'objet de la

Proposition 2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction u de $\mathcal{D}(R^n)$:*

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_1^{0,p}(R^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(R^n)} \text{ ssi } n/p' \neq 1, \quad (3)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_{-1}^{0,p}(R^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_{-1}^{0,p}(R^n)} \text{ ssi } n/p > 1. \quad (4)$$

En particulier, les applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} R_j \circ R_k &: W_1^{0,p}(R^n) \mapsto W_1^{0,p}(R^n) \text{ si } n/p' > 1, \\ R_j \circ R_k &: W_{-1}^{0,p}(R^n) \mapsto W_{-1}^{0,p}(R^n) \text{ si } n/p > 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Les estimations (3) et (4) découlent du fait que les opérateurs

$$\begin{aligned} \Delta &: W_1^{2,p}(R^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \mapsto W_1^{0,p}(R^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p]}, \\ \Delta &: W_{-1}^{2,p}(R^n)/\mathcal{P}_{[3-n/p]}^\Delta \mapsto W_{-1}^{0,p}(R^n) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes si $n/p' \neq 1$ (respectivement si $n/p \neq 1$) (voir [1] [2] [3]). Réciproquement, si l'estimation (3) était satisfaite pour $n/p' = 1$, le premier opérateur serait encore un isomorphisme. En prenant $m = 1$ dans le cinquième opérateur du Théorème 1, on aurait alors l'identité $X_1^{0,p}(R^n) = W_1^{0,p}(R^n)$, ce qui est faux. On montre par un raisonnement similaire que la condition $n/p > 1$ est nécessaire pour l'estimation (4). \square

Remarque 2. Si $n/p' = 1$, on peut remplacer l'inégalité (3) par l'une des estimations :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_1^{0,p}(R^n)} &\leq C(\|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(R^n)} + \|\Delta u\|_{W_0^{-1,p}(R^n)}), \\ \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_1^{0,p}(R^n)} &\leq C(\|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(R^n)} + \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(R^n)}). \end{aligned}$$

De même si $n/p \leq 1$, on peut remplacer l'estimation (4) par :

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_{-1}^{0,p}(R^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_{-1}^{0,p}(R^n)} + \|u\|_{W_{-3}^{0,p}(R^n)}).$$

Par ailleurs, nous ne savons pas démontrer la continuité des applications $R_j : W_1^{0,p}(R^n) \mapsto W_1^{0,p}(R^n)$, mais seulement celle de leurs composées si $n/p' > 1$.

Plus généralement, on a la

Proposition 3. *Pour tout entier naturel l , il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction u de $\mathcal{D}(R^n)$:*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_l^{0,p}(R^n)} &\leq C \|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)} \text{ ssi } n/p' \notin \{1, \dots, l\}, \\ \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_{-l}^{0,p}(R^n)} &\leq C \|\Delta u\|_{W_{-l}^{0,p}(R^n)} \text{ ssi } n/p > l. \end{aligned}$$

En particulier, les applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} R_j \circ R_k : W_l^{0,p}(R^n) &\mapsto W_l^{0,p}(R^n) \text{ si } n/p' > l, \\ R_j \circ R_k : W_{-l}^{0,p}(R^n) &\mapsto W_{-l}^{0,p}(R^n) \text{ si } n/p > l. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la Proposition 2, il suffit de supposer $l \geq 2$ et d'utiliser le fait que les opérateurs

$$\begin{aligned} \Delta : W_l^{2,p}(R^n) &\mapsto W_l^{0,p}(R^n) \perp \mathcal{P}_{[l-n/p']}, \\ \Delta : W_{-l}^{2,p}(R^n) / \mathcal{P}_{[2+l-n/p]}^\Delta &\mapsto W_{-l}^{0,p}(R^n) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes si $n/p' \notin \{1, \dots, l\}$ dans le premier cas et $n/p \notin \{1, \dots, l\}$ dans le second cas (voir [1], [2], [3]). Enfin, comme à la Proposition 2, on peut montrer que les conditions ci-dessus sont nécessaires. \square

Remarque 3. Comme à la Remarque 2, les estimations ci-dessus sont fausses si $n/p' \in \{1, \dots, l\}$ ou $n/p \leq l$. Dans le premier cas, on a l'estimation

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{W_l^{0,p}(R^n)} \leq C \left(\sum_{|\nu|=0}^{|\nu|=l-1} \|x^\nu \Delta u\|_{W_0^{-l+|\nu|,p}(R^n)} + \|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)} \right).$$

Mais cette estimation n'est pas optimale, car certains termes de la somme du membre de droite sont superflus, suivant la position de n/p' dans l'ensemble $\{1, \dots, l\}$ (voir [1], [2], [3]). C'est pourquoi nous donnerons en Proposition 6 une estimation plus utile.

4. Normes équivalentes.

Dans ce paragraphe, C désignera une constante positive, dépendant de la dimension n , de l'exposant p , mais jamais des fonctions considérées. Rappelons un résultat dû à Nirenberg-Walker [7] :

$$\|u\|_{W_l^{2,p}(R^n)} \leq C (\|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)} + \|u\|_{W_{l-2}^{0,p}(R^n)}) \text{ si } n/p + l \notin \{1, \dots, l\}, \quad (5)$$

$$\sum_{0 \leq |\lambda| \leq 2} \|\rho^{l-2+|\lambda|} D^\lambda u\|_{L^p(R^n)} \leq C (\|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(R^n)} + \|u\|_{W_{l-2}^{0,p}(R^n)}) \text{ sinon,} \quad (6)$$

pour tout $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u \in W_{l-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta u \in W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec l entier relatif quelconque. Les Propositions 4-7 montrent que les estimations (5) et (6) peuvent être améliorées en introduisant des poids logarithmiques.

Proposition 4. *i) Soit $u \in W_{-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p \notin \{1, 2\}$, alors $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|u\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}).$$

ii) Soit $u \in W_{-2,-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p \in \{1, 2\}$, alors $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-2,-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}).$$

iii) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p > 2$, alors $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque 4. Comme pour l'inégalité de Poincaré généralisée, on peut montrer que pour tout réel $R > 0$, il existe une constante C_R tel que :

$$\|u\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_R(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + |\int_{B(O,R)} u \, dx|) \quad \forall u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 5. *1. Supposons $n/p' \neq 1$.*

i) Soit $u \in W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p \neq 1$, alors $u \in W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}). \quad (7)$$

ii) Soit $u \in W_{-1,-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p = 1$, alors $u \in W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-1,-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}). \quad (8)$$

iii) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p > 1$, alors $u \in W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Delta u\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

2. Supposons $n/p' = 1$ et soit $u \in W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p \neq 1$, alors $u \in W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et l'estimation (7) a lieu.

Plus généralement, on a la

Proposition 6. Soit $l \geq 2$ un entier naturel quelconque.

i) Soit $n/p' \notin \{1, \dots, l\}$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

ii) Soit $n/p' \in \{l-1, l\}$ et $u \in W_{l-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{l-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}).$$

Remarque 5. Dans le cas où $n/p' \in \{1, \dots, l-2\}$, la dernière estimation a encore lieu comme le montre la relation (6). Néanmoins, on ne peut pas utiliser le quatrième isomorphisme du Théorème 2 car celui-ci opère sur des espaces du type X et non W .

De la même manière, nous avons pour les poids négatifs la

Proposition 7. Soit l un entier strictement positif et $n/p \notin \{1, \dots, l\}$. Alors

$$\|u\|_{W_{-l}^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ si } n/p > l + 2,$$

$$\|u\|_{W_{-l}^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-l-2}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}) \text{ si } n/p \leq l + 2,$$

$$\|u\|_{W_{-l}^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\Delta u\|_{W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_{-l-2,-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)}) \text{ si } n/p \in \{l+1, l+2\}.$$

Remarque 6. Comme à la remarque précédente, si $n/p \in \{1, \dots, l\}$, la deuxième estimation est encore vraie (voir [7]).

Conjecture. Lorsque $n/p' = 1$ et $n/p = 1$ (c'est-à-dire $n = p = 2$), on pose la conjecture suivante : l'estimation (8) a lieu.

6. Transformation de potentiel.

Si f est une distribution sur \mathbb{R}^n , on pose $Tf = F \star f$, où $F(x) = C|x|^{2-n}$ avec $n \geq 3$. On rappelle que F est la solution élémentaire du laplacien et bien sûr Tf , qui est appelé potentiel newtonien de f ou aussi transformation de potentiel d'ordre 2, n'a de sens que pour certaines distributions. Nous donnons ici quelques propriétés de cet opérateur.

Théorème 3. i) L'opérateur $T : W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \mapsto W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est continu si $n/p > 1$ et $n/p' > 1$. En particulier, sous ces mêmes conditions, l'opérateur $T : W_1^{0,p}(\mathbb{R}^n) \mapsto W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ est continu.

ii) Plus généralement, pour tout entier relatif l et tout entier naturel m , l'opérateur $T : W_l^{-1-m,p}(\mathbf{R}^n) \mapsto W_l^{1-m,p}(\mathbf{R}^n)$ est continu si $n/p' > l + 1 + m$ et $n/p > -l + 1 - m$. En particulier, pour $m = 0$, les opérateurs

$$T : W_l^{-1,p}(\mathbf{R}^n) \mapsto W_l^{1,p}(\mathbf{R}^n), \quad T : W_{l+1}^{0,p}(\mathbf{R}^n) \mapsto W_{l-1}^{0,p}(\mathbf{R}^n)$$

sont continus si $n/p' > l + 1$ et $n/p > -l + 1$. □

En utilisant les injections de Sobolev, nous retrouvons grâce au point i) du Théorème 3 le Théorème de Hardy-Littlewood-Soboleff-Thorin [8] [9] énoncé dans le corollaire ci-dessous. Si notre résultat semble plus fort, néanmoins ces derniers ont traité le cas plus général de potentiel d'ordre $\alpha \in]0, n[$, les deux premiers pour le cas $n = 1$, les autres pour des dimensions quelconques.

Corollaire 1. L'application $T : L^s(\mathbf{R}^n) \mapsto L^r(\mathbf{R}^n)$, où $1/r = 1/s - 2/n$, est continue pour tout réel $s > 1$ tel que $n/s > 2$. □

Une autre conséquence du Théorème 3 est donnée par le

Théorème 4. i) L'opérateur $T : L^s(\mathbf{R}^n) \mapsto W_0^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ où $1/s = 1/p + 1/n$, est bien défini si $n/p < 1$ et vérifie :

$$\|\nabla(Tf)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^s(\mathbf{R}^n)}.$$

ii) En particulier, l'opérateur $T : L^s(\mathbf{R}^n) \mapsto C^{0,1-n/p}(\mathbf{R}^n)$ est continu.

Commentaires. Les résultats ci-dessus donnent en particulier des applications intéressantes pour l'équation de la chaleur et les équations de Stokes ; ce travail sera publié ultérieurement ainsi que le cas des poids réels.

- [1] Amrouche, C.; Girault, V.; Giroire, J.: *Espaces de Sobolev avec poids et équation de Laplace dans \mathbf{R}^n* , Partie I, C. R. Acad. Sci. Paris, 315, série I, p. 269-274, 1992
- [2] Amrouche, C.; Girault, V.; Giroire, J.: *Espaces de Sobolev avec poids et équation de Laplace dans \mathbf{R}^n* , Partie II, C. R. Acad. Sci. Paris, 315, série I, p. 889-894, 1992
- [3] Amrouche, C.; Girault, V.; Giroire, J.: *Weighted Sobolev Spaces for the Laplace equation in \mathbf{R}^n* , Part I-II (en préparation)
- [4] Calderón, A.P.: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. t.24, p. 113-190, 1964

- [5] Calderón, A.P. ; Zygmund, A.: *Singular integral operators and differential equations*, Amer. J. Math., vol **79**, 901-921, 1957
- [6] Lockhart, R.B.; *Fredholm properties of a class of elliptic operators on non-compact manifolds*, Duke Math. J. **48**, N°1, 1981
- [7] Nirenberg, L. ; Walker, H.: *The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n* , J. Math. Anal. Appl., vol **42**, p. 271-301, 1973
- [8] Peetre, J.: *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. **16**, p. 276-317, 1966
- [9] Stein, E. M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970

Chérif Amrouche

Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau, UMR CNRS 5142, IPRA, Av. de l'Université, BP 1155, 64013 PAU Cedex, France

Vivette Girault

Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques Louis Lions, BP 187, 4 Place Jussieu F-75252 Paris Cedex 05, France

Jean Giroire

Université de Technologie de Compiègne, Centre Benjamin Franklin, B.P.649 Compiègne 60206 Cedex, France