



HAL
open science

Instabilité des cocycles d'évolution fortement mesurables dans des espaces de Banach

Codruța Stoica

► **To cite this version:**

Codruța Stoica. Instabilité des cocycles d'évolution fortement mesurables dans des espaces de Banach. 2008. hal-00212041

HAL Id: hal-00212041

<https://hal.science/hal-00212041>

Preprint submitted on 22 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTABILITÉ DES COCYCLES D'ÉVOLUTION FORTEMENT MESURABLES DANS DES ESPACES DE BANACH

CODRUȚA STOICA

Résumé. Le but de cet étude est de présenter quelques comportements asymptotiques concernant les cocycles d'évolution dans des espaces de Banach, comme, par exemple, la décroissance exponentielle, l'instabilité, l'instabilité exponentielle et l'instabilité intégrale. Des relations entre ces propriétés sont aussi démontrées. Deux théorèmes de type Datko sont énoncés et démontrés comme résultats principaux. En même temps un outil d'étude non uniforme est fourni.

Mathematics Subject Classification: 93D20

Mots-clefs: cocycle d'évolution fortement mesurable, décroissance exponentielle, instabilité exponentielle, instabilité intégrale

Abstract. The aim of the paper is to present various asymptotic behaviors of skew-evolution semiflows in Banach spaces, as exponential decay, instability, exponential instability and integral instability. Relations between these asymptotic properties are also given. As main results, two Datko type theorems are proved. A unified nonuniform approach is provided.

Keywords: strongly measurable skew-evolution semiflows, exponential decay, exponential instability, integral instability

1. INTRODUCTION

Dans l'approfondissement de l'étude d'un cas particulier d'un concept de cocycle d'évolution introduit dans l'ouvrage [3], concernant les équations d'évolution, l'approche par la théorie des opérateurs d'évolution a été essentielle. La notion s'est montrée plus appropriée dans le cas non uniforme des comportements asymptotiques. Des propriétés asymptotiques pour le cas particulier de cocycles d'évolution ont été présentées dans l'article [3] et aussi dans [4]. L'instabilité a été étudiée dans [5] dans le cadre uniforme pour des opérateurs d'évolution. Des résultats concernant la stabilité et l'instabilité ont été liés à l'étude de la trichotomie dans [6] dans le cas des opérateurs d'évolution.

Quelques caractérisations pour la propriété de stabilité et d'instabilité pour les cocycles relatifs aux semiflotes ont été présentées dans [2]. En général, dans ce cas là, aborder le problème du point de vue des semigroupes d'opérateurs a joué un rôle important.

Nous envisageons de présenter dans cet article de nouvelles définitions pour les notions de semiflot d'évolution et de cocycle d'évolution, ainsi que la propriété d'instabilité exponentielle, traitée dans le cas non uniforme. Nous faisons la remarque que l'approche est différente de la caractérisation

de ce comportement asymptotique faite dans [3], où dans la définition d'un cocycle d'évolution nous avons supposé aussi la croissance exponentielle. Au contraire, dans l'étude ci-présente on utilise la décroissance exponentielle et la propriété d'instabilité intégrale. Notre intention est d'étendre grâce aux Théorème 4.1 et Théorème 4.2 le résultat classique et bien connu contenu dans le Théorème 11 de l'ouvrage [1], concernant le cas de la stabilité uniforme exponentielle. Nos démonstrations ne sont pas de simples généralisations parce que dans notre étude les cocycles d'évolution considérés sont d'un type plus général et pas nécessairement fortement continus. Le cadre non uniforme est plus général et les résultats obtenus peuvent être appliqués pour des caractérisations similaires pour le cas d'opérateurs d'évolution.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

On considère un espace métrique \mathcal{X} , un espace de Banach \mathcal{V} . Soit $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ l'espace de tous les opérateurs bornés, définis sur \mathcal{V} à valeurs dans \mathcal{V} . On note par $\|\cdot\|$ la norme des vecteurs sur \mathcal{V} et des opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{V})$.

Soit \mathcal{T} l'ensemble de toutes les paires (t, s) des nombres réels non négatifs tels que $t \geq s$. On note $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$ et I l'opérateur identité sur \mathcal{V} .

Définition 2.1 Une application $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ qui vérifie les propriétés

$$(es_1) \quad \varphi(t, t, x) = x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$$

$$(es_2) \quad \varphi(t, s, \varphi(s, t_0, x)) = \varphi(t, t_0, x), \quad \forall (t, s), (s, t_0) \in \mathcal{T}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

est appelée *semiflot d'évolution* sur \mathcal{X} .

Définition 2.2 Une application $\Phi : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V})$ qui satisfait les conditions suivantes

$$(ec_1) \quad \Phi(t, t, x) = I, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

$$(ec_2) \quad \Phi(t, t_0, x) = \Phi(t, s, \varphi(s, t_0, x))\Phi(s, t_0, x), \quad \forall (t, s), (s, t_0) \in \mathcal{T}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

s'appelle *application cocyclique d'évolution* relative au semiflot d'évolution $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Définition 2.3 Une application $\xi : \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ définie par

$$(2.1) \quad \xi(t, s, x, v) = (\varphi(t, s, x), \Phi(t, s, x)v), \quad \forall (t, s, x, v) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$$

où Φ est une application cocyclique d'évolution relative au semiflot d'évolution φ , est appelée *cocycle d'évolution* sur \mathcal{Y} .

Exemple 2.1 Soit l'espace métrique $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$ muni de la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

où

$$d_n(x, y) = \sup_{t \in [0, n]} |x(t) - y(t)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère une fonction décroissante

$$x_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{1}{2n+1}.$$

On note

$$x_n^s(t) = x_n(t + s), \quad \forall t, s \geq 0$$

et soit \mathcal{X} l'adhérence dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de l'ensemble $\{x_n^s, n \in \mathbb{N}^*, s \in \mathbb{R}_+\}$. Alors l'application

$$\varphi : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \varphi(t, s, x) = x_{t-s}, \quad \text{où } x_{t-s}(\tau) = x(t - s + \tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

est un semiflot d'évolution sur \mathcal{X} .

Si on considère l'espace de Banach $\mathcal{V} = \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ muni de la norme

$$\|(v_1, \dots, v_p)\| = |v_1| + \dots + |v_p|,$$

alors l'application $\Phi : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V})$ définie par

$$\Phi(t, s, x)(v_1, \dots, v_p) = \left(e^{\alpha_1 \int_s^t x(\tau-s)d\tau} v_1, \dots, e^{\alpha_p \int_s^t x(\tau-s)d\tau} v_p \right),$$

où on considère $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ fixé, est une application cocyclique d'évolution.

Alors $\xi = (\varphi, \Phi)$ est un cocycle d'évolution sur \mathcal{Y} .

Définition 2.4 L'application $\xi_\gamma : \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ définie par

$$(2.2) \quad \xi_\gamma(t, s, x, v) = (\varphi(t, s, x), e^{-\gamma(t-s)} \Phi(t, s, x)v), \quad \forall (t, s) \in \mathcal{T}, \forall (x, v) \in \mathcal{Y},$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, est nommée *cocycle d'évolution shift* sur \mathcal{Y} .

On va noter par la suite

$$e^{-\gamma(t-s)} \Phi(t, s, x)v = \Phi_\gamma(t, s, x)v, \quad (t, s) \in \mathcal{T}, \quad (x, v) \in \mathcal{Y}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dans cet article on étudie une classe particulière de cocycles d'évolution introduits dans la définition suivante.

Définition 2.5 Un cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ est nommé *fortement mesurable* si l'application donnée par $t \rightarrow \|\Phi(t, s, x)v\|$ est mesurable, pour tout $(s, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y}$.

On note

$$\mathcal{F} = \{f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \mid f \text{ fonction décroissante, } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0\}.$$

Pour approcher la propriété de l'instabilité, on va proposer la classe suivante des cocycles d'évolution.

Définition 2.6 Un cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ est dit avoir *décroissance exponentielle* s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que

$$(2.3) \quad \|\Phi(t + t_0, t_0, x)v\| \geq f(t) \|v\|, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \forall (x, v) \in \mathcal{Y}.$$

Nous avons présenté une définition assez générale. Le résultat suivant peut être considéré comme une caractérisation classique pour la propriété de décroissance exponentielle.

Proposition 2.1 *Le cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ a une décroissance exponentielle si et seulement s'ils existent des constantes $\tilde{N} > 1$ et $\omega > 0$ telles que*

$$\tilde{N} \|\Phi(t + t_0, t_0, x)v\| \geq e^{-\omega t} \|v\|, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \forall (x, v) \in \mathcal{Y}.$$

Démonstration. Nécessité. On considère une fonction $f \in \mathcal{F}$. Alors il existe $\mu > 0$ tels que $f(\mu) < 1$. De plus, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, \mu)$ tel que

$$t = k\mu + r, \forall t \geq 0.$$

On obtient les inégalités

$$\begin{aligned} \|\Phi(t + t_0, t_0, x)v\| &\geq f(r) \|\Phi(k\mu + t_0, t_0, x)v\| \geq \\ &\geq f(r)f(\mu) \|\Phi((k-1)\mu + t_0, t_0, x)v\| \geq \dots \geq f(r)f(\mu)^k \|v\| \end{aligned}$$

qui sont vérifiées pour tout $t, t_0 \geq 0$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$.

La définition de la décroissance exponentielle pour ξ est alors obtenue si on note

$$\tilde{N} = \frac{1}{f(\mu)} > 1 \text{ et } \omega = -\frac{1}{\mu} \ln f(\mu) > 0.$$

Suffisance. On considère la fonction donnée par $f(t) = e^{-\omega t}$, ce qui achève la démonstration. \square

On va présenter plusieurs catégories de propriétés asymptotiques pour les cocycles d'évolution.

Définition 2.7 Un cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ est dit *instable* s'il existe une application $N : [0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ telle que

$$(2.4) \quad N(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\| \geq \|v\|, \forall (t, t_0) \in \mathcal{T}, \forall (x, v) \in \mathcal{Y}.$$

Définition 2.8 Le cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ est nommé *exponentiellement instable* s'il existe une fonction $N : [0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ et une constante $\nu > 0$ avec la propriété

$$(2.5) \quad N(t)e^{-\nu(t-s)} \|\Phi(t, t_0, x)v\| \geq \|\Phi(s, t_0, x)v\|,$$

pour tout $(t, s), (s, t_0) \in \mathcal{T}$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$.

Exemple 2.2 On considère $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Nous définissons l'application $\Phi : \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\Phi(t, s, x)v = ve^{t-s-2t \sin \frac{\pi}{4}t + 2s \sin \frac{\pi}{4}s}, \quad (t, s, x, v) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

qui est une application cocyclique d'évolution.

Alors $\xi = (\varphi, \Phi)$ est un cocycle d'évolution sur $\mathcal{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ pour tout semiflot d'évolution $\varphi : \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, exponentiellement instable avec $N(t) = e^{4t}$ et $\nu = 3$.

Définition 2.9 Le cocycle d'évolution $\xi = (\varphi, \Phi)$ est appelé *intégralement instable* s'il est fortement mesurable et s'il existe $M : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ telle que la relation suivante est vérifiée

$$(2.6) \quad \int_0^t \|\Phi(\tau, t_0, x)v\| d\tau \leq M(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\|,$$

pour tout $(t, t_0) \in \mathcal{T}$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$.

3. CARACTÉRISATIONS DE L'INSTABILITÉ EXPONENTIELLE

Remarque 3.1 Analogue au cas uniforme présenté dans [5], un cocycle d'évolution exponentiellement instable est instable et possède la propriété de décroissance exponentielle.

D'autres connections qu'on peut établir entre les propriétés asymptotiques présentées dans Définition 2.5, Définition 2.6, Définition 2.7, Définition 2.8 et Définition 2.9 sont données par les propositions suivantes.

Proposition 3.1 *Un cocycle d'évolution intégralement instable $\xi = (\varphi, \Phi)$ ayant la propriété de décroissance exponentielle est instable.*

Démonstration. On considère une fonction $f \in \mathcal{F}$ donnée comme dans la Définition 2.6.

Ensuite on va noter $K = \int_0^1 f(\tau) d\tau$.

On obtient successivement

$$\begin{aligned} K \|v\| &= \int_0^1 f(\tau) \|v\| d\tau = \int_{t_0}^{t_0+1} f(u - t_0) \|v\| du \leq \\ &\leq \int_0^t \|\Phi(u, t_0, x)v\| du \leq M(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\| \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_0 + 1 > t_0 \geq 0$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$, l'existence de la fonction $M : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ étant assurée par la Définition 2.9.

Maintenant, si $t \in [t_0, t_0 + 1)$, on a pour tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$

$$\|\Phi(t, t_0, x)v\| \geq f(t - t_0) \|v\| \geq f(1) \|v\|.$$

Alors, si on définit

$$N(t) = [f(1)]^{-1} + K^{-1}M(t), \forall t \geq 0,$$

on obtient la conclusion. \square

Une caractérisation intéressante pour l'instabilité exponentielle est présentée en faisant appel à la Définition 2.4.

Proposition 3.2 *Soit $\xi = (\varphi, \Phi)$ un cocycle d'évolution fortement mesurable ayant décroissance exponentielle. Alors ξ est exponentiellement instable si et seulement s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que le cocycle d'évolution shift $\xi_\alpha = (\varphi, \Phi_\alpha)$ soit intégralement instable.*

Démonstration. Nécessité. On définit

$$\alpha = \frac{\nu}{2} > 0,$$

où l'existence de ν est assurée par l'hypothèse et la Définition 2.8, ce qui nous permet d'obtenir les relations suivantes

$$\int_0^t \|\Phi_\alpha(s, t_0, x)v\| ds = \int_0^t e^{-\alpha(s-t_0)} \|\Phi(s, t_0, x)v\| ds \leq$$

$$\leq N(t) \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s-t_0)} \|\Phi(t, t_0, x)v\| e^{-\nu(t-s)} ds \leq \alpha^{-1} N(t) \|\Phi_\alpha(t, t_0, x)v\|,$$

pour tout $(t, t_0) \in \mathcal{T}$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$.

Donc, l'instabilité intégrale pour le cocycle d'évolution shift est prouvée.

Suffisance. On note

$$K = \int_0^1 e^{-\alpha u} f(u) du,$$

où la fonction $f \in \mathcal{F}$ satisfait la relation (2.3).

On obtient successivement

$$\begin{aligned} K \|v\| &= \int_{t_0}^{t_0+1} e^{-\alpha(\tau-t_0)} f(\tau-t_0) \|\Phi(t_0, t_0, x)v\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+1} e^{-\alpha(\tau-t_0)} \|\Phi(\tau, t_0, x)v\| d\tau \leq M(t) \|\Phi_\alpha(t, t_0, x)v\| = \\ &= M(t) e^{-\alpha(t-t_0)} \|\Phi(t, t_0, x)v\| \end{aligned}$$

pour tout $(t, t_0) \in \mathcal{T}$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$.

Alors ξ est exponentiellement instable. \square

4. GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME DE DATKO DANS LE CAS DE L'INSTABILITÉ EXPONENTIELLE

Dans cette partie nous allons démontrer deux caractérisations pour la propriété d'instabilité exponentielle dans le cas non uniforme. Le premier théorème implique l'instabilité ainsi que de l'instabilité intégrale.

Théorème 4.1 *Un cocycle d'évolution fortement continu ξ est exponentiellement instable si et seulement s'il est instable et intégralement instable.*

Démonstration. Nécessité. Si $\xi = (\varphi, \Phi)$ est exponentiellement instable, alors, par la Remarque 3.1, ξ est aussi instable.

Il existe $N : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ et $\nu > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\Phi(\tau, t_0, x)v\| d\tau &\leq N(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\| \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq \nu^{-1} N(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\| \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_0 \geq 0$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$, et alors la propriété de l'instabilité intégrale est prouvée.

Suffisance. L'instabilité de ξ implique la décroissance exponentielle et ensuite, l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que, pour tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$, on peut écrire

$$\|\Phi(s, t_0, x)v\| \leq \frac{1}{f(u-s)} \|\Phi(u, t_0, x)v\|, \forall t \geq u \geq s \geq t_0 \geq 0.$$

D'après les propriétés de la fonction f on obtient

$$(t-t_0) \|v\| \leq \frac{1}{f(t)} \int_{t_0}^t \|\Phi(u, t_0, x)v\| du \leq \widetilde{M}(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\|,$$

pour tout $(t, t_0) \in \mathcal{T}$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$, où on a noté

$$\widetilde{M}(t) = \frac{M(t)}{f(t)}, t \geq 0,$$

l'existence de la fonction $M : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ étant assurée par l'hypothèse et par la Définition 2.9.

Alors, on a prouvé l'instabilité exponentielle de ξ . \square

Une autre caractérisation pour la propriété de l'instabilité exponentielle d'un cocycle d'évolution est obtenue à l'aide de la décroissance exponentielle et de l'instabilité intégrale.

Théorème 4.2 *Un cocycle d'évolution fortement mesurable ξ est exponentiellement instable si et seulement s'il est exponentiellement décroissant et intégralement instable.*

Démonstration. Nous allons démontrer premièrement qu'un cocycle d'évolution ayant une décroissance exponentielle est instable s'il existe une application $\widetilde{M} : [0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ telle que

$$\widetilde{M}(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\| \geq \|\Phi(s, t_0, x)v\|, \forall t \geq s + 1 > s \geq t_0 \geq 0, \forall (x, v) \in Y.$$

On va considérer une fonction g donnée comme dans la Définition 2.6. Alors il existe $\lambda > 1$ tel que $g(\lambda) < 1$. Soit $s \geq 0$. Pour tout $t \in [s, s + 1)$, par le même résultat, on obtient les inégalités suivantes

$$\|\Phi(t, t_0, x)v\| \geq g(t - s) \|\Phi(s, t_0, x)v\| \geq g(\lambda) \|\Phi(s, t_0, x)v\|.$$

Alors, si on note

$$N(t) = g(\lambda)^{-1} + \widetilde{M}(t), t \geq 0,$$

la propriété d'instabilité de ξ vient d'être démontrée.

Soit une fonction $f \in \mathcal{F}$ donnée comme dans la Définition 2.6.

On obtient successivement pour tout $t \geq t_0 + 1 > t_0 \geq 0$ et tout $(x, v) \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned} & \|\Phi(t_0, t_0, x)v\| \int_0^1 f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_0+1} f(u - t_0) \|\Phi(t_0, t_0, x)v\| du \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_0+1} \|\Phi(u, t_0, x)v\| du \leq \int_{t_0}^t \|\Phi(u, t_0, x)v\| du \leq M(t) \|\Phi(t, t_0, x)v\|. \end{aligned}$$

Alors, par le Théorème 4.1, l'instabilité exponentielle de ξ est démontrée. \square

On va conclure l'étude de l'instabilité d'un cocycle d'évolution dans le cas non uniforme par le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 *Pour un cocycle d'évolution intégralement instable, les propriétés de décroissance exponentielle, d'instabilité et d'instabilité exponentielle sont équivalentes.*

Démonstration. Le résultat est obtenu en faisant appel à la Remarque 3.1 et aux Théorèmes 4.1 et 4.2. \square

REFERENCES

- [1] R. DATKO, *Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in Banach spaces*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), 428–445.
- [2] M. MEGAN, A.L. SASU, B. SASU, *Exponential stability and exponential instability for linear skew-product flows*, Mathematica Bohemica **129** (2004), 225–243.
- [3] M. MEGAN, C. STOICA, *On asymptotic behaviors for linear skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Carpathian Journal of Mathematics **23**, No. 1–2 (2007), 117–125.
- [4] M. MEGAN, C. STOICA, *Nonuniform trichotomy for linear skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Annals of West University of Timișoara, Mathematics–Computer Science Series, XLV **2** (2007), 55–64.
- [5] M. MEGAN, C. STOICA, *Exponential instability of skew-evolution semiflows in Banach spaces*, International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca (2007) (to appear).
- [6] M. MEGAN, C. STOICA, *On uniform exponential trichotomy of evolution operators in Banach spaces*, accepted for publishing in Integral Equations and Operator Theory (2007).

Codruța Stoica
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux 1
351 Cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France
E-mail: codruta.stoica@math.u-bordeaux1.fr