HAL open science

Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables

Xavier Caruso, David Savitt

▶ To cite this version:

Xavier Caruso, David Savitt. Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables. Mathematische Annalen, 2009, 343 (4), pp.773-789. 10.1007/s00208-008-0289-1 . hal-00211173v2

HAL Id: hal-00211173
https://hal.science/hal-00211173v2

Submitted on 13 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables

Xavier Caruso et David Savitt

Juin 2008

Table des matières

1 Introduction **1**

2 La théorie de Breuil **3**
2.1 Théorie de Hodge p-adique rationnelle 3
2.2 Théorie de Hodge p-adique entière et de torsion 4

3 Position relative des divers polygones **5**
3.1 Notion de bases adaptées 6
3.2 Preuve du théorème 1.1 7
3.3 Preuve du théorème 1.2 9

4 Un (contre-)exemple dans le cas cristallin **11**
4.1 Calcul du module filtré sur S_{K_0} 12
4.2 Calcul d'un réseau fortement divisible 12
4.3 Réduction modulo p et poids de l'inertie modérée 16

---

1 Introduction

Soient p un nombre premier, et k un corps parfait de caractéristique p. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K_0 le corps des fractions de W et on fixe K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e, d'anneau des entiers noté $\mathcal{O}_K$. On fixe également $\bar{K}$ une cloture algébrique de K, on désigne par G_K le groupe de Galois absolu de K et par I le sous-groupe d'inertie.

Si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation semi-stable (voir [9]) de G_K de dimension d, on sait lui associer plusieurs invariants numériques. Il y a classiquement les poids de Hodge-Tate et les pentes de l'action du Frobenius sur le module filtré de Fontaine correspondant. Ce sont tous deux des d-uplets de rationnels (entiers pour les poids de Hodge-Tate) que l'on représente parfois sous la forme de polygones appelés alors respectivement polygone de Hodge et polygone de Newton. (Pour les définitions de ces multiples objets, voir paragraphe 2.1.) On sait que ces deux polygones ont même point d'arrivée et que le polygone de Hodge est toujours situé en-dessous de celui de Newton. Si $h_1 \leqslant h_2 \leqslant \cdots \leqslant h_d$ sont les poids de Hodge-Tate et $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_d$ les pentes de Frobenius, la condition visuelle sur les polygones se traduit par les inégalités

$$h_1 + \cdots + h_k \leqslant n_1 + \cdots + n_k$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$ avec égalité si $k = d$.

Il existe toutefois un troisième invariant numérique que l'on peut associer à V. Rappelons avant de le définir que toute $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible H du groupe d'inertie I est simplement décrite

par ses poids de l'inertie modérée : ils forment une suite de $d' = \dim H$ entiers compris entre 0 et $p-1$ (définie à permutation circulaire près). (Pour des précisions sur cette classification, le lecteur pourra se reporter au paragraphe 1 de [13].)

Considérons à présent T un $\mathbb{Z}_p$-réseau dans V stable par l'action du groupe de Galois (un tel réseau existe toujours par compacité de G_K), et focalisons-nous sur la représentation T/pT restreinte au groupe d'inertie I. D'après les rappels que nous venons de faire, à tout quotient de Jordan-Hölder de cette représentation, il correspond une suite d'entiers compris entre 0 et $p-1$. D'autre part, un théorème de Brauer-Nesbitt (voir paragraphe 82.1 de [7]) montre que la famille des quotients de Jordan-Hölder de T/pT ne dépend que de la représentation V (et pas du choix de T). Ainsi, en regroupant les poids associés à chacun des quotients de Jordan-Hölder, on obtient une collection de d entiers compris entre 0 et $p-1$ qui est *canoniquement* associée à V. Notons-les $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_d$.

Il est naturel de se demander si ces entiers ont un rapport avec les autres invariants. Lorsque $e = 1$ et lorsque la représentation est cristalline, Fontaine et Laffaille ont montré dans [10] que les poids de l'inertie modérée sont les mêmes que les poids de Hodge-Tate. Toutefois, ce résultat simple est mis en défaut pour les représentations semi-stables non cristallines, même dans les cas les plus simples : dimension 2 et $e = 1$. Plus précisément, dans cette situation, Breuil et Mézard ont montré dans [5] par un calcul explicite que si les poids de Hodge-Tate sont 0 et r, alors les poids de l'inertie modérée peuvent être n'importe quel couple (i_1, i_2) pourvu que $i_1 + i_2 = r$.

Dans cette note, nous dégageons des contraintes explicites sur les poids de l'inertie modérée dans le cas général. Commençons pour cela par définir *le polygone de l'inertie modérée* comme le polygone associé aux rationnels $i'_k = \frac{i_k}{e}$. Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que tous les poids de Hodge-Tate soient compris entre* 0 *et* r *pour un entier* r *vérifiant* $er < p-1$. *Alors, le polygone de l'inertie modérée est situé au-dessus du polygone de Hodge. De plus ils ont même point terminal. Autrement dit, pour tout* $k \in \{1, \ldots, d\}$ *:*

$$e(h_1 + \cdots + h_k) \leqslant i_1 + \ldots + i_k$$

avec égalité si $k = d$.

Remarque. L'hypothèse $er < p-1$ se justifie aisément puisque les poids de l'inertie modérée sont par définition bornés par $p-1$. On pourrait toutefois se demander si le résultat demeure avec la condition plus faible $er \leqslant p-1$. La réponse est négative en général, mais il est tout à fait probable qu'elle devienne positive sous certaines hypothèses supplémentaires simples.

Forts de ce résultat, nous essayons ensuite de comprendre s'il y a un rapport entre polygone de l'inertie modérée et polygone de Newton. Nous obtenons le résultat partiel suivant :

Théorème 1.2. *Supposons que tous les poids de Hodge-Tate soient compris entre* 0 *et* r *pour un entier* r *vérifiant* $er < p-1$. *Alors, tant que les polygones de Hodge et de Newton ne se séparent pas, le polygone de l'inertie modérée coïncident aussi avec eux. En particulier, si polygone de Hodge et polygone de Newton coïncident, ils coïncident également avec le polygone de l'inertie modérée.*

Avec des égalités, cela se traduit de la façon suivante. Soit $k \in \{1, \ldots, d\}$. *Supposons que pour tout* $k' \leqslant k$, *on ait* $h_{k'} = n_{k'}$. *Alors* $i_k = eh_k (= en_k)$.

L'organisation de cette note se fait comme suit. La partie 2 est consacrée à des rappels sur la théorie de Breuil développée dans [1], [2], [3] et [6], qui joue un rôle central dans la démonstration des résultats précédemment annoncés. La partie 3, quant à elle, regroupe les preuves desdits résultats. Finalement, dans une dernière partie, nous menons à terme le calcul des invariants précédents sur un exemple simple en dimension 2. Il en ressort que, contrairement à ce qui se passe pour $e = 1$, les polygones de Hodge et de l'inertie modérée ne sont en général pas confondus pour les représentations cristallines.

Remerciements Pendant l'accomplissement de ce travail, le second auteur a été partiellement financé par le *NSF grant DMS-0600871* et lui en est reconnaissant. De plus, une partie de cet article a été écrite alors que les auteurs étaient respectivement en visite à l'Université de Bonn et au *Max-Planck-Institut für Mathematik*. Que ces instituts soient ici remerciés comme il se doit pour leur accueil chaleureux. C'est finalement un plaisir pour le premier auteur de remercier Christophe

Breuil de lui avoir conseillé de se pencher sur la problématique de ce papier, ainsi que pour ses encouragements après les premiers résultats.

2 La théorie de Breuil

Cette section est dédiée aux préliminaires de théorie de Hodge p-adique, rationnelle et entière. Nous rappelons dans un premier temps la correspondance, dûe à Fontaine, entre représentations p-adiques semi-stables et (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles. Ensuite, nous détaillons la théorie de Breuil qui permet de comprendre les réseaux à l'intérieur de telles représentations galoisiennes et les réductions modulo p de ces réseaux.

2.1 Théorie de Hodge p-adique rationnelle

Les (φ, N)-modules filtrés de Fontaine

Définition On note $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ la catégorie dont les objets sont la donnée de :
- un K_0-espace vectoriel D de dimension finie ;
- une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^t D_K$ exhautive et séparée sur $D_K = D \otimes_{K_0} K$ par des sous K-espaces vectoriels ;
- une application K_0-semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur K_0) injective $\varphi : D \to D$ (appelée Frobenius) ;
- une application K_0-linéaire $N : D \to D$ (appelée monodromie) vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

Les morphismes dans cette catégorie sont les applications K_0-linéaires compatibles au Frobenius, à la monodromie et à la filtration après extension des scalaires à K. On associe à tout objet $D \in \mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ deux invariants numériques qui sont son nombre de Hodge et son nombre de Newton. Si D est de dimension 1, le nombre de Hodge $t_H(D)$ est défini comme le plus grand entier t tel que $\mathrm{Fil}^t D_K = D_K$ alors que le nombre de Newton $t_N(D)$ est la pente du Frobenius sur D (c'est-à-dire la valuation p-adique de $\alpha \in K$ tel que $\phi(x) = \alpha x$ pour un $x \in D$). Si D est de dimension d, on pose par définition $t_N(D) = t_N(\Lambda^d D)$ et $t_H(D) = t_H(\Lambda^d D)$. Un objet D est dit faiblement admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et si pour tout $D' \subset D$ stable par φ et N et muni de la filtration induite, on a $t_H(D') \leqslant t_N(D')$. On note $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$ la sous-catégorie de $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ formée des objets faiblement admissibles. On montre que c'est une catégorie abélienne, stable par produit tensoriel et dualité.

Polygones de Hodge et de Newton Plutôt que les nombres de Hodge et de Newton, on considère parfois les polygones de Hodge et Newton. Comme ceux-ci sont centraux dans toute cette note, nous en rappelons la définition. Rappelons dans un premier temps que si $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_d$ sont des nombres, on leur associe un « polygone » de la façon suivante : on rejoint dans le plan les points de coordonnées $(k, n_1 + \cdots + n_k)$ et on trace les verticales issues du début et de la fin de la ligne brisée précédente. Le point $(d, n_1 + \cdots + n_d)$ est appelé *point d'arrivée* ou *point terminal* du polygone. Si les entiers n_i ne sont pas triés, on commence par le faire.

Si maintenant D est un objet de $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$, son polygone de Hodge est le polygone associé aux entiers t pour lesquels $\mathrm{Fil}^{t+1} D_K \neq \mathrm{Fil}^t D_K$ avec la convention que l'entier t est repété autant de fois que la dimension de $\mathrm{Fil}^{t+1} D_K / \mathrm{Fil}^t D_K$. Le polygone de Newton de D quant à lui est le polygone associé aux pentes de l'action de Frobenius ; c'est aussi le polygone de Newton (usuel) du polynôme caractéristique de la matrice de φ dans une base quelconque de D sur K_0. On montre que si D est faiblement admissible alors le polygone de Hodge est en-dessous le polygone de Newton et que ceux-ci ont même point d'arrivée.

Lien avec les représentations semi-stables Dans [8], Fontaine construit un anneau B_{st} muni de structures supplémentaires (dont nous ne rappelons pas la définition ici, car elle ne nous servira pas). Il montre que si V est une représentation semi-stable de G_K, alors :

$$D_{\mathrm{st}}(V) = (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

est un objet de $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$. Mieux, le foncteur D_{st} établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des représentations galoisiennes semi-stables et $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$. Les polygones de Hodge et de Newton de la représentation galoisienne sont alors définis comme les polygones de Hodge et de Newton de l'objet de $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$ correspondant.

Les S_{K_0}-modules filtrés de Breuil

Définitions Soit $f_\pi : W[u] \to \mathcal{O}_K$ l'application qui envoie u sur π. Notons $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K_0 de sorte que le noyau de f_π soit l'idéal principal engendré par $E(u)$. On note S le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement au noyau de f_π (et compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW[u]$). L'application f_π se prolonge à S. De plus, S est naturellement muni d'une filtration $\mathrm{Fil}^i S$ (la filtration à puissances divisées), d'un Frobenius W-semi-linéaire $\phi : S \to S$ continu pour la topologie p-adique défini par $\phi(u) = u^p$, et d'un opérateur de monodromie W-linéaire $N : S \to S$ continu pour la topologie p-adique, vérifiant la condition de Leibniz et défini par $N(u) = -u$. On note $c = \phi(E(u))/p$; c'est une unité de S. Finalement, on désigne par $f_0 : S \to W$ le morphisme d'anneau (continu pour la topologie p-adique) qui envoie u et toutes ses puissances divisées sur 0.

On pose $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$; les structures supplémentaires que l'on vient de définir s'y prolongent.

Ceci permet de définir la catégorie $\mathcal{MF}(\phi, N)$. Ses objets sont la donnée de :
- un S_{K_0}-module $\mathcal{D}$ libre de rang fini ;
- une filtration $\mathrm{Fil}^t\mathcal{D}$ telle que $\mathrm{Fil}^i S \cdot \mathrm{Fil}^t\mathcal{D} \subset \mathrm{Fil}^{t+i}\mathcal{D}$ pour tous i et t ;
- un Frobenius S_{K_0}-semi-linéaire $\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$;
- un opérateur de monodromie $N : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ vérifiant $N\phi = p\phi N$ et $N(\mathrm{Fil}^t\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fil}^{t-1}\mathcal{D}$ pour tout t.

Une équivalence de catégories Si D est un objet de $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$, on peut lui associer un objet de $\mathcal{D} \in \mathcal{MF}(\phi, N)$ de la façon suivante. On pose $\mathcal{D} = D \otimes_{K_0} S_{K_0}$. Il est muni de $\phi = \phi \otimes \varphi$ et de $N = N \otimes 1 + 1 \otimes N$. La filtration, quant à elle, est définie par :

$$\mathrm{Fil}^t\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \,/\, \forall i \geqslant 0,\ f_\pi(N^i(x)) \in \mathrm{Fil}^{t-i} D\}.$$

On montre (voir [1], section 6) que cette association définit une équivalence de catégories entre $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ et $\mathcal{MF}(\phi, N)$. Un quasi-inverse est décrit comme suit. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{MF}(\phi, N)$. On pose $D = \mathcal{D} \otimes_{S_{K_0}} K_0$ (où le morphisme $S_{K_0} \to K_0$ est f_0). Il est muni des opérateurs ϕ et N qui passent au quotient et définissent respectivement le Frobenius et l'opérateur de monodromie de l'objet de $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$. La définition de la filtration demande un peu plus de travail, et notamment un lemme préliminaire.

Lemme 2.1. *Avec les notations précédentes, il existe une unique section $s : D \to \mathcal{D}$ de $\mathrm{id} \otimes f_0$, qui soit K_0-linéaire et compatible au Frobenius.*

Démonstration. Voir proposition 6.2.1.1 de [1]. □

Le section s du lemme fournit en particulier une flèche K_0-linéaire $D \to \mathcal{D}/\mathrm{Fil}^1\mathcal{D}$. En utilisant que $\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0}\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $S_{K_0}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} \simeq K$ (par la flèche $u \mapsto \pi$) dont le rang est le même que celui de D, on montre facilement que s s'étend en un *isomophisme* K-linéaire $s_K : D_K \to \mathcal{D}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0}\mathcal{D}$. La filtration est alors obtenue par $\mathrm{Fil}^t D = s_K^{-1}(\mathrm{Fil}^t\mathcal{D}/Fil^1 S_{K_0}\mathcal{D})$.

Finalement, mentionnons que de la définition de la filtration, on déduit l'égalité suivante, qui nous sera utile pour la suite :

$$\mathrm{Fil}^{t-i}\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \,/\, E(u)^i x \in \mathrm{Fil}^t\mathcal{D}\} \tag{1}$$

valable pour tous entiers t et i.

2.2 Théorie de Hodge p-adique entière et de torsion

À partir de maintenant, on se donne un entier positif $r < p - 1$ et on se restreint aux représentations pour lesquelles $\mathrm{Fil}^0 D_K = D_K$ et $\mathrm{Fil}^{r+1} D_K = 0$ sur le module filtré de Fontaine D associé. L'intérêt d'utiliser la théorie de Breuil est qu'elle permet de décrire les réseaux dans les représentations semi-stables (vérifiant l'hypothèse précédente).

Modules fortement divisibles Soit $\mathcal{D}$ un objet de $\mathcal{MF}(\phi, N)$ associé à un objet $D \in \mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ dont la filtration est comprise entre 0 et r. Un *module fortement divisible* (ou *réseau fortement divisible*) dans $\mathcal{D}$ est un sous-S-module $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ vérifiant :

- $\mathcal{M}$ est libre de rang fini sur S ;
- le morphisme naturel $\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme ;
- $\phi(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset p^r\mathcal{M}$ où $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{D}$;
- $\frac{\phi}{p^r}(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.

On montre (voir corollaire 2.1.4 de [3]) que si $\mathcal{D}$ admet un réseau fortement divisible, alors $\mathcal{D}$ correspond à un D faiblement admissible V, et donc à une représentation galoisienne. La réciproque est également vraie : si $er < p-1$ (cas qui nous intéresse principalement ici), c'est le résultat principal de [3], sinon c'est une conséquence des travaux de Kisin (voir [11]) et de Liu (voir [12]). En outre, dans le cas où D est faiblement admissible, la dernière condition (à savoir « $\frac{\phi}{p^r}(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ ») est impliquée par les précédentes, ce qui explique par exemple que nous ne la vérifierons dans la section 4.

D'autre part, on dispose d'un foncteur T_{st} (dont nous renvoyons à [2] pour la définition) qui à $\mathcal{M}$ associe un $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par Galois T à l'intérieur de V. Ce foncteur établit en fait une bijection entre les réseaux fortement divisibles dans $\mathcal{D}$ et les réseaux stables par Galois dans V. (Pour ce dernier résultat, voir [12].)

Les catégories $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ et $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/\tilde{S}_1}$ On est maintenant tenté de réduire modulo p les modules fortement divisibles que l'on vient d'introduire pour obtenir une description des représentations de la forme T/pT. On pose pour cela $S_1 = S/pS$. Les structures supplémentaires sur S passent au quotient pour définir des structures analogues sur S_1. On introduit la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ dont les objets sont la donnée de :

- un module $\mathcal{M}$ libre de type fini sur S_1 ;
- un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S_1\, \mathcal{M}$;
- une application semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dont l'image engendre $\mathcal{M}$ sur S_1 ;
- une application $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition de Leibniz, telle que $u^e N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Si $er < p-1$, la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ est étudiée dans [6] : on montre en particulier qu'elle est abélienne et artinienne et on décrit ses objets simples lorsque le corps résiduel k est algébriquement clos. De plus, elle est également équipée d'un foncteur exact T_{st} vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-représentations de G_K. Finalement, si $\mathcal{M}$ est un module fortement divisible, le quotient $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est un objet de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ et si T est le réseau associé à $\mathcal{M}$ par le foncteur T_{st}, on a $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) = T/pT$.

Pour les calculs de la section 4, nous aurons besoin de manipuler la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/\tilde{S}_1}$: sa définition est analogue à celle de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ hormis que S_1 est partout remplacé par $\tilde{S}_1 = k[u]/u^{ep}$. Le morphisme d'anneaux $S_1 \to \tilde{S}_1$ qui envoie u sur u et les puissances divisées $\gamma_i(u^e)$ sur 0 pour $i \geqslant p$ définit *via* extension des scalaires un foncteur $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1} \to \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/\tilde{S}_1}$. La proposition 2.3.1 de [6] assure que ce dernier est une équivalence de catégories.

3 Position relative des divers polygones

Nous prouvons à présent les théorèmes 1.1 et 1.2. Nous commençons par quelques rappels sur les bases adaptées qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1.1.

3.1 Notion de bases adaptées

Modules libres sur les anneaux « principaux »

Nous isolons ici un lemme, conséquence facile du théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux. Bien qu'élémentaire, ce lemme peut être vu comme la clé de la démonstration du résultat de comparaison entre polygone de Hodge et de l'inertie modérée.

Lemme 3.1. *Soit A un anneau principal et $\mathfrak{p}$ un élément non nul irréductible de A. On note encore $\mathfrak{p} \subset A$ l'idéal principal maximal engendré par $\mathfrak{p}$. Soient $r < N$ et d des entiers, et M' un sous-A-module de $M = (A/\mathfrak{p}^N)^d$ tel que $\mathfrak{p}^r A \subset M'$. Alors, il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de M (sur $A/\mathfrak{p}^N$) et des entiers $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots n_d \leqslant r$ tels que M' soit le sous-module engendré par les $\mathfrak{p}^{n_i} e_i$.*

*De plus, les n_i sont uniquement déterminés (*i.e. *ne dépendent pas de la base $(e_1, \ldots, e_d)$) et peuvent s'obtenir de la façon suivante. Soit $(x_1, \ldots, x_D)$ une famille génératrice de M'. Soient G la matrice $d \times D$ obtenue en écrivant en colonne les composantes des vecteurs x_i et $\hat{G}$ une matrice à coefficients dans A relevant G. Alors, pour tout $k \leqslant d$, le nombre $n_1 + \cdots + n_k$ est la plus petite valuation $\mathfrak{p}$-adique d'un mineur $k \times k$ de $\hat{G}$.*

Démonstration. D'après la théorie des diviseurs élémentaires, il existe des matrices inversibles P et Q (à coefficients dans A) telles que :

$$\hat{G} = P \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot Q$$

où a_k est le PGCD des mineurs $k \times k$ de $\hat{G}$. De ceci, il découle toutes les assertions du lemme à part l'unicité des n_i. Pour cette dernière, on remarque que pour tout entier $n \leqslant r$ la longueur du A-module $\mathfrak{p}^n M/(M' \cap \mathfrak{p}^n M)$ s'égalise avec la somme des $\max(0, n_i - n)$, et que la connaissance de toutes ces sommes permet de retrouver les n_i. □

Existence de bases adaptées

Le lemme 3.1 donne directement le résultat suivant, déjà bien connu.

Proposition 3.2. *Soit $\mathcal{M}$ un module filtré sur S_{K_0} (resp. un objet de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$). Il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d$ compris entre 0 et r (resp. entre 0 et er) tels que :*

$$\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathrm{Fil}^p S_{K_0}\, \mathcal{M} + \sum_{i=0}^{d} E(u)^{n_i}\ e_i S_{K_0}$$

$$\textit{(resp. } \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathrm{Fil}^p S_1\, \mathcal{M} + \sum_{i=0}^{d} u^{n_i}\ e_i S_1\textit{).}$$

De plus les entiers n_i sont uniquement déterminés (à l'ordre près).

Démonstration. On applique le lemme 3.1 respectivement aux quotients $S_{K_0}/\mathrm{Fil}^p S_{K_0} \simeq K_0[u]/E(u)^p$ et $S_1/\mathrm{Fil}^p S_1 \simeq k[u]/u^{ep}$. □

Une base comme en fournit la proposition est appelé une *base adaptée* pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. On prendra garde au fait qu'il n'est pas vrai que tout module fortement divisible admet une base adaptée. Toutefois, c'est le cas si $r = 1$ (et la démonstration repose encore sur la théorie des diviseurs élémentaires, l'anneau principal qui intervient étant ici $S/\mathrm{Fil}^1 S \simeq \mathcal{O}_K$).

L'égalité (1) conduit directement à la proposition suivante :

Proposition 3.3. *Soit V une représentation semi-stable de G_K et $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module filtré associé. Si $n_1, \ldots, n_d$ sont les entiers qui apparaissent dans l'écriture d'une base adaptée de $\mathcal{D}$, alors les poids de Hodge-Tate de V sont les $h_i = r - n_i$.*

3.2 Preuve du théorème 1.1

On suppose $er < p-1$. On fixe V une représentation semi-stable de G_K de dimension d. On note $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module filtré associé. D'après le résultat principal de [3], il existe $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ un réseau fortement divisible. La représentation galoisienne $T = T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est un réseau dans V stable par G_K et on a $T/pT = T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$. Le but est de comparer les poids de Hodge-Tate de V, notés $h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_d$, avec les poids de l'inertie modérée de T/pT, notés $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_d$.

Notons $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_d$ (resp. $n'_1 \geqslant \cdots \geqslant n'_d$) les entiers qui interviennent dans l'écriture d'une base adaptée de $\mathcal{D}$ (resp. de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$). Par la proposition 3.3, on a la relation $h_k = r - n_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$. Définissons les poids de Hodge-Tate de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ comme les rationnels $h'_k = r - \frac{n'_k}{e}$ et appelons polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ le polygone associé à ces nombres. La démonstration se découpe alors naturellement en deux étapes : tout d'abord on montre que le polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est au-dessus de celui de V (avec même point terminal), puis qu'il est au-dessous du polygone de l'inertie modérée (avec également même point terminal).

Première étape : comparaison entre polygones de Hodge

On conserve les notations précédentes. Montrons tout d'abord que pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a :

$$e(n_d + \ldots + n_k) \leqslant n'_d + \ldots + n'_k$$

et que l'égalité a lieu lorsque $k = 1$.

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$, donc associée aux entiers $n'_1, \ldots, n'_d$. Notons $\hat{x}_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ un relevé de $u^{n'_i}e_i$ et x_i sa projection dans $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^p S\,\mathcal{M}$. On vérifie facilement que la famille des x_i engendre $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^p S\,\mathcal{M}$. Soit G la matrice carrée de taille d obtenue en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs x_i dans une base quelconque (mais fixée) de $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^p S\,\mathcal{M}$. C'est une matrice à coefficients dans $W[u]/E(u)^p$. Soient $\hat{G}$ une matrice à coefficients dans $W[u]$ relevant G et $\bar{G}$ la réduction de $\hat{G}$ dans l'anneau $k[u]$.

Fixons un entier $k \in \{1, \ldots, d\}$. D'après le lemme 3.1, $n = n_d + \ldots + n_k$ (resp. $n' = n'_d + \ldots + n'_k$) est la plus petite valuation $E(u)$-adique (resp u-adique) d'un mineur $(d+1-k) \times (d+1-k)$ de $\hat{G}$ (resp. de $\bar{G}$). Ainsi, $E(u)^n$ divise certainement tous les mineurs de taile $d+1-k$ de $\hat{G}$. Par réduction modulo p, il s'ensuit que u^{en} divise tous les mineurs de taille $d+1-k$ de $\bar{G}$. D'où $en \leqslant n'$ comme annoncé.

Il reste à montrer que l'égalité a lieu lorsque $k = 1$. Par hypothèse $\mathrm{Fil}^r S\,\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. On en déduit qu'il existe une matrice $\hat{H}$ à coefficients dans $W[u]$ telle que $\hat{G}\hat{H} \equiv E(u)^r I \pmod{E(u)^p}$ (où I désigne la matrice identité). Comme $p - r \geqslant 1$, il existe une matrice C à coefficients dans $W[u]$ telle que $\hat{G}\hat{H} = E(u)^r(I - E(u)C)$. En considérant les déterminants, il vient :

$$\det(\hat{G})\ \det(\hat{H}) = E(u)^{rd}\,\Delta$$

où $\Delta \in W[u]$ est congru à 1 modulo $E(u)$. L'anneau $W[u]$ étant factoriel, $\det(\hat{G})$ prend la forme $E(u)^n\delta$ où $n \leqslant rd$ est un entier et où δ divise Δ. En particulier $E(u)$ ne divise pas δ et la valuation $E(u)$-adique de $\det(\hat{G})$ est n. Ainsi $n = n_1 + \cdots + n_d$. D'autre part, en réduisant modulo p, on obtient $\det(\bar{G}) = u^{en}\bar{\delta}$ où $\bar{\delta}$ divise un élément congru à 1 modulo u^e. En particulier sa valuation u-adique est nulle et donc celle de $\det(\bar{G})$ vaut en. Le résultat annoncé s'ensuit.

Il résulte de ceci le résultat de comparaison, objet de ce paragraphe.

Lemme 3.4. *Avec les notations précédentes, le polygone de Hodge de V est au-dessous du polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$. De plus, ils ont même point d'arrivée.*

Démonstration. En soustrayant $e(n_1 + \cdots + n_d) = n'_1 + \cdots + n'_d$ des deux côtés de l'inégalité précédemment prouvée, on obtient $e(n_1 + \cdots + n_k) \geqslant n'_1 + \cdots + n'_k$. Le résultat s'obtient alors en divisant par $(-e)$, puis en ajoutant kr à cette dernière inégalité. Bien entendu, le cas d'égalité se traite par la même manipulation algébrique. □

Deuxième étape : polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ et polygone de l'inertie modérée

Nous prouvons en fait de façon plus générale le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit $\mathcal{N}$ un objet de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$. Le polygone de Hodge de $\mathcal{N}$ est au-dessous du polygone de l'inertie modérée de $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{N})$. De plus, ils ont même point d'arrivée.*

La catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ étant abélienne et artinienne, il suffit de prouver d'une part que le résultat est vrai pour les objets simples de cette catégorie et d'autre part qu'il passe aux extensions. Comme les poids de l'inertie modérée ne dépendent que de l'action du groupe d'inertie et que les poids de Hodge-Tate sont invariants par extension non ramifiée, on peut supposer que le corps résiduel k est algébriquement clos. Dans ce cas, les objets simples sont décrits dans [6] (théorème 4.3.2) et la représentation galoisienne associée à ceux-ci est également calculée dans *loc. cit.* (théorème 5.2.2). On constate alors sans difficulté que les polygones sont bien disposés comme on le souhaite. (En réalité, les polygones sont mêmes confondus, ici.)

Traitons à présent le cas des extensions. Donnons-nous :

$$0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$$

une suite exacte dans $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$. Notons $a'_1 \leqslant \cdots \leqslant a'_{d'}$ (resp. $b'_1 \leqslant \cdots \leqslant b'_{d'}$) les poids de Hodge-Tate de $\mathcal{N}'$ (resp. de l'inertie modérée de $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{N}')$) et $a''_1 \leqslant \cdots \leqslant a''_{d''}$ (resp. $b''_1 \leqslant \cdots \leqslant b''_{d''}$) ceux correspondant à $\mathcal{N}''$. Étant donné que le foncteur T_{st} est exact et que les poids de l'inertie modérée de $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{N})$ ne dépendent que des quotients de Jordan-Hölder de ladite représentation, ils sont exactement les nombres $b'_1, \ldots, b'_{d'}, b''_1, \ldots, b''_{d''}$.

Évaluons maintenant les poids de Hodge-Tate de $\mathcal{N}$, que nous notons $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_d$ avec $d = d' + d''$. D'après la preuve du lemme 3.1, pour tout entier $n \leqslant er$, ils vérifient la relation :

$$\dim_k \frac{u^n\mathcal{N}}{u^n\mathcal{N} \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{d} \max(0, e(r - a_i) - n)$$

et l'on dispose bien entendu de formules analogues pour $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$. Considérons les deux applications :

$$\frac{u^n\mathcal{N}'}{u^n\mathcal{N}' \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}'} \to \frac{u^n\mathcal{N}}{u^n\mathcal{N} \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}} \to \frac{u^n\mathcal{N}''}{u^n\mathcal{N}'' \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}''}.$$

La seconde est clairement surjective et la première est injective : en effet, si $x \in u^n\mathcal{N}'$ s'envoie dans $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}$, il est aussi élément de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}'$ en vertu de la stricte compatibilité à la filtration (voir corollaire 3.5.7 de [6]). Il s'ensuit que la dimension du terme central est supérieure à la somme des dimensions des termes extrémaux. D'où on déduit l'inégalite suivante :

$$\sum_{i=1}^{d} \max(0, e(r - a_i) - n) \geqslant \sum_{i=1}^{d'} \max(0, e(r - a'_i) - n) + \sum_{i=1}^{d''} \max(0, e(r - a''_i) - n). \tag{2}$$

Il en résulte que pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$ la somme des k plus petits entiers parmi les a_i est inférieure à la somme des k plus petits éléments parmi $a'_1, \ldots, a'_{d'}, a''_1, \ldots, a''_{d''}$.

Par ailleurs, si $n = 0$, la suite :

$$0 \to \frac{\mathcal{N}'}{\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}'} \to \frac{\mathcal{N}}{\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}} \to \frac{\mathcal{N}''}{\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}''} \to 0$$

est exacte. En effet, il suffit d'après ce qui précède de vérifier l'exactitude au milieu. Pour cela, on considère $x \in \mathcal{N}$ qui s'envoie sur un élément $y \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}''$ et il s'agit de montrer que x s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathcal{N}'$ et d'un élément de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}$. Par la stricte compatiblité à la filtration, l'application $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N} \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}''$ est surjective, d'où il existe $x' \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}$ qui s'envoie également sur $y \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}''$. Mais alors $x - x'$ est nul dans $\mathcal{N}''$ et donc est élément de $\mathcal{N}$. L'exactitude en découle. De celle-ci, on déduit que lorsque $n = 0$, l'inégalité (2) est en fait une égalité, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{d} a_i = \sum_{i=1}^{d'} a'_i + \sum_{i=1}^{d''} a''_i.$$

En regroupant tout ce qui précède, on s'aperçoit que l'on vient de prouver que le polygone de Hodge de $\mathcal{N}$ est situé au-dessous du polygone associé aux nombres (retriés) $a'_1, \dots a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$, et qu'ils ont même point terminaux. Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à prouver le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Supposons que le polygone associé aux nombres $a'_1, \dots, a'_{d'}$ (resp. $a''_1, \dots, a''_{d'}$) soit au-dessous du polygone associé aux nombres $b'_1, \dots, b'_{d''}$ (resp. $b''_1, \dots, b''_{d''}$) et qu'ils aient même points d'arrivée. Alors le polygone associe à $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$ est au-dessous du polygone associé à $b'_1, \dots, b'_{d'}, b''_1, \dots, b''_{d''}$, et ils ont même point d'arrivée.*

Démonstration. L'assertion sur les points d'arrivée est immédiate.

Pour le reste, on peut évidemment supposer que les a'_i, les a''_i, les b'_i et les b''_i sont rangés par ordre croissant. Soit k compris entre 1 et d. La somme des k plus petits nombres parmi $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$ est égale à :

$$\min_{1 \leqslant m \leqslant k} (a'_1 + \cdots + a'_m) + (a''_1 + \cdots + a''_{k-m}) \tag{3}$$

et, bien entendu, on dispose d'une formule analogue lorsque la lettre a est remplacée par b. La conclusion s'obtient en remarquant que chacun des termes qui apparaît dans le minimum de (3) est majoré par hypothèse par le terme correspondant où a est remplacé par b, et que cette majoration se transporte directement sur les minimas. □

Remarques

Le cas er $\geqslant$ p − 1 Comme nous le disions dans l'introduction, le théorème 1.1 peut être mis en défaut si on ôte l'hypothèse $er < p-1$. Voici un contre-exemple très simple. Considérons $K_0 = \mathbb{Q}_p$ et $K = K_0(\sqrt[p]{1})$; l'extension K/K_0 est totalement ramifiée de degré $e = p-1$. Le caractère cyclotomique a pour seul poids de Hodge-Tate 1 mais sa réduction modulo p est triviale, de sorte que le poids de l'inertie modérée est 0. On remarque qu'ici on peut choisir $r = 1$, de sorte que $er = p-1$ qui est la première situation dans laquelle l'inégalité de l'énoncé est violée.

Que dire des représentations de Hodge-Tate ? Si V n'est pas semi-stable, mais simplement de Hodge-Tate, l'énoncé du théorème 1.1 a encore un sens, et on peut légitimement se demander s'il est encore vrai dans ce contexte plus général. La réponse est négative et, là encore, les contre-exemples sont aisés à produire. On prend $K = K_0 = \mathbb{Q}_p$, et on fixe $\pi \in \bar{K}$ une racine $(p-1)$-ième de p. Définissons le caractère $G_K \to \mathrm{Gal}(K(\pi)/K) \to \mathbb{Q}_p^\star$, $\sigma \mapsto \frac{\sigma\pi}{\pi}$. Il correspond à une représentation p-adique de dimension 1 qui est de Hodge-Tate[1] et son seul poids de Hodge-Tate est nul. Toutefois, modulo p, cette représentation s'identifie par construction au caractère fondamental de Serre : son poids de l'inertie modérée est donc 1 et le résultat est mis en défaut.

3.3 Preuve du théorème 1.2

On conserve notre entier positif r vérifiant $er < p-1$. De plus comme les invariants qui interviennent dans l'énoncé du théorème 1.2 ne changent pas après une extension non ramifiée, on peut supposer que le corps résiduel k est algébriquement clos.

Soit V une représentation semi-stable dont on note les poids de Hodge-Tate $h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_d \leqslant r$ et les pentes de l'action de Frobenius $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_d$. On suppose que les polygones de Newton et de Hodge commencent par un segment de même pente, c'est-à-dire que $h_1 = n_1 = s$. Notons $d' \geqslant 1$ le plus grand entier pour lequel $n_{d'} = s$. Étant donné que le polygône de Newton est situé au-dessus du polygône de Hodge, on a $n_k = h_k = s$ pour tout $k \leqslant d'$.

Soit $D \in \mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$ le (φ, N)-module filtré de Fontaine associé à V. Appelons D_s la partie de pente s de D. D'après la définition de d', c'est un sous-espace de dimension d' stable φ. Par ailleurs l'opérateur de monodromie doit envoyer D_s sur D_{s-1} (partie de pente $s-1$) mais celle-ci est nulle puisque s est la plus petite pente. Ainsi $N = 0$ sur D_s, et D_s est stable par φ et N. Soit $D' \subset D_s$ un sous-espace de dimension n stable par φ et N. Par les conditions de faible admissibilité, on $t_H(D') \leqslant t_N(D') = ns$. Par ailleurs, $\mathrm{Fil}^t D_K = D_K$ pour tout $t \leqslant s$ et donc $\mathrm{Fil}^t D'_K = D'_K$ pour

[1] Elle est même « potentiellement triviale ». En particulier, elle est potentiellement cristalline.

tout $t \leqslant s$. On en déduit qu'il n'y a pas de saut dans la filtration avant s et donc que $t_H(D') \geqslant ns$. Finalement $t_H(D') = t_N(D') = ns$, et il s'ensuit que D_s est un sous-objet de D dans la catégorie $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi, N)$ auquel il correspond une sous-représentation V_s de V.

Comme on a supposé le corps k algébriquement clos, il existe une base de D_s qui diagonalise l'action du Frobenius avec des valeurs propres toutes égales à p^s (on rappelle que s est entier puisque c'est un poids de Hodge-Tate). Il en résulte que $V_s \simeq \mathbb{Q}_p(s)^{d'}$. Il est alors immédiat de calculer les poids de l'inertie modérée sur V_s : on trouve qu'ils sont égaux à es comme attendu.

Les considérations précédentes démontrent le théorème 1.2 pour la première pente. Pour la suite, on considère le quotient D/D_s auquel on réapplique les arguments précédents. On continue comme cela jusqu'à ce que les polygones se séparent, et cela clôt la preuve du théorème.

Remarques

Le résultat précédent n'est pas réellement satisfaisant. On aimerait par exemple avoir une comparaison entre polygone de l'inertie modérée et polygone de Newton qui ne repose sur aucune hypothèse. Bien entendu, la question la plus simple que l'on puisse poser est la suivante :

Question 3.7. On suppose toujours que les poids de Hodge-Tate sont compris entre 0 et r (avec $er < p-1$). Est-il vrai que le polygone de l'inertie modérée est situé entre le polygone de Hodge et celui de Newton ?

On peut également s'interroger sur la positive relative du polygone de Newton et celui de Hodge de la réduction modulo p :

Question 3.8. On suppose $r < p-1$. Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Est-il vrai que le polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est situé dessous le polygone de Newton de $D = \mathcal{M} \otimes_S K_0$?

L'avantage de la question 3.8 est qu'elle poser pour tout $r < p-1$: on entend par là qu'elle n'est semble-t-il pas trivialement mise en défaut lorsque $er \geqslant p-1$ comme, nous l'avons déjà expliqué, c'est le cas pour la question 3.7. En revanche, elle propose un résultat un peu plus faible. Hélas, on dispose de trop peu d'exemples pour se faire une idée claire de la réponse aux questions précédentes. Lorsque $e = 1$, dans [5], Breuil et Mézard ont classifié complètement les représentations semi-stables *de dimension* 2 et ont calculé les poids de l'inertie modérée pour chacune d'entre elles. Leurs résultats sont résumés dans la partie 5 de [4], et montrent que la réponse à la question 3.7 (et donc aussi à la question 3.8) est affirmative dans ce cas. Toutefois, cela ne doit pas être pris comme un indicateur très fort car dans la situation étudiée ici, soit la représentation est cristalline et alors le polygone de l'inertie modérée s'identifie avec le polygone de Hodge par les résultats de Fontaine-Laffaille, soit la représentation n'est pas cristalline, et alors le polygone de Newton est « le plus haut possible ».

Sans l'opérateur de monodromie

La constatation initiale est la suivante : les objets polygone de Hodge, polygone de Hodge de la réduction modulo p, polygone de Newton et polygone de l'inertie modérée se calculent directement sur les modules de la théorie de Breuil, indépendamment des représentations. Mieux encore, leur calcul ne fait jamais intervenir l'opérateur de monodromie N. Précisément, on a vu que le polygone de Hodge et le polygone de Hodge de la réduction modulo p s'obtiennent à partir des entiers qui interviennent dans l'écriture d'une base adaptée des modules correspondants. Le polygone de Newton d'un S_{K_0}-module filtré $\mathcal{D}$ est construit à partir des pentes de l'action du Frobenius sur $\mathcal{D} \otimes_{S_{K_0}} K_0$. Finalement, le polygone de l'inertie modérée de $\mathcal{M}$ peut s'obtenir en recollant les polygones de Hodge des quotients de Jordan-Hölder[2] de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$, ce dernier n'était défini que pour $er < p-1$.

Par ailleurs, on s'aperçoit que dans les énoncés des théorèmes 1.1 et 1.2, il revenait au même de débuter avec un module fortement divisible plutôt qu'une représentation semi-stable. En effet,

[2] On peut montrer (voir [6]) qu'il existe une sous-catégorie commune à $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ à $\mathrm{Mod}^{\phi}_{/S_1}$ (même définition que $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ mais sans le N) qui contient tous les objects simples de ces deux catégories. Ainsi, avec la définition que l'on donne, le polygone de l'inertie modérée est le même qu'il soit calculé dans $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ ou $\mathrm{Mod}^{\phi}_{/S_1}$.

si l'on part d'une représentation semi-stable, on peut trouver un module fortement divisible dans son S_{K_0}-module filtré associé comme cela a déjà été expliqué. Et réciproquement, si l'on part d'un module fortement divisible, le S_{K_0}-module filtré obtenu en inversant p correspond à un module filtré de Fontaine qui est faiblement admissible (corollaire 2.1.4 de [3]), et donc à une représentation galoisienne semi-stable.

Au vu de ces remarques, il est légitime de se demander si les théorèmes 1.1 et 1.2 s'étendent à une situation plus générale où l'on débuterait avec un pseudo-module fortement divisible (c'est-à-dire un module fortement divisible sans l'opérateur N). Pour le théorème 1.1, la réponse est affirmative et la démonstration est textuellement la même que celle que nous avons déjà donnée puisqu'elle ne fait aucunément intervenir l'opérateur de monodromie. Les auteurs, par contre, ne savent pas ce qu'il en est pour le théorème 1.2. Toutefois, il est possible de produire un contre-exemple à la généralisation évidente de la question 3.7 à cette situation.

On suppose que $r = 2n$ est un entier pair, que $e = 1$ et que l'uniformisante choisie est p de sorte que $E(u) = u - p$. Soit le pseudo-module fortement divisible défini par $\mathcal{M} = Se_1 \oplus Se_2$. On le munit de $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ engendré par $(u-p)^n e_1$, $pe_1 + (u-p)^n e_2$ et $\mathrm{Fil}^p S\,\mathcal{M}$, et du Frobenius ϕ défini par $\phi(e_1) = c^n p^n e_2$ et $\phi(e_2) = c^n p^n e_1 - pe_2$. Les entiers qui apparaissent dans l'écriture d'une base adaptée de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ se calculent directement par le lemme 3.1 et valent n et n. Le polygone de Hodge de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ a donc pour seule n, et comme le polygone de l'inertie modérée doit être situé au-dessus, il a lui aussi pour seule pente n. Cependant, on calcule facilement les pentes du Frobenius sur $\mathcal{M} \otimes_S K_0$: elles valent 1 et $r - 1$. Le polygone de Newton est donc strictement en-dessous celui de l'inertie modérée.

4 Un (contre-)exemple dans le cas cristallin

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les travaux de Fontaine et Laffaille assurent que dans le cas cristallin (*i.e.* $N = 0$ sur le (φ, N)-module filtré de Fontaine) non ramifié (*i.e.* $e = 1$), le polygone de l'inertie modérée s'identifie avec celui de Hodge. Nous avons également déjà dit que Breuil et Mézard ont montré par un calcul explicite que ce résultat simple est mis en défaut dès que la représentation n'est plus supposée cristalline (même dans le cas $e = 1$). Également par un calcul explicite, nous ne proposons de montrer dans cette dernière section que l'identification entre polygone de l'inertie modérée et polygone de Hodge n'est pas non plus satisfaite en général pour les représentations cristallines dès que $e \geqslant 2$ (voir théorème 4.9 et la remarque qui le suit). Le cas de Fontaine-Laffaille apparaît donc, de ce point de vue, comme très isolé.

Soient $n_1 \leqslant n_2$ des entiers positifs ou nuls tels que $e(n_1 + n_2) < p - 1$ (on prendra relativement rapidement $n_1 = n_2 = 1$, mais on préfère commencer avec un peu plus de généralité). On pose $r = n_1 + n_2$ et on définit pour tout $\mathcal{L} \in K$, le (φ, N)-module filtré suivant :

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}) = K_0 e_1 \oplus K_0 e_2 \\ \varphi(e_1) = p^{n_1} e_1,\ \varphi(e_2) = p^{n_2} e_2 \\ \mathrm{Fil}^1 D(\mathcal{L})_K = \cdots = \mathrm{Fil}^r D(\mathcal{L})_K = K(\mathcal{L}e_1 + e_2) \\ \mathrm{Fil}^0 D(\mathcal{L})_K = D(\mathcal{L})_K,\ \mathrm{Fil}^{r+1} D(\mathcal{L})_K = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $n_1 = n_2$, ce module est admissible si, et seulement si $\mathcal{L} \notin \mathbb{Q}_p$. Si $n_1 \neq n_2$, il est toujours admissible sauf précisément dans le cas où $n_1 > 0$ et $\mathcal{L} = 0$. On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{L}$ est choisi de façon à ce que $D(\mathcal{L})$ soit admissible.

Le polygone de Hodge de $D(\mathcal{L})$ est directement visible sur la description précédente : c'est celui qui a pour pentes 0 et r. Notre objectif désormais est de déterminer (au moins dans certains cas), le polygone de l'inertie modérée associé à $D(\mathcal{L})$. Pour cela, nous allons successivement déterminer le module filtré sur S_{K_0} qui lui correspond (sous-section 4.1), trouver un réseau fortement divisible à l'intérieur de ce dernier (sous-section 4.2) et finalement réduire celui-ci modulo p (sous-section 4.3).

4.1 Calcul du module filtré sur S_{K_0}

Par définition le S_{K_0}-module filtré associé à $D(\mathcal{L})$ est $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = S_{K_0} \otimes_{K_0} D(\mathcal{L})$ muni du Frobenius et de l'opérateur de monodromie obtenus par extension des scalaires. On a donc directement

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = S_{K_0} e_1 \oplus S_{K_0} e_2 \\ \phi(e_1) = p^{n_1} e_1,\ \phi(e_2) = p^{n_2} e_2 \\ N(e_1) = 0,\ N(e_2) = 0 \end{cases}$$

où dans un léger abus de notation, on continue à noter e_1 et e_2 les éléments $1 \otimes e_1$ et $1 \otimes e_2$. Déterminer la forme de la filtration demande par contre un peu de travail. Considérons, l'application :

$$\begin{array}{rcl} T_\pi : K_0[u]/E(u)^r & \longrightarrow & K^r \\ P & \mapsto & (P(\pi), P'(\pi), \ldots, P^{(r-1)}(\pi)) \end{array}$$

où $P^{(i)}$ désigne la dérivée i-ième du polynôme P. Il est clair que T_π est K_0-linéaire et on vérifie facilement qu'elle est injective. Comme les espaces de départ et d'arrivée sont tous les deux de dimension er sur K_0, T_π est une bijection. Notons $\mathcal{L}_r$ l'unique polynôme de degré $< er$ dont l'image par T_π est $(\mathcal{L}, 0, \ldots, 0)$. Bien entendu $\mathcal{L}_r$ peut également être vu comme un élément de S_{K_0}.

Proposition 4.1. *On a* $\mathrm{Fil}^r \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_r e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$.

Démonstration. Après avoir vérifié quelques compatibilités, la proposition peut s'obtenir comme une application de la formule donnée dans la remarque finale de [1] (celle qui suit la preuve de la proposition A.4). Nous donnons malgré tout ci-dessous une démonstration plus directe qui n'utilise que la définition de la filtration. Précisément, nous allons prouver par récurrence sur s que $\mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_r e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$ pour tout s compris entre 0 et r. La proposition s'ensuivra directement.

L'initialisation de la récurrence est immédiate. Fixons à présent un entier $s < r$ et supposons que l'on ait réussi à montrer $\mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_{r+1} e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$. Par définition

$$\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{D} \,/\, N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ f_\pi(x) \in \mathrm{Fil}^t D(\mathcal{L})\}.$$

La dernière condition « $f_\pi(x) \in \mathrm{Fil}^t D(\mathcal{L})$ » étant équivalente à $x \in \mathrm{Fil}^1 \mathcal{D}(\mathcal{L})$, on obtient en utilisant la décroissante de la filtration et $N(\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})) \subset \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$, la suite d'implications suivante :

$$\begin{array}{rcl} (x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})) & \Rightarrow & (x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})) \\ & \Rightarrow & (x \in \mathrm{Fil}^1 \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})) \quad \Rightarrow \quad (x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})). \end{array}$$

Toutes ces implications sont donc des équivalences, d'où on déduit que $\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})$ s'identifie à l'ensemble des $x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$ pour lesquels $N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Considérons maintenant $x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des éléments A et B dans S_{K_0} tels que $x \equiv (A\mathcal{L}_t + BE(u)^s)\hat{e}_1 + A\hat{e}_2 \pmod{\mathrm{Fil}^{s+1} S_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{L})}$. Un calcul direct donne :

$$\begin{array}{rcl} N(x) & \equiv & (N(A)\mathcal{L}_r + AN(\mathcal{L}_r) + tBE(u)^{s-1} N(E(u)))\hat{e}_1 + N(A)\hat{e}_2 \\ & \equiv & (N(A)\mathcal{L}_r + tBE(u)^{s-1} N(E(u)))\hat{e}_1 + N(A)\hat{e}_2 \pmod{\mathrm{Fil}^s S_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{L})} \end{array}$$

la dernière congruence s'obtenant après avoir remarqué que $N(\mathcal{L}_r) = -u\mathcal{L}_r'(u)$ est multiple de $E(u)^s$ étant donné que par définition toutes ses dérivées d'ordre $< r-1$ (et donc *a fortiori* d'ordre $< s$) s'annulent. Ainsi, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on trouve que $x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})$ si, et seulement si $tBE(u)^{s-1} N(E(u)) \in \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$, *i.e.* $BN(E(u)) \in \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$. Comme $S_{K_0}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} \simeq K$ est un corps et que $N(E(u))$ ne s'annule pas dans ce quotient, cela équivaut encore à $B \in \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$, à partir de quoi l'hérédité s'obtient directement. □

4.2 Calcul d'un réseau fortement divisible

Nous cherchons maintenant à construire un réseau fortement divisible à l'intérieur de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, essayant par là-même de généraliser l'exemple 2.2.2.(4) de [4] (qui est le point de départ de tout notre calcul). En réalité, nous n'allons y parvenir (probablement par manque de courage) que pour

$n_1 = n_2 = 1$, ce qui sera déjà suffisant pour mettre en défaut l'analogue du résultat de Fontaine-Laffaille expliqué dans l'introduction de cette section. Nous commençons toutefois par donner un outil pour construire des réseaux fortement divisibles qui s'applique à tous n_1 et n_2, et donc — nous l'espérons — pourra être utilisé fructueusement dans de futures références.

4.2.1 Un outil pour obtenir des réseaux fortement divisibles

Définition 4.2. Pour tout élément $X \in S_{K_0}$, on appelle *r-ième troncation* de X et on note $\mathrm{tronc}_r(X)$ l'unique polynôme en u à coefficients dans K_0 de degré $< er$ congru à X modulo $\mathrm{Fil}^r S_{K_0}$.

Le lemme suivant réunit quelques propriétés immédiates de l'application de troncation.

Lemme 4.3. *1. L'application* tronc_r *est* K_0*-linéaire.*

2. Pour tous X *et* Y *dans* S_{K_0}*, on a l'équivalence :*

$$X \equiv Y \pmod{\mathrm{Fil}^r S_{K_0}} \iff \mathrm{tronc}_r(X) = \mathrm{tronc}_r(Y).$$

3. Pour tout $X \in S$*, on a* $\phi(X) \equiv \phi \circ \mathrm{tronc}_r(X) \pmod{p^r S}$.

Démonstration. Les deux premières propriétés sont évidentes. Pour la dernière, il suffit de remarquer que $X - \mathrm{tronc}_r(X) \in S \cap \mathrm{Fil}^r S_{K_0} = \mathrm{Fil}^r S$ et que $\phi(\mathrm{Fil}^r S) \subset p^r S$. □

Proposition 4.4. *On suppose donnés un entier relatif* n *et un élément* $Z \in p^{n-n_1} S$ *satisfaisant l'implication suivante :*

$$\mathbf{H}(\mathcal{L}) : \begin{cases} A \in S \\ A(Z - \mathcal{L}_r p^{n_2-n_1}) \in p^n S + \mathrm{Fil}^r S_{K_0} \end{cases} \implies \begin{cases} \phi(A) \in p^{n_1} S \\ \phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A) Z \pmod{p^{n+n_1} S} \end{cases}$$

Alors le S*-module engendré par* $Ze_1 + p^{n_2-n_1} e_2$ *et* $p^n e_1$ *est un réseau fortement divisible dans* $\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Définissons $f_1 = Ze_1 + p^{n_2-n_1} e_2$ et $f_2 = p^n e_1$. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} p^n & Z \\ 0 & p^{n_2-n_1} \end{pmatrix}$ étant manifestement une puissance de p, il est clair que le S-module $\mathcal{M} = Sf_1 + Sf_2$ est libre et qu'il vérifie $\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} = \mathcal{D}$. Il ne reste donc qu'à montrer que $\phi(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) \subset p^r \mathcal{M}$ où, par définition, $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$. Soit $x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$. Alors $x \in \mathcal{M}$, d'où on déduit qu'il existe A et B dans S tels que $x = Af_1 + Bf_2$. Cette dernière égalité se réécrit encore :

$$x = Ap^{n_2-n_1}(\mathcal{L}_r e_1 + e_2) + (p^n B + AZ - A\mathcal{L}_r p^{n_2-n_1}) e_1$$

ce qui, combiné à l'hypothèse « $x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$ » et à la définition de $\mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$, montre que

$$p^n B + AZ - A\mathcal{L}_r p^{n_2-n_1} \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}. \tag{4}$$

En particulier $A(Z - \mathcal{L}_r p^{n_2-n_1}) \in p^n S + \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ et le prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ est satisfait. Ainsi, par hypothèse, p^{n_1} divise $\phi(A)$ et $\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A) Z \pmod{p^{n+n_1} S}$. Rappelons que nous souhaitons obtenir $\phi(x) \in p^r \mathcal{M}$. Les égalités

$$\begin{aligned} \phi(x) &= p^{n_1} \phi(AZ) e_1 + p^{2n_2-n_1} \phi(A) e_2 + p^{n+n_1} \phi(B) e_1 \\ &= p^{n_2} \phi(A) f_1 + \left[p^{n_1-n} \phi(AZ) + p^{n_1} \phi(B) - p^{n_2-n} \phi(A) Z \right] f_2 \end{aligned}$$

assurent que cela équivaut à démontrer que p^r divise à la fois $p^{n_2} \phi(A)$ et $p^{n_1-n} \phi(AZ) + p^{n_1} \phi(B) - p^{n_2-n} \phi(A) Z$. Pour le premier, c'est immédiat puisque l'on sait que p^{n_1} divise $\phi(A)$. Pour le second, on remarque dans un premier temps que la condition (4) entraîne grâce aux sorites du lemme 4.3 :

$$p^n \, \mathrm{tronc}_r(B) + \mathrm{tronc}_r(AZ) = p^{n_2-n_1} \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r)$$

puis :

$$p^n \phi(B) + \phi(AZ) \equiv p^{n_2-n_1} \phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \pmod{p^{r+n-n_1} S}$$

(on rappelle que Z est dans $p^{n-n_1} S$ par hypothèse). On est donc ramené à prouver que $p^{n_2-n} \phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv p^{n_2-n} \phi(A) Z \pmod{p^r S}$, ce qui s'obtient directement en multipliant par p^{n_2-n} la congruence $\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A) Z \pmod{p^{n_1+n} S}$. □

4.2.2 Le cas $n_1 = n_2 = 1$

À partir de maintenant on suppose $n_1 = n_2 = 1$ (et donc $r = 2$ et $p > 2e + 1$). Le but de ce paragraphe est de construire des réseaux fortement divisibles à l'intérieur des $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. On commence par un lemme qui va nous permettre de réduire notre étude à certains $\mathcal{L}$ particuliers pour lesquels la proposition 4.4 pourra être appliquée.

Lemme 4.5. *Pour tous $\mathcal{L} \in K$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les S_{K_0}-modules filtrés $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{L} + a)$ sont isomorphes.*

Pour tous $\mathcal{L} \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$, les S_{K_0}-modules filtrés $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $\mathcal{D}(p^n\mathcal{L})$ sont isomorphes.

Démonstration. Pour la première assertion, l'isomorphisme est donné par $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto ae_1 + e_2$. Pour la seconde assertion, il est donné par $e_1 \mapsto p^n e_1$, $e_2 \mapsto e_2$. □

Ainsi, pour le calcul que l'on souhaite faire, on peut sans perte de généralité remplacer $\mathcal{L}$ par $p^n(\mathcal{L} + a)$ avec $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \in \mathbb{Z}$. Se faisant, il est facile de voir que l'on peut se ramener à l'un de deux cas suivants (on rappelle que $\mathcal{L}$ est supposé ne pas appartenir à $\mathbb{Q}_p$) :

(i) $v_p(\mathcal{L}) = 0$ et l'image de $\mathcal{L}$ dans le corps résiduel n'appartient pas au sous-corps premier

(ii) $0 < v_p(\mathcal{L}) < 1$.

Soit $L_0 \in K_0[u]$ l'unique polynôme de degré $< e$ tel que $L_0(\pi) = \mathcal{L}$. Comme l'on a supposé $0 \leqslant v_p(\mathcal{L}) < 1$, L_0 est à coefficients dans W. Par ailleurs son terme constant λ est inversible dans le cas (i) et multiple de p dans le cas (ii). En outre, dans le cas (i), l'hypothèse indique que $\mu = \phi(\lambda) - \lambda$ est aussi inversible dans W. Dans le cas (ii), évidemment μ est multiple de p. En utilisant la définition de $\mathcal{L}_2$, on montre qu'il s'écrit :

$$\mathcal{L}_2 = L_0 + \frac{1}{p} L_1 E(u)$$

où L_1 est l'unique polynôme de degré $< e$ à coefficients dans K_0 tel que $L_1(\pi) = \frac{pL_0'(\pi)}{E'(\pi)}$. Comme $E(u)$ est un polynôme d'Eisenstein de degré $e < p$, la valuation de $E'(\pi)$ est $1 - \frac{1}{e}$. Ainsi $L_1(\pi)$ est divisible par π, d'où on déduit $L_1 \in uS + pS$.

Lemme 4.6. *Il existe un élément $t \in S$ tel que :*

- $(\phi(\lambda) - L_0)t \equiv L_1 \pmod{\mathrm{Fil}^1 S}$ *;*
- $1 + c\phi(t)$ *est inversible dans S (on rappelle que $c = \frac{\phi(E(u))}{p}$) ;*
- *dans le cas (i), $t \in uS + pS$.*

Démonstration. On traite séparément les deux cas. Dans le cas (i), on note que le terme constant de $\phi(\lambda) - L_0$ est $\phi(\lambda) - \lambda = \mu$, inversible dans W. Ainsi $\phi(\lambda) - L_0$ est lui-même inversible dans S, et on pose $t = \frac{L_1}{\phi(\lambda) - L_0}$. Il vérifie à l'évidence la première et la troisième condition. La seconde, quant à elle, résulte directement de la troisième.

Passons maintenant au cas (ii). On choisit pout t le polynôme à coefficients dans K_0 de degré $< e$ tel que $t(\pi) = \frac{L_1(\pi)}{\phi(\lambda) - L_0(\pi)}$. Il s'agit donc de montrer d'une part que t a ses coefficients dans W, et d'autre par la deuxième condition du lemme (la première étant immédiate par construction). Posons pour cela $j = ev_p(\mathcal{L})$. C'est un entier strictement compris entre 0 et e et L_0 s'écrit :

$$L_0(u) = \ell_0 + \ell_1 u + \cdots + \ell_{e-1} u^{e-1}$$

où les ℓ_i sont des éléments de W tels que p divise $\ell_0, \ldots, \ell_{j-1}$ tandis que ℓ_j est inversible. À partir de cela, on obtient facilement les congruences $L_0(\pi) \equiv \ell_j \pi^j \pmod{\pi^{j+1}}$ et $L_0'(\pi) \equiv j\ell_j \pi^{j-1} \pmod{\pi^j}$. En faisant des manipulations analogues avec le polynôme $E(u)$, il en ressort que $E'(\pi) \equiv e\pi^{e-1} \pmod{\pi^e}$ et $p \equiv -\frac{\pi^e}{c_0} \pmod{\pi^{e+1}}$ si pc_0 est le coefficient constant de $E(u)$. Ainsi trouve-t-on :

$$t(\pi) = \frac{L_1(\pi)}{\phi(\lambda) - L_0(\pi)} = \frac{-pL_0'(\pi)}{E'(\pi)(\phi(\lambda) - L_0(\pi))} \equiv -\frac{j}{ec_0} \pmod{\pi}$$

d'où il résulte que t est à coefficients dans W et que son coefficient constant est congru à $-\frac{j}{ec_0}$ modulo p. Par suite, le coefficient constant de $1 + c\phi(t)$ est congru à $1 - \frac{j}{e}$ modulo p et donc, en particulier, inversible dans W (car $0 < j < e$). Il s'ensuit que $1 + c\phi(t)$ est inversible dans S comme annoncé. □

On fixe maintenant un élément $t \in S$ satisfaisant les conditions du lemme précédent et on pose

$$Z = \frac{\phi(L_0) + c\phi(t\phi(\lambda))}{1 + c\phi(t)} \in S. \tag{5}$$

Lemme 4.7. *On a $Z - \phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$.*

Démonstration. Un calcul donne :

$$Z - \phi(\lambda) = \frac{\phi(L_0 - \lambda) + c\phi(t\mu)}{1 + c\phi(t)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\phi(L_0 - \lambda) + c\phi(t\mu) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Comme, par définition, λ est le terme constant de L_0, on a $L_0 - \lambda$ multiple de u et donc $\phi(L_0 - \lambda)$ est divisible par u^p. Or $u^p = u^{p-2e}u^{2e} \equiv u^{p-2e}E(u)^2 \pmod{pS}$, d'où $u^p \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Il en résulte que $\phi(L_0 - \lambda)$ est toujours dans $pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Ainsi, pour terminer la preuve, il suffit de justifier que $\phi(t\mu)$ est lui aussi dans $pS + \mathrm{Fil}^2 S$. C'est clair si on est dans le cas (ii) puisqu'alors μ est multiple de p. Si, au contraire, on est dans le cas (i), le lemme 4.6 nous dit que $t \in uS + pS$ et on conclut comme précédemment. □

Notre but désormais est de montrer que le couple $(1, Z)$ satisfait l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathcal{L})$. Si on y parvient, par application de la proposition 4.4, on aura bien réussi à construire un réseau fortement divisible dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. On considère un élement $A \in S$ satisfaisant le prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ (et on souhaite bien évidemment montrer la conclusion). On observe qu'ajouter à A un élément de $\mathrm{Fil}^2 S$ ne modifie pas la véracité de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$. Ainsi, on peut supposer que $A = \mathrm{tronc}_2(A)$ et par suite qu'il s'écrit sous la forme $A = pA_0 + A_1E(u)$ où A_0 (resp. A_1) est un polynôme à coefficients dans $\frac{1}{p}W$ (resp. W) de degré $< e$.

Lemme 4.8. *Avec les notations précédentes, A_0 est à coefficients dans W.*

Démonstration. Encore une fois, on traite séparément les cas (i) et (ii).

Dans le cas (i), on remarque que $A(\mathcal{L}_2 - Z)$ appartient simultanément à $pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ et $\frac{1}{p}S$ (puisque $\mathcal{L}_2 \in \frac{1}{p}S$). Ainsi $A(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS + \frac{1}{p}\mathrm{Fil}^2 S$ et en appliquant ϕ on obtient $\phi(A)\phi(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS$. Or, en utilisant le lemme 4.7, on vérifie facilement que $\phi(\mathcal{L}_2 - Z) = \phi(L_0) + c\phi(L_1) - \phi(Z)$ a un terme constant congru à $-\phi(\mu)$ modulo p, et donc qu'il est inversible dans W. Ainsi $\phi(\mathcal{L}_2 - Z)$ est inversible dans S et, de $\phi(A)\phi(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS$, on déduit $\phi(A) \in pS$. Comme $\phi(A) = p\phi(A_0) + pc\phi(A_1)$, il suit $\phi(A_0) \in S$ à partir de quoi le lemme s'obtient facilement.

Dans le cas (ii), on a $AZ \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ et donc le prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ s'écrit ici $A\mathcal{L}_2 \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$. Soit X le polynôme à coefficients dans W de degré $< e$ tel que $X(\pi) = \frac{p}{\mathcal{L}} \in W$. Alors, $\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1$ s'annule en π, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1 \equiv \frac{Y}{p}E(u) \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}} \tag{6}$$

pour un certain polynôme Y à coefficients dans K_0, uniquement déterminé si on impose en outre $\deg Y < e$ (ce que nous ferons par la suite). En dérivant (6) et en évaluant en π, on obtient $Y(\pi) = \frac{pX'(\pi)}{X(\pi)E'(\pi)}$. Un argument analogue à celui conduit lors de la preuve du lemme 4.6 permet d'accéder à la valuation de $Y(\pi)$: on trouve $v_p(Y(\pi)) = 0$. Ainsi Y est à coefficients dans W et son terme constant est inversible dans cet anneau. On en déduit que Y est inversible dans S. Par ailleurs, on a

$$A_0 Y E(u) \equiv A\left(\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1\right) = \frac{A\mathcal{L}_2}{p}X - A \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}}$$

d'où on trouve $A_0 Y E(u) \in S + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ puis $A_0 Y \in S + \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$. De l'inversibilité de Y, on déduit enfin $A_0 \in S + \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$ à partir de quoi la conclusion est immédiate. □

En combinant les lemmes 4.3 et 4.8, il vient

$$\phi(A) \equiv \phi \circ \mathrm{tronc}_2(A) = p\phi(A_0) + pc\phi(A_1) \pmod{p^2 S}. \tag{7}$$

En particulier $\phi(A) \in pS$ (ce qui avait déjà été vu dans la preuve du lemme 4.8 dans le cas (i)). Il ne reste donc plus qu'à démontrer que p^2 divise

$$\Delta = \phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) - \phi(A)Z. \tag{8}$$

En appliquant $\phi \circ \mathrm{tronc}_2$ à la congruence

$$A\mathcal{L}_2 \equiv pA_0L_0 + (A_0L_1 + A_1L_0)E(u) \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}} \tag{9}$$

et en utilisant à nouveau le lemme 4.3, on déduit :

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) \equiv p\phi(A_0L_0) + pc\phi(A_0L_1 + A_1L_0) \pmod{p^2 S}. \tag{10}$$

En remplaçant dans (8) $\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2)$, $\phi(A)$ et Z par les expressions données respectivement par les équations (10), (7) et (5), on obtient après un calcul un peu laborieux :

$$\frac{\Delta}{p} \equiv \frac{c\phi(A_0)}{1+c\phi(t)}\,\phi\big(L_1 + L_0t - \phi(\lambda)t\big) + \frac{c^2\phi(t)}{1+c\phi(t)}\,\phi\big(A_0L_1 + A_1L_0 - \phi(\lambda)A_1\big) \pmod{pS}.$$

Le premier terme du membre de droite est divisible par p étant donné que, par la première condition du lemme 4.6, $L_1 + L_0t - \phi(\lambda)t \in \mathrm{Fil}^1 S$. Il ne reste donc plus qu'à prouver qu'il en est de même du second terme. Pour cela, on remarque que le lemme 4.7 et la congruence (9) entraînent ensemble

$$A(\mathcal{L}_2 - Z) \equiv E(u)\big(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)\big) \pmod{pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}}. \tag{11}$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse du prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$, il vient $E(u)(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$ puis $A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$. En appliquant ϕ, on obtient finalement $\phi(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)) \in pS$ comme souhaité.

4.3 Réduction modulo p et poids de l'inertie modérée

On conserve les hypothèses et les notations de la partie précédente : notamment, on continue de supposer que $\mathcal{L}$ relève soit du cas (i), soit du cas (ii) (on rappelle que, grâce au lemme 4.5, on peut toujours se ramener à l'un de ces deux cas), et en particulier donc que $0 \leqslant v_p(\mathcal{L}) < 1$. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{L})$ le réseau fortement divisible de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ qui est donné par la proposition 4.4, et soit $T = T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ le $\mathbb{Z}_p$-réseau de $V(\mathcal{L})$ correspondant. Posons $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/p\mathcal{M}$, et pour tout $m \in \mathcal{M}$, notons $\overline{m}$ son image dans $\overline{\mathcal{M}}$. De même, si s est un élément de S, définissons $\overline{s}$ comme l'image de s dans $\tilde{S}_1 = k[u]/u^{ep}$ (*cf* le dernier alinéa du paragraphe 2.2). L'objectif de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.9. *Le polygone de Hodge de $\overline{\mathcal{M}}$ a pour pentes $v_p(\mathcal{L})$ et $2 - v_p(\mathcal{L})$. De plus, si $v = v_p(t(\pi))$ (où on rappelle que $t \in S$ est un élément satisfaisant les condition du lemme 4.6), on a*

1. *si $0 \leqslant v < 1$, alors T/pT est réductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont $1 - v$ et $1 + v$;*
2. *si $v \geqslant 1$, alors T/pT est irréductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont 0 et 2 (*i.e.* le polygone de l'inertie modérée est confondu avec le polygône de Hodge).*

Remarque. Lorsque $e = 1$, on a $t(\pi) = 0$, et donc T/pT est toujours irréductible et son polygone de l'inertie modérée a pour pentes 0 et 2. Si, au contraire, $e > 1$, alors tous les couples (i'_1, i'_2) d'éléments de $\frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $i'_1 \leqslant i'_2$ et $i'_1 + i'_2 = 2$ peuvent apparaître comme pentes du polygone de l'inertie modérée. En effet, si x est n'importe quel élément de $\mathcal{O}_{K_0}^\times$ dont la réduction modulo p n'appartient pas au sous-corps premier, et si $0 < j < e$ est un entier, alors les paramètres $\mathcal{L} = \pi^j$, $x + \pi^j$ et x conduisent respectivement à $v = 0$, $\frac{j}{e}$ et ∞.

Avant de commencer la démonstration, introduisons quelques notations supplémentaires. Soient U et V les uniques polynômes à coefficients dans W de degré $< e$ tels que $U(L_0 - \phi(\lambda)) = p + VE(u)$. Dans le cas (i), on remarque que U et p sont associés modulo $\mathrm{Fil}^1 S$ (*i.e.* ils définissent le même idéal principal de $S/\mathrm{Fil}^1 S$), alors que dans le cas (ii), on observe qu'étant donné que les termes constants de U et $L_0 - \phi(\lambda)$ sont tous deux divisibles par p, le terme constant de V est, lui, congru

à $-c_0^{-1}$ modulo p. Finalement, remarquons que si t satisfait les conditions du lemme 4.6, il en est de même de $\mathrm{tronc}_1(t)$ et qu'en outre modifier t en $\mathrm{tronc}_1(t)$ ne change pas la valeur de v. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que $t = \mathrm{tronc}_1(t)$; c'est ce que nous faisons à partir de maintenant.

Soit $\mathcal{A} \subset S$ l'idéal formé des éléments A qui satisfont le prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A} = \{A \in S \,/\, A(Z - \mathcal{L}_2) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}\}.$$

Lemme 4.10. *L'idéal $\mathcal{A}$ est engendré par $p + tE(u)$, $UE(u)$ et $\mathrm{Fil}^2 S$.*

Démonstration. Bien entendu, on a $\mathrm{Fil}^2 S \subset \mathcal{A}$. En outre, la formule (11) combinée à la première condition du lemme 4.6 montre que $p + tE(u) \in \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ un élément arbitraire. Quitte à ajouter à A un élément de $\mathrm{Fil}^2 S$, on peut supposer que $A = \mathrm{tronc}_2(A)$. Par le lemme 4.8, on peut alors écrire $A = pA_0 + A_1 E(u)$ avec $A_0, A_1 \in W[u]$. Quitte à soustraire maintenant le multiple adéquat de $p + tE(u)$, on peut supposer que $A_0 = 0$, et donc que $A = A_1 E(u)$. On est finalement ramené à déterminer les polynômes $A_1 \in W[u]$ pour lesquels $A_1 E(u) \in \mathcal{A}$. Par une nouvelle application de la formule (11), c'est le cas si et seulement si $A_1(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$.

Dans le cas (i), $L_0 - \phi(\lambda)$ est inversible, d'où on obtient l'équivalence entre $A_1(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ et $A_1 E(u) \in pE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$. Comme $UE(u)$ et $pE(u)$ sont associés modulo $\mathrm{Fil}^2 S$, la condition est encore équivalente à $A_1 E(u) \in UE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$, et le lemme est démontré.

Dans le cas (ii), on note que p divise $A_1(\pi)(L_0(\pi) - \phi(\lambda))$. On en déduit qu'il existe $U' \in S$ tel que $A_1 - U'U \in \mathrm{Fil}^1 S$, puis que $A_1 E(u) \in UE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$ comme annoncé. Réciproquement $U(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ par construction de U, d'où $UE(u) \in \mathcal{A}$. □

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, définissons

$$m(A) = A \cdot f_1 + \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z)) \cdot f_2\,.$$

À partir de la congruence (4) et du lemme 4.10, on démontre rapidement le corollaire suivant.

Corollaire 4.11. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $m(A)$ est un élément de $\mathrm{Fil}^2\mathcal{M}$. De plus, $\mathrm{Fil}^2\mathcal{M}$ est engendré par $m(p + tE(u))$, $m(UE(u))$ et $(\mathrm{Fil}^2 S)\mathcal{M}$.*

Dans la suite, nous écrirons $\overline{m}(A)$ à la place de $\overline{m(A)}$. On cherche à présent à construire *deux* éléments qui engendrent $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ et à calculer leur image par ϕ_2. Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 4.12. *Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\phi_2(\overline{m}(A)) = \overline{(\phi(A)/p)f_1} + \overline{Cf_2}$$

où

$$C = \frac{\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) - \phi(A)Z + \phi(\phi(\lambda))\phi(A - \mathrm{tronc}_2(A))}{p^2} \in S.$$

Démonstration. Le lemme suivra de la preuve de la proposition 4.4 une fois que l'on aura montré que C et $\frac{1}{p^2}(p\phi(B) + \phi(AZ) - \phi(A)Z)$ sont congrus modulo p, où $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$.

Puisque $A \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ et $Z - \phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$, on a $A(Z - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^3 S$. Ainsi

$$\mathrm{tronc}_2(A(Z - \phi(\lambda))) - A(Z - \phi(\lambda)) \in p\mathrm{Fil}^2 S + \mathrm{Fil}^3 S$$

puis, en appliquant ϕ :

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A(Z - \phi(\lambda))) - \phi(A(Z - \phi(\lambda))) \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Après un petit calcul :

$$p^2 C \equiv p\phi(B) + \phi(AZ) - \phi(A)Z \pmod{p^3}$$

ce qui est exactement ce que l'on voulait. □

Proposition 4.13. *1. Dans le cas (i), $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ est engendré par $\overline{m}(p + tE(u))$ et $\overline{E(u)^2 f_1}$.*

2. Dans le cas (ii), $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ est engendré par $\overline{m}(p + tE(u))$ et $\overline{m}(UE(u))$.

Démonstration. Il suffit, dans chacun des cas, de montrer que les images par ϕ_2 des deux éléments qui apparaissent dans l'énoncé du lemme engendrent $\overline{\mathcal{M}}$ comme $\widetilde{S}_1$-module.

On commence avec $A = p + tE(u)$. Alors $\phi(A)/p = 1 + c\phi(t)$ et $\overline{(\phi(A)/p)}$ est une unité in $\widetilde{S}_1$ grâce à la seconde condition du lemme 4.6. On calcule maintenant l'élément C du lemme 4.12. Comme $A\mathcal{L}_2 \equiv pL_0 + (tL_0 + L_1)E \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}}$, le premier terme du numérateur de C est

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = p\phi(L_0) + pc \cdot \phi \circ \mathrm{tronc}_1(tL_0 + L_1)\,.$$

Le second terme, quant à lui, est $\phi(A)Z = p\phi(L_0) + pc\phi(t\phi(\lambda))$. Comme $\mathrm{tronc}_2(A) = A$, le troisième terme s'annule et, après s'être rappelé que l'on a supposé $t = \mathrm{tronc}_1(t)$, on obtient

$$p^2 C = pc \cdot \phi \circ \mathrm{tronc}_1(tL_0 + L_1 - t\phi(\lambda))\,.$$

La première condition du lemme 4.6 montre que la quantité précédente s'annule, et donc que $C = 0$. Au final

$$\phi_2(\overline{m}(p + tE(u))) = \overline{(1 + c\phi(t))f_1}.$$

On retiendra en particulier que le coefficient devant $\overline{f_1}$ dans le membre de droite est inversible.

Intéressons-nous maintenant à l'autre générateur, c'est-à-dire $m = \overline{E(u)^2 f_1}$ dans le cas (i) et $m = \overline{m}(UE(u))$ dans le cas (ii). Dans le cas (i), on remarque que puisque $\mathrm{tronc}_2(E(u)^2(\mathcal{L}_2 - Z)) = 0$, on a $m = \overline{m}(A)$ avec $A = E(u)^2$. Ainsi on peut appliquer le lemme 4.12 pour calculer $\phi_2(f)$. Comme $\phi(A) = p^2c^2$, on a $\overline{\phi(A)/p} = 0$. Par ailleurs, après avoir remarqué que $\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = 0$, on trouve facilement

$$C = \frac{c^2\phi(\phi(\lambda) - L_0)}{1 + c\phi(t)}.$$

Ainsi $\phi_2(m) = \overline{Cf_2}$ et le fait qu'il engendre tout $\overline{\mathcal{M}}$ avec $\phi_2(\overline{m}(p + tE(u)))$ résulte de l'inversibilité de C satisfaite puisque $\phi(\lambda) - L_0$ est une unité dans ce cas.

Dans le cas (ii), on a clairement $m = \overline{m}(A)$ avec $A = UE(u)$. On peut donc appliquer à nouveau le lemme 4.12. On a d'abord clairement $\overline{\phi(A)/p} = \overline{c\phi(U)}$. Par ailleurs, après un assez long calcul qui utilise les égalités $\mathrm{tronc}_2(A) = A$, $\mathrm{tronc}_1(\phi(\lambda)U) = \phi(\lambda)U$ et $\mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = \mathrm{tronc}_1(UL_0)E(u) = (p + \phi(\lambda)U)E(u)$ ainsi que la définition de U et V, on trouve

$$C = \frac{c^2\phi(t - V)}{1 + c\phi(t)}\,.$$

Donc

$$\phi_2(\overline{m}(UE(u))) = \overline{c\phi(U)f_1} + \overline{Cf_2}.$$

Pour conclure, il suffit donc encore une fois de justifier que C est inversible dans S. Or nous avons déjà évalué les termes constants de t et V, et trouvé qu'ils sont respectivement congrus à $-\frac{j}{ec_0}$ et $-\frac{1}{c_0}$ modulo p. Ainsi, ils ne sont pas congrus entre eux, et la proposition s'ensuit. □

Définissons $g_1 = \overline{m}(p + tE(u))$ et $g_2 = \overline{E(u)^2 f_1}$ (resp. $g_2 = \overline{m}(UE(u))$) dans le cas (i) (resp. le cas (ii)). Posons également

$$B_1 = (L_0 - \phi(\lambda)) + \mathrm{tronc}_1\left(\frac{t(\phi(\lambda) - Z)}{p}\right)u^e$$

et dans le cas (ii) seulement

$$B_2 = \left(1 + \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_1(U(\phi(\lambda) - Z))\right)u^e\,.$$

On remarque tout de suite que par le lemme 4.7, B_1 et B_2 sont tous les deux des éléments de S. La structure de $\overline{\mathcal{M}}$ est alors résumée dans la proposition suivante.

Proposition 4.14. *1. Dans le cas (i),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par*

$$\begin{aligned} g_1 &= u^e\overline{tf_1} + \overline{B_1 f_2} \\ g_2 &= u^{2e}\overline{f_1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi_2(g_1) &= \overline{(1+c\phi(t))f_1}\\ \phi_2(g_2) &= \overline{\frac{c^2\phi(\phi(\lambda)-L_0)}{1+c\phi(t)}f_2}\end{aligned}$$

où les deux coefficients dans les deux dernières équations sont des unités.

2. *Dans le cas (ii),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par*

$$\begin{aligned}g_1 &= u^e\overline{tf_1}+\overline{B_1f_2}\\ g_2 &= u^e\overline{Uf_1}+\overline{B_2f_2}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi_2(g_1) &= \overline{(1+c\phi(t))f_1}\\ \phi_2(g_2) &= \overline{c\phi(U)f_1}+\overline{\frac{c^2\phi(t-V)}{1+c\phi(t)}f_2}\end{aligned}$$

et les coefficients de f_1 *dans* $\phi_2(g_1)$ *et* f_2 *dans* $\phi_2(g_2)$ *sont des unités.*

Démonstration. À la lumière de la proposition 4.13 et de sa preuve, il ne reste qu'à montrer que nos formules pour B_1 et B_2 sont correctes.

Pour le premier, il s'agit de montrer que si $A = p + tE(u)$ et $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$, alors $B \equiv B_1 \pmod p$. Or, le lemme 4.7 donne $pZ \equiv p\phi(\lambda) \pmod{p^2S + \mathrm{Fil}^2S}$, à partir de quoi un calcul direct utilisant la première condition du lemme 4.6 entraîne

$$A(\mathcal{L}_2 - Z) \equiv p(L_0 - \phi(\lambda)) + tE(u)(\phi(\lambda) - Z) \pmod{p^2S + \mathrm{Fil}^2S_{K_0}}$$

puis la conclusion.

Pour le second, il s'agit de même de montrer que si $A = UE(u)$ et $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$, alors $B \equiv B_2 \pmod p$. Mais c'est immédiat par le lemme 4.7 et la définition de U. □

Dans le cas (i), on observe que $\overline{B_1}$ est inversible, alors que $\overline{t}$ est soit égal à 0, soit le produit de u^j ($j \leqslant 1$) par une unité avec $v = j/e$ si $0 < j < e$ et $v \geqslant 1$ sinon. Dans le cas (ii), par contre, $\overline{B_1}$ (resp. $\overline{U}$, resp. $\overline{B_2}$) est le produit d'une unité par u^j (resp. u^{e-j}, resp. u^e), alors que $\overline{t}$ est, quant à lui, inversible (c'est-à-dire $v = 0$). De plus, on vérifie que le coefficient en u^e dans $\overline{tB_2} - \overline{B_1U}$ n'est autre que le terme constant de $\overline{t} - \overline{V}$, dont on sait qu'il ne s'annule pas. La première partie du théorème 4.9 résulte facilement des considérations précédentes, alors que la seconde est une conséquence du théorème 5.2.2 de [6] et de la proposition suivante.

Proposition 4.15. *Soit* $\overline{\mathcal{M}}$ *un objet de* $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/\widetilde{S}_1}$ *de rang* 2 *admettant pour base* (e_1, e_2). *Dans la suite de la proposition, toutes les lettres grecques font références à des éléments inversibles de* $\widetilde{S}_1$.

0. *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* e_2 *et* $u^{2e}e_1$ *et que*

$$\phi_2(e_2) = \mu e_1\,, \qquad \phi_2(u^{2e}e_1) = \rho e_2\,.$$

Alors $T_{\mathrm{st}}(\overline{\mathcal{M}})$ *est irréductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont* 0 *et* 2.

1. *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* $\alpha u^{e+j}e_1 + e_2$ *et* $u^{2e}e_1$ *et que*

$$\phi_2(\alpha u^{e+j}e_1 + e_2) = \mu e_1\,, \qquad \phi_2(u^{2e}e_1) = \rho e_2\,.$$

Si $j \geqslant e$, *alors* $T_{\mathrm{st}}(\overline{\mathcal{M}})$ *est irréductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont* 0 *et* 2. *Au contraire, si* $j < e$, *alors* $\overline{\mathcal{M}}$ *admet un sous-objet* $\overline{\mathcal{M}}'$ *de rang* 1 *tel que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}' = u^{e-j}\overline{\mathcal{M}}'$.

2. *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* $\alpha u^e e_1 + \beta u^j e_2$ *et* $\gamma u^{2e-j}e_1 + \delta u^e e_2$ *avec* $j < e$ *et* $\alpha\delta - \beta\gamma \in \widetilde{S}_1^\times$. *Supposons également que*

$$\phi_2(\alpha u^e e_1 + \beta u^j e_2) = \mu e_1\,, \qquad \phi_2(\gamma u^{2e-j}e_1 + \delta u^e e_2) = \sigma u^{p(e-j)}e_1 + \rho e_2\,.$$

Alors $\overline{\mathcal{M}}$ *admet un sous-objet* $\overline{\mathcal{M}}'$ *de rang* 1 *tel que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}' = u^e\overline{\mathcal{M}}'$.

Démonstration. L'alinéa (0) est immédiat par le théorème 5.2.2 de [6].

Passons à (1). Si $j \geqslant e$, posons $e_1' = \phi_2(e_2) = \mu e_1 - \phi(\alpha)u^{p(j-e)}e_2$. À partir de $e_2 \in \mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ et $\phi(u^{2e}) = 0$, on obtient $\phi(u^{2e}e_1') = \phi(\mu)\rho e_2$. Comme (e_1', e_2) est encore une base de $\overline{\mathcal{M}}$, le résultat suit de (0).

Supposons désormais $j < e$. On cherche $\overline{\mathcal{M}}'$ engendré par un vecteur $m \in \overline{\mathcal{M}}$ de la forme $m = e_2 + Xu^{p(e-j)}e_1$ où X est inversible dans $\widetilde{S}_1$. On calcule

$$\phi_2(u^{e-j}e_2) = -\rho\phi(\alpha)e_2 + \mu u^{p(e-j)}e_1\,.$$

puis, en utilisant $2e < (p+1)(e-j)$:

$$\phi_2(u^{e-j}m) = \rho(-\phi(\alpha) + \phi(X)u^{p((p+1)(e-j)-2e)})e_2 + \mu u^{p(e-j)}e_1.$$

Ainsi, si X est une solution

$$\rho X(-\phi(\alpha) + \phi(X)u^{p((p+1)(e-j)-2e)}) = \mu \tag{12}$$

on a terminé. Mais on montre facilement que (12) admet une unique solution en résolvant l'équation coefficient par coefficient. En outre, le coefficient constant de X est celui de $-\frac{\mu}{\rho\phi(\alpha)}$, d'où on déduit l'inversibilité souhaitée de X. Il faut encore vérifier que $\overline{\mathcal{M}}'$ est stable par N, mais cela ne pose pas de problème car la relation de commutation à ϕ_2 implique directement $N \circ \phi_2(u^{e-j}m) = 0$ puis la stabilité souhaitée étant donné que $\phi_2(u^{e-j}m)$ est un générateur de $\overline{\mathcal{M}}'$.

Finalement, on traite (2). On cherche à nouveau $\overline{\mathcal{M}}'$ engendré par un vecteur $m \in \overline{\mathcal{M}}$ de la forme $m = e_2 + Xu^{p(e-j)}e_1$, toutefois sans imposer à X cette fois-ci d'être inversible. En posant $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, on calcule

$$\phi_2(\Delta u^e e_2) = \rho\phi(\alpha)e_2 + (\phi(\alpha)\sigma - \phi(\gamma)\mu)u^{p(e-j)}e_1\,.$$

On a $u^{p(e-j)}e_1 \in \mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ car $p(e-j) > 2e$, d'où il suit $\phi_2(u^e \cdot u^{p(e-j)}e_1) = 0$. Ainsi

$$\phi_2(u^e m) = \phi_2(u^e e_2) = \frac{\rho\phi(\alpha)}{\phi(\Delta)}\left(e_2 + \frac{\phi(\alpha)\sigma - \phi(\gamma)\mu}{\rho\phi(\alpha)}u^{p(e-j)}e_1\right)$$

et, puisque $\frac{\rho\phi(\alpha)}{\phi(\Delta)}$ est inversible, on peut prendre $X = \frac{\phi(\alpha)\sigma - \phi(\gamma)\mu}{\rho\phi(\alpha)}$. De même que dans le cas précédent, on vérifie pour finir que $\overline{\mathcal{M}}'$ est stable par N. □

Références

[1] C. Breuil, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224

[2] C. Breuil, *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327

[3] C. Breuil, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[4] C. Breuil, *Integral p-adic Hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80

[5] C. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en $\ell = p$*, Duke math. J. **115** (2002), 205–310

[6] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$*, J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92

[7] C. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publ. (1962), New York

[8] J. M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111

[9] J. M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184

[10] J. M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608

[11] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496

[12] T. Liu, *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, Compositio math. **144** (2008), 61–88

[13] J. P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331