



HAL
open science

Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

Xavier Caruso. Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables. 2008. hal-00211173v1

HAL Id: hal-00211173

<https://hal.science/hal-00211173v1>

Preprint submitted on 21 Jan 2008 (v1), last revised 13 Jun 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables

Xavier Caruso

Janvier 2008

Table des matières

1	Introduction	1
2	La théorie de Breuil	2
2.1	Théorie de Hodge p -adique rationnelle	2
2.2	Théorie de Hodge p -adique entière et de torsion	4
3	Position relative des divers polygones	5
3.1	Notion de bases adaptées	5
3.2	Preuve du théorème 1.1	6
3.3	Preuve du théorème 1.2	9

1 Introduction

Soient p un nombre premier, et k un corps parfait de caractéristique p . On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k , K_0 le corps des fractions de W et on fixe K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e , d'anneau des entiers noté \mathcal{O}_K . On fixe également \bar{K} une clôture algébrique de K , on désigne par G_K le groupe de Galois absolu de K et par I le sous-groupe d'inertie.

Si V est une \mathbb{Q}_p -représentation semi-stable (voir [9]) de G_K de dimension d , on sait lui associer plusieurs invariants numériques. Il y a classiquement les poids de Hodge-Tate et les pentes de l'action du Frobenius sur le module filtré de Fontaine correspondant. Ce sont tous deux des d -uplets de rationnels (entiers pour les poids de Hodge-Tate) que l'on représente parfois sous la forme de polygones appelés alors respectivement polygone de Hodge et polygone de Newton. (Pour les définitions de ces multiples objets, voir paragraphe 2.1.) On sait que ces deux polygones ont même point d'arrivée et que le polygone de Hodge est toujours situé en-dessous de celui de Newton. Si $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_d$ sont les poids de Hodge-Tate et $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$ les pentes de Frobenius, la condition visuelle sur les polygones se traduit par les inégalités

$$h_1 + \dots + h_k \leq n_1 + \dots + n_k$$

pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ avec égalité si $k = d$.

Il existe toutefois un troisième invariant numérique que l'on peut associer à V . Rappelons avant de le définir que toute représentation irréductible H du groupe d'inertie I est simplement décrite par ses poids de l'inertie modérée : ils forment une suite de $d' = \dim H$ entiers compris entre 0 et $p-1$ (définie à permutation circulaire près). (Pour des précisions sur cette classification, le lecteur pourra se reporter au paragraphe 1 de [14].)

Considérons à présent T un \mathbb{Z}_p -réseau dans V stable par l'action du groupe de Galois (un tel réseau existe toujours par compacité de G_K), et focalisons-nous sur la représentation T/pT

restreinte au groupe d'inertie I . D'après les rappels que nous venons de faire, à tout quotient de Jordan-Hölder de cette représentation, il correspond une suite d'entiers compris entre 0 et $p - 1$. D'autre part, un théorème de Brauer-Nesbitt (voir paragraphe 82.1 de [7]) montre que la famille des quotients de Jordan-Hölder de T/pT ne dépend que de la représentation V (et pas du choix de T). Ainsi, en regroupant les poids associés à chacun des quotients de Jordan-Hölder, on obtient une collection de d entiers compris entre 0 et $p - 1$ qui est *canoniquement* associée à V . Notons-les $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_d$.

Il est naturel de se demander si ces entiers ont un rapport avec les autres invariants. Lorsque $e = 1$ et lorsque la représentation est cristalline, Fontaine et Laffaille ont montré dans [10] que les poids de l'inertie modérée sont les mêmes que les poids de Hodge-Tate. Toutefois, ce résultat simple est mis en défaut pour les représentations semi-stables non cristallines, même dans les cas les plus simples : dimension 2 et $e = 1$. Plus précisément, dans cette situation, Breuil et Mézard ont montré dans [5] par un calcul explicite que si les poids de Hodge-Tate sont 0 et r ($r < p - 1$), alors les poids de l'inertie modérée peuvent être n'importe quel couple (i_1, i_2) pourvu que $i_1 + i_2 = r$.

Dans cette note, nous dégagons des contraintes explicites sur les poids de l'inertie modérée dans le cas général. Commençons pour cela par définir *le polygone de l'inertie modérée* comme le polygone associé aux rationnels $i'_k = \frac{i_k}{e}$. Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que tous les poids de Hodge-Tate soient compris entre 0 et r pour un entier r vérifiant $er < p - 1$. Alors, le polygone de l'inertie modérée est situé au-dessus du polygone de Hodge. De plus ils ont même point terminal. Autrement dit, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$:*

$$e(h_1 + \dots + h_k) \leq i_1 + \dots + i_k$$

avec égalité si $k = d$.

Remarque. L'hypothèse $er < p - 1$ se justifie aisément puisque les poids de l'inertie modérée sont par définition bornés par $p - 1$. On pourrait toutefois se demander si le résultat demeure avec la condition plus faible $er \leq p - 1$. La réponse est négative en général, mais il est tout à fait probable qu'elle devienne positive sous certaines hypothèses supplémentaires simples.

Fort de ce résultat, nous essayons ensuite de comprendre s'il y a un rapport entre polygone de l'inertie modérée et polygone de Newton. Nous obtenons le résultat partiel suivant :

Théorème 1.2. *Supposons que tous les poids de Hodge-Tate soient compris entre 0 et r pour un entier r vérifiant $er < p - 1$. Alors, tant que les polygones de Hodge et de Newton ne se séparent pas, le polygone de l'inertie modérée coïncident aussi avec eux. En particulier, si polygone de Hodge et polygone de Newton coïncident, ils coïncident également avec le polygone de l'inertie modérée.*

Avec des égalités, cela se traduit de la façon suivante. Soit $k \in \{1, \dots, d\}$. Supposons que pour tout $k' \leq k$, on ait $h_{k'} = n_{k'}$. Alors $i_k = eh_k (= en_k)$.

L'organisation de cette note se fait comme suit. La partie 2 est consacrée à des rappels sur la théorie de Breuil développée dans [1], [2], [3] et [6], qui joue un rôle central dans la démonstration des résultats précédemment annoncés. La partie 3, quant à elle, regroupe les preuves desdits résultats.

2 La théorie de Breuil

Cette section est dédiée aux préliminaires de théorie de Hodge p -adique, rationnelle et entière. Nous rappelons dans un premier temps la correspondance, due à Fontaine, entre représentations p -adiques semi-stables et (φ, N) -modules filtrés faiblement admissibles. Ensuite, nous détaillons la théorie de Breuil qui permet de comprendre les réseaux à l'intérieur de telles représentations galoisiennes et les réductions modulo p de ces réseaux.

2.1 Théorie de Hodge p -adique rationnelle

Les (φ, N) -modules filtrés de Fontaine

Définition On note $\text{MF}_K(\varphi, N)$ la catégorie dont les objets sont la donnée de :

- un K_0 -espace vectoriel D de dimension finie ;

- une filtration décroissante $\text{Fil}^t D_K$ exhaustive et séparée sur $D_K = D \otimes_{K_0} K$ par des sous K -espaces vectoriels;
- une application K_0 -semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur K_0) injective $\varphi : D \rightarrow D$ (appelée Frobenius);
- une application K_0 -linéaire $N : D \rightarrow D$ (appelée monodromie) vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

Les morphismes dans cette catégorie sont les applications K_0 -linéaires compatibles au Frobenius, à la monodromie et à la filtration après extension des scalaires à K . On associe à tout objet $D \in \text{MF}_K(\varphi, N)$ deux invariants numériques qui sont son nombre de Hodge et son nombre de Newton. Si D est de dimension 1, le nombre de Hodge $t_H(D)$ est défini comme le plus grand entier t tel que $\text{Fil}^t D_K = D_K$ alors que le nombre de Newton $t_N(D)$ est la pente du Frobenius sur D (c'est-à-dire la valuation p -adique de $\alpha \in K$ tel que $\phi(x) = \alpha x$ pour un $x \in D$). Si D est de dimension d , on pose par définition $t_N(D) = t_N(\Lambda^d D)$ et $t_H(D) = t_H(\Lambda^d D)$. Un objet D est dit faiblement admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et si pour tout $D' \subset D$ stable par φ et N et muni de la filtration induite, on a $t_N(D') \leq t_H(D')$. On note $\text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$ la sous-catégorie de $\text{MF}_K(\varphi, N)$ formée des objets faiblement admissibles. On montre que c'est une catégorie abélienne, stable par produit tensoriel et dualité.

Polygones de Hodge et de Newton Plutôt que les nombres de Hodge et de Newton, on considère parfois les polygones de Hodge et de Newton. Comme ceux-ci sont centraux dans toute cette note, nous en rappelons la définition. Rappelons dans un premier temps que si $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$ sont des nombres, on leur associe un « polygone » de la façon suivante : on rejoint dans le plan les points de coordonnées $(k, n_1 + \dots + n_k)$ et on trace les verticales issues du début et de la fin de la ligne brisée précédente. Le point $(d, n_1 + \dots + n_d)$ est appelé *point d'arrivée* ou *point terminal* du polygone. Si les entiers n_i ne sont pas triés, on commence par le faire.

Si maintenant D est un objet de $\text{MF}_K(\varphi, N)$, son polygone de Hodge est le polygone associé aux entiers t pour lesquels $\text{Fil}^{t+1} D_K \neq \text{Fil}^t D_K$ avec la convention que l'entier t est répété autant de fois que le quotient $\text{Fil}^t D_K / \text{Fil}^{t+1} D_K$ n'a de dimensions. Le polygone de Newton de D quant à lui est le polygone associé aux pentes de l'action de Frobenius; c'est aussi le polygone de Newton (usuel) du polynôme caractéristique de la matrice de φ dans une base quelconque de D sur K_0 . On montre que si D est faiblement admissible alors le polygone de Hodge est en-dessous du polygone de Newton et que ceux-ci ont même point d'arrivée.

Lien avec les représentations semi-stables Dans [8], Fontaine construit un anneau B_{st} muni de structures supplémentaires (dont nous ne rappelons pas la définition ici, car elle ne nous servira pas). Il montre que si V est une représentation semi-stable de G_K , alors :

$$D_{\text{st}}(V) = (B_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

est un objet de $\text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$. Mieux, le foncteur D_{st} établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des représentations galoisiennes semi-stables et $\text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$. Les polygones de Hodge et de Newton de la représentation galoisienne sont alors définis comme les polygones de Hodge et de Newton de l'objet de $\text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$ correspondant.

Les S_{K_0} -modules filtrés de Breuil

Définitions Soit $f_\pi : W[u] \rightarrow \mathcal{O}_K$ l'application qui envoie u sur π . Notons $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K_0 de sorte que le noyau de f_π soit l'idéal principal engendré par $E(u)$. On note S le complété p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement au noyau de f_π (et compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW[u]$). L'application f_π se prolonge à S . De plus, S est naturellement muni d'une filtration $\text{Fil}^i S$ (la filtration à puissances divisées), d'un Frobenius W -semi-linéaire $\phi : S \rightarrow S$ continu pour la topologie p -adique défini par $\phi(u) = u^p$, et d'un opérateur de monodromie W -linéaire $N : S \rightarrow S$ continu pour la topologie p -adique, vérifiant la condition de Leibniz et défini par $N(X) = 1 + X$. On note $c = \phi(E(u))/p$; c'est une unité de S . Finalement, on désigne par $f_0 : S \rightarrow W$ le morphisme d'anneau (continu pour la topologie p -adique) qui envoie u et toutes ses puissances divisées sur 0.

On pose $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$; les structures supplémentaires que l'on vient de définir s'y prolongent.

Ceci permet de définir la catégorie $\mathcal{MF}(\phi, N)$. Ses objets sont la donnée de :

- un S_{K_0} -module \mathcal{D} libre de rang fini ;
- une filtration $\text{Fil}^t \mathcal{D}$ telle que $\text{Fil}^i \mathcal{D} \subset \text{Fil}^{i+1} \mathcal{D}$ pour tous i et t ;
- un Frobenius S_{K_0} -semi-linéaire $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$;
- un opérateur de monodromie $N : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $N\phi = p\phi N$ et $N(\text{Fil}^t \mathcal{D}) \subset \text{Fil}^{t-1} \mathcal{D}$ pour tout t .

Une équivalence de catégories Si D est un objet de $\text{MF}_K(\varphi, N)$, on peut lui associer un objet de $\mathcal{D} \in \mathcal{MF}(\phi, N)$ de la façon suivante. On pose $\mathcal{D} = D \otimes_{K_0} S_{K_0}$. Il est muni de $\phi = \phi \otimes \varphi$ et de $N = N \otimes 1 + 1 \otimes N$. La filtration, quant à elle, est définie par :

$$\text{Fil}^t \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} / \forall i \geq 0, f_\pi(N^i(x)) \in \text{Fil}^{t-i} D\}.$$

On montre (voir [1], section 6) que cette association définit une équivalence de catégories entre $\text{MF}_K(\varphi, N)$ et $\mathcal{MF}(\phi, N)$. Une quasi-inverse est décrit comme suit. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{MF}(\phi, N)$. On pose $D = \mathcal{D} \otimes_{S_{K_0}} K_0$ (où le morphisme $S_{K_0} \rightarrow K_0$ est f_0). Il est muni des opérateurs ϕ et N qui passent au quotient et définissent respectivement le Frobenius et l'opérateur de monodromie de l'objet de $\text{MF}_K(\varphi, N)$. La filtration est, quant à elle, définie par $\text{Fil}^t D = \text{Fil}^t \mathcal{D} \otimes_{S_{K_0}} K$ (où le morphisme $S_{K_0} \rightarrow K$ est f_π).

Finalement, mentionnons que de la définition de la filtration, on déduit l'égalité suivante, qui nous sera utile pour la suite :

$$\text{Fil}^{t-i} \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} / E(u)^i x \in \text{Fil}^t \mathcal{D}\} \quad (1)$$

valable pour tous entiers t et i .

2.2 Théorie de Hodge p -adique entière et de torsion

À partir de maintenant, on se donne un entier positif $r < p - 1$ et on se restreint aux représentations pour lesquelles $\text{Fil}^0 D_K = D_K$ et $\text{Fil}^{r+1} D_K = 0$ sur le module filtré de Fontaine D associé. L'intérêt d'utiliser la théorie de Breuil est qu'elle permet de décrire les réseaux dans les représentations semi-stables (vérifiant l'hypothèse précédente).

Modules fortement divisibles Soit \mathcal{D} un objet de $\mathcal{MF}(\phi, N)$ associé à un objet $D \in \text{MF}_K(\varphi, N)$ dont la filtration est comprise entre 0 et r . Un *module fortement divisible* (ou *réseau fortement divisible*) dans \mathcal{D} est un sous- S -module $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ vérifiant :

- \mathcal{M} est libre de rang fini sur S ;
- \mathcal{M} est stable par ϕ et N ;
- le morphisme naturel $\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} \rightarrow \mathcal{D}$ est un isomorphisme ;
- $\phi(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset p^r \mathcal{M}$;
- $\frac{\phi}{p^r}(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} sur S .

On montre (voir corollaire 2.1.4 de [3]) que si \mathcal{D} admet un réseau fortement divisible, alors \mathcal{D} correspond à un D faiblement admissible V , et donc à une représentation galoisienne. La réciproque est également vraie : si $er < p - 1$ (cas qui nous intéresse principalement ici), c'est le résultat principal de [3], sinon c'est une conséquence des travaux de Kisin (voir [11]) et de Liu (voir [12]).

D'autre part, on dispose d'un foncteur T_{st} (dont nous renvoyons à [2] pour la définition) qui à \mathcal{M} associe un \mathbb{Z}_p -réseau stable par Galois T à l'intérieur de V . Ce foncteur établit en fait une bijection entre les réseaux fortement divisibles dans \mathcal{D} et les réseaux stables par Galois dans V . (Pour ce dernier résultat, voir [12].)

La catégorie $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ On est maintenant tenté de réduire modulo p les modules fortement divisibles que l'on vient d'introduire pour obtenir une description des représentations de la forme T/pT . On pose pour cela $S_1 = S/pS$. Les structures supplémentaires sur S passent au quotient pour définir des structures analogues sur S_1 . On introduit la catégorie $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ dont les objets sont la donnée de :

- un module \mathcal{M} libre de type fini sur S_1 ;

- un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ contenant $\text{Fil}^r S_1 \mathcal{M}$;
- une application semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dont l'image engendre \mathcal{M} sur S_1 ;
- une application $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant la condition de Leibniz, telle que $u^e N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Si $er < p-1$, la catégorie $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ est étudiée dans [6] : on montre en particulier qu'elle est abélienne et artinienne et on décrit ses objets simples lorsque le corps résiduel k est algébriquement clos. De plus, elle est également équipée d'un foncteur exact T_{st} vers la catégorie des \mathbb{F}_p -représentations de G_K .

Finalement, si \mathcal{M} est un module fortement divisible, le quotient $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est un objet de $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ et si T est le réseau associé à \mathcal{M} par le foncteur T_{st} , on a $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) = T/pT$.

3 Position relative des divers polygones

Nous prouvons à présent les théorèmes 1.1 et 1.2. Nous commençons par quelques rappels sur les bases adaptées qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1.1.

3.1 Notion de bases adaptées

Modules libres sur les anneaux « principaux »

Nous isolons ici un lemme, conséquence facile du théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux. Bien qu'élémentaire, ce lemme peut être vu comme la clé de la démonstration du résultat de comparaison entre polygone de Hodge et de l'inertie modérée.

Lemme 3.1. *Soit A un anneau principal et \mathfrak{p} un élément irréductible de A . On note encore $\mathfrak{p} \subset A$ l'idéal principal maximal engendré par \mathfrak{p} . Soient $r < N$ et d des entiers, et M' un sous- A -module de $M = (A/\mathfrak{p}^N)^d$ tel que $\mathfrak{p}^r A \subset M'$. Alors, il existe (e_1, \dots, e_d) une base de M (sur A/\mathfrak{p}^N) et des entiers $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d \leq r$ tels que M' soit le sous-module engendré par les $\mathfrak{p}^{n_i} e_i$.*

De plus, les n_i sont uniquement déterminés (i.e. ne dépendent pas de la base (e_1, \dots, e_d)) et peuvent s'obtenir de la façon suivante. Soit (x_1, \dots, x_D) une famille génératrice de M' . Soient G la matrice $d \times D$ obtenue en écrivant en colonne les composantes des vecteurs x_i et \hat{G} une matrice à coefficients dans A relevant G . Alors, pour tout $k \leq d$, le nombre $n_1 + \dots + n_k$ est la plus petite valuation \mathfrak{p} -adique d'un mineur $k \times k$ de \hat{G} .

Démonstration. D'après la théorie des diviseurs élémentaires, il existe des matrices inversibles P et Q (à coefficients dans A) telles que :

$$\hat{G} = P \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \dots 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_d & \vdots \\ & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \cdot Q$$

où a_i est le PGCD des mineurs $k \times k$ de \hat{G} . De ceci, il découle toutes les assertions du lemme à part l'unicité des n_i . Pour cette dernière, on remarque que pour tout entier $n \leq r$ la longueur du A -module $\mathfrak{p}^n M / (M' \cap \mathfrak{p}^n M)$ s'égalise avec la somme des $\max(0, n_i - n)$, et que la connaissance de toutes ces sommes permet de retrouver les n_i . \square

Existence de bases adaptées

Le lemme 3.1 donne directement le résultat suivant, déjà bien connu.

Proposition 3.2. Soit \mathcal{M} un module filtré sur $\text{Mod}_{S_{K_0}}^{\phi, N}$ (resp. un objet de $\text{Mod}_{S_1}^{\phi, N}$). Il existe (e_1, \dots, e_d) une base de \mathcal{M} et des entiers n_1, \dots, n_d compris entre 0 et r (resp. entre 0 et er) tels que :

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Fil}^p S_{K_0} \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d E(u)^{n_i} e_i S_{K_0}$$

$$(\text{resp. } \text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Fil}^p S_1 \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d u^{n_i} e_i S_1).$$

De plus les entiers n_i sont uniquement déterminés (à l'ordre près).

Démonstration. On applique le lemme 3.1 respectivement aux quotients $S_{K_0}/\text{Fil}^p S_{K_0} \simeq K_0[u]/E(u)^p$ et $S_1/\text{Fil}^p S_1 \simeq k[u]/u^{ep}$. \square

Une base comme en fournit la proposition est appelé une *base adaptée* pour les entiers n_1, \dots, n_d . On prendra garde au fait qu'il n'est pas vrai que tout module fortement divisible admet une base adaptée. Toutefois, c'est le cas si $r = 1$ (et la démonstration repose encore sur la théorie des diviseurs élémentaires, l'anneau principal qui intervient étant ici $S/\text{Fil}^1 S \simeq \mathcal{O}_K$).

L'égalité (1) conduit directement à la proposition suivante :

Proposition 3.3. Soit V une représentation semi-stable de G_K et \mathcal{D} son S_{K_0} -module filtré associé. Si n_1, \dots, n_d sont les entiers qui apparaissent dans l'écriture d'une base adaptée de \mathcal{D} , alors les poids de Hodge-Tate de V sont les $h_i = r - n_i$.

3.2 Preuve du théorème 1.1

On suppose $er < p - 1$. On fixe V une représentation semi-stable de G_K de dimension d . On note \mathcal{D} son S_{K_0} -module filtré associé. D'après le résultat principal de [3], il existe $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ un réseau fortement divisible. La représentation galoisienne $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un réseau dans V stable par G_K et on a $T/pT = T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$. Le but est de comparer les poids de Hodge-Tate de V , notés $h_1 \leq \dots \leq h_d$, avec les poids de l'inertie modérée de T/pT , notés $i_1 \leq \dots \leq i_d$.

Notons $n_1 \geq \dots \geq n_d$ (resp. $n'_1 \geq \dots \geq n'_d$) les entiers qui interviennent dans l'écriture d'une base adaptée de \mathcal{D} (resp. de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$). Par la proposition 3.3, on a la relation $h_k = r - n_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$. Définissons les poids de Hodge-Tate de T/pT comme les rationnels $h'_k = r - \frac{n'_k}{e}$ et appelons polygone de Hodge de T/pT le polygone associé à ces nombres. La démonstration se découpe alors naturellement en deux étapes : tout d'abord on montre que le polygone de Hodge de T/pT est au-dessus de celui de V (avec même point terminal), puis qu'il est au-dessus du polygone de l'inertie modérée (avec également même point terminal).

Première étape : comparaison entre polygones de Hodge

On conserve les notations précédentes. Montrons tout d'abord que pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a :

$$e(n_d + \dots + n_k) \leq n'_d + \dots + n'_k$$

et que l'égalité a lieu lorsque $k = 1$.

Soit (e_1, \dots, e_d) une base adaptée de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$, donc associée aux entiers n'_1, \dots, n'_d . Notons $\hat{x}_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ un relevé de $u^{n'_i} e_i$ et x_i sa projection dans $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^p S \mathcal{M}$. On vérifie facilement que la famille des x_i engendre $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^p S \mathcal{M}$. Soit G la matrice carrée de taille d obtenue en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs x_i dans une base quelconque (mais fixée) de $\mathcal{M}/\text{Fil}^p S \mathcal{M}$. C'est une matrice à coefficients dans $W[u]/E(u)^p$. Soient \hat{G} une matrice à coefficients dans $W[u]$ relevant G et \bar{G} la réduction de \hat{G} dans l'anneau $k[u]$.

Fixons un entier $k \in \{1, \dots, d\}$. D'après le lemme 3.1, $n = n_d + \dots + n_k$ (resp. $n' = n'_d + \dots + n'_k$) est la plus petite valuation $E(u)$ -adique (resp. u -adique) d'un mineur $(d + 1 - k) \times (d + 1 - k)$ de \hat{G} (resp. de \bar{G}). Ainsi, $E(u)^n$ divise certainement tous les mineurs de taille $d + 1 - k$ de \hat{G} . Par

réduction modulo p , il s'ensuit que u^{en} divise tous les mineurs de taille $d+1-k$ de \bar{G} . Ainsi $en \leq n'$ comme annoncé.

Il reste à montrer que l'égalité a lieu lorsque $k = 1$. Par hypothèse $\text{Fil}^r S\mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On en déduit qu'il existe une matrice \hat{H} à coefficients dans $W[u]$ telle que $\hat{G}\hat{H} \equiv E(u)^r I \pmod{E(u)^p}$ (où I désigne la matrice identité). Comme $p - r \geq 1$, il existe une matrice C à coefficients dans $W[u]$ telle que $\hat{G}\hat{H} = E(u)^r(I - E(u)C)$. En considérant les déterminants, il vient :

$$\det(\hat{G}) \det(\hat{H}) = E(u)^{rd} \Delta$$

où $\Delta \in W[u]$ est congru à 1 modulo $E(u)$. L'anneau $W[u]$ étant factoriel, $\det(\hat{G})$ prend la forme $E(u)^n \delta$ où $n \leq rd$ est un entier et où δ divise Δ . En particulier $E(u)$ ne divise pas δ et la valuation $E(u)$ -adique de $\det(\hat{G})$ est n . Ainsi $n = n_1 + \dots + n_d$. D'autre part, en réduisant modulo p , on obtient $\det(\bar{G}) = u^{en} \bar{\delta}$ où $\bar{\delta}$ divise un élément congru à 1 modulo u^e . En particulier sa valuation u -adique est nulle et donc celle de $\det(\bar{G})$ vaut en . Le résultat annoncé s'ensuit.

Il résulte de ceci le résultat de comparaison, objet de ce paragraphe.

Lemme 3.4. *Avec les notations précédentes, le polygone de Hodge de V est au-dessous du polygone de Hodge de T/pT . De plus, ils ont même point d'arrivée.*

Démonstration. En soustrayant $e(n_1 + \dots + n_d) = n'_1 + \dots + n'_d$ des deux côtés de l'inégalité précédemment prouvée, on obtient $e(n_1 + \dots + n_k) \geq n'_1 + \dots + n'_k$. Le résultat s'obtient alors en divisant par $(-e)$, puis en ajoutant kr à cette dernière inégalité. Bien entendu, le cas d'égalité se traite par la même manipulation algébrique. \square

Deuxième étape : polygone de Hodge modulo p et polygone de l'inertie modérée

Nous prouvons en fait de façon plus générale le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit \mathcal{N} un objet de $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$. Le polygone de Hodge de (la représentation associée à) \mathcal{N} est au-dessous de son polygone de l'inertie modérée. De plus, ils ont même point d'arrivée.*

La catégorie $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ étant abélienne et artinienne, il suffit de prouver d'une part que le résultat est vrai pour les objets simples de cette catégorie et d'autre part qu'il passe aux extensions. Comme les poids de l'inertie modérée ne dépendent que de l'action du groupe d'inertie et que les poids de Hodge-Tate modulo p sont invariants par extension non ramifiée, on peut supposer que le corps résiduel k est algébriquement clos. Dans ce cas, les objets simples sont décrits dans [6] (théorème 4.3.2) et la représentation galoisienne associée à ceux-ci est également calculée dans *loc. cit.* (théorème 5.2.2). On constate alors sans difficulté que les polygones sont bien disposés comme on le souhaite. (En réalité, les polygones sont mêmes confondus, ici.)

Traisons à présent le cas des extensions. Donnons-nous :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'' \rightarrow 0$$

une suite exacte dans $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$. Notons $a'_1 \leq \dots \leq a'_{d'}$ (resp. $b'_1 \leq \dots \leq b'_{d'}$) les poids de Hodge-Tate (resp. de l'inertie modérée) de $T_{\text{st}}(\mathcal{N}')$ et $a''_1 \leq \dots \leq a''_{d''}$ (resp. $b''_1 \leq \dots \leq b''_{d''}$) ceux de $T_{\text{st}}(\mathcal{N}'')$. Étant donné que le foncteur T_{st} est exact et que les poids de l'inertie modérée de $T_{\text{st}}(\mathcal{N})$ ne dépendent que des quotients de Jordan-Hölder de ladite représentation, ils sont exactement les nombres $b'_1, \dots, b'_{d'}, b''_1, \dots, b''_{d''}$.

Évaluons maintenant les poids de Hodge-Tate de \mathcal{N} , que nous notons $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_d$ avec $d = d' + d''$. D'après la preuve du lemme 3.1, pour tout entier $n \leq er$, ils vérifient la relation :

$$\dim_k \frac{u^n \mathcal{N}}{u^n \mathcal{N} \cap \text{Fil}^r \mathcal{N}} = \sum_{i=1}^d \max(0, e(r - a_i) - n)$$

et l'on dispose bien entendu de formules analogues pour \mathcal{N}' et \mathcal{N}'' . Considérons les deux applications :

$$\frac{u^n \mathcal{N}'}{u^n \mathcal{N}' \cap \text{Fil}^r \mathcal{N}'} \rightarrow \frac{u^n \mathcal{N}}{u^n \mathcal{N} \cap \text{Fil}^r \mathcal{N}} \rightarrow \frac{u^n \mathcal{N}''}{u^n \mathcal{N}'' \cap \text{Fil}^r \mathcal{N}''}.$$

La seconde est clairement surjective et la première est injective : en effet, si $x \in u^n \mathcal{N}'$ s'envoie dans $\text{Fil}^r \mathcal{N}$, il est aussi élément de $\text{Fil}^r \mathcal{N}'$ en vertu de la stricte compatibilité à la filtration (voir corollaire 3.5.7 de [6]). Il s'ensuit que la dimension du terme central est supérieure à la somme des dimensions des termes extrémaux. D'où on déduit l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^d \max(0, e(r - a_i) - n) \geq \sum_{i=1}^{d'} \max(0, e(r - a'_i) - n) + \sum_{i=1}^{d''} \max(0, e(r - a''_i) - n). \quad (2)$$

Il en résulte que pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ la somme des k plus petits entiers parmi les a_i est inférieure à la somme des k plus petits éléments parmi $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$.

Par ailleurs, si $n = 0$, la suite :

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{N}'}{\text{Fil}^r \mathcal{N}'} \rightarrow \frac{\mathcal{N}}{\text{Fil}^r \mathcal{N}} \rightarrow \frac{\mathcal{N}''}{\text{Fil}^r \mathcal{N}''} \rightarrow 0$$

est exacte. En effet, il suffit d'après ce qui précède de vérifier l'exactitude au milieu. Pour cela, on considère $x \in \mathcal{N}$ qui s'envoie sur un élément $y \in \text{Fil}^r \mathcal{N}''$ et il s'agit de montrer que x s'écrit comme la somme d'un élément de \mathcal{N}' et d'un élément de $\text{Fil}^r \mathcal{N}$. Par la stricte compatibilité à la filtration, l'application $\text{Fil}^r \mathcal{N} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{N}''$ est surjective, d'où il existe $x' \in \text{Fil}^r \mathcal{N}$ qui s'envoie également sur $y \in \text{Fil}^r \mathcal{N}''$. Mais alors $x - x'$ est nul dans \mathcal{N}'' et donc est élément de \mathcal{N}' . L'exactitude en découle. De celle-ci, on déduit que lorsque $n = 0$, l'inégalité (2) est en fait une égalité, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^d a_i = \sum_{i=1}^{d'} a'_i + \sum_{i=1}^{d''} a''_i.$$

En regroupant tout ce qui précède, on s'aperçoit que l'on vient de prouver que le polygone de Hodge de \mathcal{N} est situé au-dessous du polygone associé aux nombres (retrisés) $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$, et qu'ils ont même point terminaux. Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à prouver le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Supposons que le polygone associé aux nombres $a'_1, \dots, a'_{d'}$ (resp. $a''_1, \dots, a''_{d''}$) soit au-dessous du polygone associé aux nombres $b'_1, \dots, b'_{d'}$ (resp. $b''_1, \dots, b''_{d''}$) et qu'ils aient même points d'arrivée. Alors le polygone associé à $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$ est au-dessous du polygone associé à $b'_1, \dots, b'_{d'}, b''_1, \dots, b''_{d''}$, et ils ont même point d'arrivée.*

Démonstration. L'assertion sur les points d'arrivée est immédiate.

Pour le reste, on peut évidemment supposer que les a'_i , les a''_i , les b'_i et les b''_i sont rangés par ordre croissant. Soit k compris entre 1 et d . La somme des k plus petits nombres parmi $a'_1, \dots, a'_{d'}, a''_1, \dots, a''_{d''}$ est égale à :

$$\min_{1 \leq m \leq k} (a'_1 + \dots + a'_m) + (a''_1 + \dots + a''_{k-m}) \quad (3)$$

et, bien entendu, on dispose d'une formule analogue lorsque la lettre a est remplacée par b . La conclusion s'obtient en remarquant que chacun des termes qui apparaît dans le minimum de (3) est majoré par hypothèse par le terme correspondant où a est remplacé par b , et que cette majoration se transporte directement sur les minimas. \square

Remarques

Le cas $er \geq p - 1$ Comme nous le disions dans l'introduction, le théorème 1.1 peut être mis en défaut si on ôte l'hypothèse $er < p - 1$. Voici un contre-exemple très simple. Considérons $K_0 = \mathbb{Q}_p$ et $K = K_0(\zeta)$ où ζ est une racine $(p - 1)$ -ième de l'unité non triviale. L'extension K/K_0 est totalement ramifiée de degré $e = p - 1$. Le caractère cyclotomique a pour seul poids de Hodge-Tate 1 mais sa réduction modulo p est triviale, de sorte que le poids de l'inertie modérée est 0. On remarque qu'ici on peut choisir $r = 1$, de sorte que le contre-exemple fonctionne dès que $er = p - 1$.

On notera quand même que la première partie de la preuve, celle qui compare les deux polygones de Hodge, est valable sans hypothèse sur er (hormis, bien entendu, $r < p - 1$, qui est l'hypothèse nécessaire à l'utilisation de la théorie de Breuil). En un sens, donc, les poids de Hodge-Tate modulo p semblent constituer un meilleur invariant que les poids de l'inertie modérée. Certains calculs explicites de Savitt ([13]) semblent corroborer cette impression.

Que dire des représentations de Hodge-Tate ? Si V n'est pas semi-stable, mais simplement de Hodge-Tate, l'énoncé du théorème 1.1 a encore un sens, et on peut légitimement se demander s'il est encore vrai dans ce contexte plus général. La réponse est négative et, là encore, les contre-exemples sont aisés à produire. Soit n un diviseur strict de $p - 1$ de sorte qu'il y ait toutes les racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{F}_p . On prend $K = K_0 = \mathbb{Q}_p$, et on fixe $\pi \in \bar{K}$ une racine n -ième de p . L'extension $K(\pi)/K$ est alors galoisienne de groupe de Galois cyclique d'ordre n . Notons σ un générateur et $\xi = \frac{\sigma\pi}{\pi}$: c'est une racine n -ième de l'unité dans \mathbb{Q}_p . On peut alors former le caractère suivant $G_K \rightarrow \text{Gal}(K(\pi)/K) \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$ où le premier morphisme est la projection canonique et le second est celui qui envoie σ sur ξ . Ce caractère correspond à une représentation p -adique de dimension 1 qui est de Hodge-Tate¹ et son seul poids de Hodge-Tate est nul. Toutefois, on vérifie directement que, modulo p , cette représentation est la puissance $(\frac{p-1}{n})$ -ième du caractère fondamental de Serre : son poids de l'inertie modérée est donc $\frac{p-1}{n}$ et le résultat est mis en défaut.

3.3 Preuve du théorème 1.2

On conserve notre entier positif r vérifiant $er < p - 1$. De plus comme les invariants qui interviennent dans l'énoncé du théorème 1.2 ne changent pas après une extension non ramifiée, on peut supposer que le corps résiduel k est algébriquement clos.

Soit V une représentation semi-stable dont on note les poids de Hodge-Tate $h_1 \leq \dots \leq h_d \leq r$ et les pentes de l'action de Frobenius $n_1 \leq \dots \leq n_d$. On suppose que les polygones de Newton et de Hodge commencent par un segment de même pente, c'est-à-dire que $h_1 = n_1 = s$. Notons $d' \geq 1$ le plus grand entier pour lequel $n_{d'} = s$. Étant donné que le polygone de Newton est situé au-dessus du polygone de Hodge, on a $n_k = h_k = s$ pour tout $k \leq d'$.

Soit $D \in \text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$ le (φ, N) -module filtré de Fontaine associé à V . Appelons D_s la partie de pente s de D . D'après la définition de d' , c'est un sous-espace de dimension d' stable par φ . Par ailleurs l'opérateur de monodromie doit envoyer D_s sur D_{s-1} (partie de pente $s - 1$) mais celle-ci est nulle puisque s est la plus petite pente. Ainsi $N = 0$ sur D_s , et D_s est stable par φ et N . Soit $D' \subset D_s$ un sous-espace de dimension n stable par φ et N . Par les conditions de faible admissibilité, on a $t_H(D') \leq t_N(D') = ns$. Par ailleurs, $\text{Fil}^t D_K = D_K$ pour tout $t \leq s$ et donc $\text{Fil}^t D'_K = D'_K$ pour tout $t \leq s$. On en déduit qu'il n'y a pas de saut dans la filtration avant s et donc que $t_H(D') \geq ns$. Finalement $t_H(D') = t_N(D') = ns$, et il s'ensuit que D_s est un sous-objet de D dans la catégorie $\text{MF}_K^{\text{fa}}(\varphi, N)$ auquel il correspond une sous-représentation V_s de V .

Comme on a supposé le corps k algébriquement clos, il existe une base de D_s qui diagonalise l'action du Frobenius avec des valeurs propres toutes égales à p^s (on rappelle que s est entier puisque c'est un poids de Hodge-Tate). Il en résulte que $V_s \simeq \mathbb{Q}_p(s)^{d'}$. Il est alors immédiat de calculer les poids de l'inertie modérée sur V_s : on trouve qu'ils sont égaux à es comme attendu.

Les considérations précédentes démontrent le théorème 1.2 pour la première pente. Pour la suite, on considère le quotient D/D_s auquel on réapplique les arguments précédents. On continue comme cela jusqu'à ce que les polygones se séparent, et cela clôt la preuve du théorème.

Remarques

Le résultat précédent n'est pas réellement satisfaisant. On aimerait par exemple avoir une comparaison entre polygone de l'inertie modérée et polygone de Newton qui ne repose sur aucune hypothèse. Bien entendu, la question la plus simple que l'on puisse poser est la suivante :

Question 3.7. On suppose toujours que les poids de Hodge-Tate sont compris entre 0 et r (avec $er < p - 1$). Est-il vrai que le polygone de l'inertie modérée est situé entre le polygone de Hodge et celui de Newton ?

Lorsque $e = 1$, dans [5], Breuil et Mézard ont classifié complètement les représentations semi-stables de dimension 2 et ont calculé les poids de l'inertie modérée pour chacune d'entre elles. Les résultats de leur calcul sont résumés dans la partie 5 de [4], et montrent que la réponse à la question 3.7 est affirmative dans ce cas. Toutefois, cela ne doit pas être pris comme un indicateur très fort car dans la situation étudiée ici, soit la représentation est cristalline et alors le polygone de l'inertie modérée

¹Elle est même « potentiellement triviale ». En particulier, elle est potentiellement cristalline.

s'identifie avec le polygone de Hodge par les résultats de Fontaine-Laffaille, soit la représentation n'est pas cristalline, et alors le polygone de Newton est « le plus haut possible ».

Sans l'opérateur de monodromie

La constatation initiale est la suivante : les objets polygone de Hodge, polygone de Newton modulo p , polygone de Newton et polygone de l'inertie modérée se calculent directement sur les modules de la théorie de Breuil, indépendamment des représentations. Mieux encore, leur calcul ne fait jamais intervenir l'opérateur de monodromie N . Précisément, on a vu que le polygone de Hodge et le polygone de Hodge modulo p s'obtiennent à partir des entiers qui interviennent dans l'écriture d'une base adaptée des modules correspondants. Le polygone de Newton d'un S_{K_0} -module filtré \mathcal{D} est construit à partir des pentes de l'action du Frobenius sur $\mathcal{D} \otimes_{S_{K_0}} K_0$. Finalement, le polygone de l'inertie modérée de \mathcal{M} peut s'obtenir en recollant les polygones de Hodge modulo p des quotients de Jordan-Hölder² de \mathcal{M} , ce dernier n'était défini que pour $er < p - 1$.

Par ailleurs, on s'aperçoit que dans les énoncés des théorèmes 1.1 et 1.2, il revenait au même de débiter avec un module fortement divisible plutôt qu'une représentation semi-stable. En effet, si l'on part d'une représentation semi-stable, on peut trouver un module fortement divisible dans son S_{K_0} -module filtré associé comme cela a déjà été expliqué. Et réciproquement, si l'on part d'un module fortement divisible, le S_{K_0} -module filtré obtenu en inversant p correspond à un module filtré de Fontaine qui est faiblement admissible (corollaire 2.1.4 de [3]), et donc à une représentation galoisienne semi-stable.

Au vu de ces remarques, il est légitime de se demander si les théorèmes 1.1 et 1.2 s'étendent à une situation plus générale où l'on débiterait avec un pseudo-module fortement divisible (c'est-à-dire un module fortement divisible sans l'opérateur N). Pour le théorème 1.1, la réponse est affirmative et la démonstration est textuellement la même que celle que nous avons déjà donnée puisqu'elle ne fait aucunement intervenir l'opérateur de monodromie. L'auteur, par contre, ne sait pas ce qu'il en est pour le théorème 1.2. Toutefois, il est possible de produire un contre-exemple à la généralisation évidente de la question 3.7 à cette situation.

On suppose que $r = 2n$ est un entier pair, que $e = 1$ et que l'uniformisante choisie est p de sorte que $E(u) = u - p$. Soit le pseudo-module fortement divisible défini par $\mathcal{M} = Se_1 \oplus Se_2$. On le munit de $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ engendré par $(u - p)^n e_1$, $pe_1 + (u - p)^n e_2$ et $\text{Fil}^p S \mathcal{M}$, et du Frobenius ϕ défini par $\phi(e_1) = c^n p^n e_2$ et $\phi(e_2) = c^n p^n e_1 - pe_2$. Les entiers qui apparaissent dans l'écriture d'une base adaptée de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ se calculent directement par le lemme 3.1 et valent n et n . Le polygone de Hodge modulo p a donc pour seule pente n , et comme le polygone de l'inertie modérée doit être situé au-dessus, il a lui aussi pour seule pente n . Cependant, on calcule facilement les pentes du Frobenius sur $\mathcal{M} \otimes_S K_0$: elles valent 1 et $r - 1$. Le polygone de Newton est donc strictement en-dessous celui de l'inertie modérée.

Références

- [1] C. Breuil, *Représentations p -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [2] C. Breuil, *Construction de représentations p -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [3] C. Breuil, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122
- [4] C. Breuil, *Integral p -adic Hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80

²On peut montrer (voir [6]) qu'il existe une sous-catégorie commune à $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ à $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi}$ (même définition que $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ mais sans le N) qui contient tous les objets simples de ces deux catégories. Ainsi, avec la définition que l'on donne, le polygone de l'inertie modérée est le même qu'il soit calculé dans $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ ou $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi}$.

- [5] C. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ en $\ell = p$* , Duke math. J. **115** (2002), 205–310
- [6] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p - 1$* , J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92
- [7] C. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publ. (1962), New York
- [8] J. M. Fontaine, *Le corps des périodes p -adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [9] J. M. Fontaine, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184
- [10] J. M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608
- [11] M. Kisin, *Crystalline representations and F -crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496
- [12] T. Liu, *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, Compos. Math. **144** (2008), 61–88
- [13] D. Savitt, communication personnelle
- [14] J. P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331