



**HAL**  
open science

## Placement de capteurs pour le diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée

Hamid Baïkeche, Benoît Marx, Didier Maquin, José Ragot

► **To cite this version:**

Hamid Baïkeche, Benoît Marx, Didier Maquin, José Ragot. Placement de capteurs pour le diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée. Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques, JDMACS 2005, Sep 2005, Lyon, France. pp.CDROM. hal-00208080

**HAL Id: hal-00208080**

**<https://hal.science/hal-00208080>**

Submitted on 25 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Placement de Capteurs pour le Diagnostic des Systèmes Linéaires en Boucle Fermée

H. Baïkeche, B. Marx, D. Maquin, J. Ragot

Institut National Polytechnique de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039

2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandoeuvre-Les-Nancy, France

{hbaikech,bmarx,dmaquin,jragot}@ensem.inpl-nancy.fr

## RESUME

Cet article présente une méthode de diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée. La méthode est basée sur l'étude de la sensibilité des signaux aux différents points de la boucle par rapport aux défauts capteur et actionneur afin de déterminer l'emplacement optimal de prise de mesure des signaux pour la génération de résidus (méthode à base d'observateurs ou espace de parité). L'influence du gain de la chaîne de retour sur le résidu est aussi traitée, nous montrons en particulier que pour un système du second ordre cette influence est nulle.

**MOTS CLES :** Sensibilité, diagnostic, boucle fermée.

## ABSTRACT

This paper presents a method of diagnosis for linear systems in closed loop. The method is based on the study of the sensitivity at different points of the loop. The aim is to determine the best point to measure a signal in order to perform residual generation with observer-based or parity space methods. The influence of the feedback gain on the residual signal is also treated. In the case of second order systems, it is shown that the feedback gain has no influence on the residual signal.

**KEYWORDS :** Sensitivity, diagnosis, closed-loop.

## INTRODUCTION

Dans le contexte de la surveillance, le rôle des outils de détection et d'isolation de défauts (FDI) des systèmes devient de plus en plus important pour les systèmes complexes. Une attention particulière a été portée au développement de différentes méthodes de synthèse de FDI depuis ces trois dernières décades [1,2,13,14,15]. Cependant, la majeure partie de ces travaux s'intéresse au diagnostic des systèmes en boucle ouverte. En boucle fermée, l'effet du défaut est souvent masqué par l'action du correcteur, ce qui rend difficile la détection des défauts dès leur premier stade de développement. Dans [9] les auteurs ont mis en évidence la différence entre le diagnostic des systèmes en boucle ouverte et en boucle fermée. Cependant, relativement peu de travaux portent sur le choix optimal des signaux pour la génération de résidus [4,5,6,7]. La première étape dans n'importe quel processus de FDI est de générer un signal résidu sensible aux défauts des composants du système et peu sensible aux perturbations agissant sur ce dernier. La première question à laquelle on doit répondre concerne

l'emplacement des capteurs permettant d'obtenir les signaux contenant le plus d'informations sur les défauts qui peuvent intervenir sur le système. On doit également prendre en compte le fait que les signaux de la boucle d'asservissement ne sont pas tous accessibles à la mesure, ceci étant dû aux limitations physiques et à la disponibilité des capteurs. Parmi les endroits accessibles à la mesure, l'emplacement optimal est celui qui permet de prélever un signal offrant une sensibilité maximale par rapport aux variations des composants spécifiques du système.

Dans ce qui suit, le problème du positionnement optimal de capteurs dans les systèmes en boucle fermée est analysé en se basant sur la théorie de la sensibilité des systèmes [8]. L'analyse des fonctions de sensibilité des grandeurs disponibles aux différents endroits, par rapport aux variations des composants du système en boucle fermée, permet d'étudier le positionnement optimal de capteurs. Pour détecter des défauts affectant un composant du système, intuitivement, il est logique d'utiliser le signal après ce composant pour générer le résidu, ceci étant vrai en particulier pour les systèmes en boucle ouverte. Cependant, pour les systèmes en boucle fermée, il s'avère qu'on devrait prendre le signal avant le composant à cause du bouclage [10].

L'article est organisé comme suit. Nous commençons par définir la fonction de sensibilité de Bode en boucle fermée. Les points optimaux pour le placement de capteurs sont alors déterminés en se basant sur le critère de sensibilité maximale. Puis nous abordons la génération de résidus et l'influence du retour de sortie sur l'expression des résidus. Un exemple de simulation et des discussions concluent l'article.

## FONCTION DE SENSIBILITE D'UN SYSTEME EN BOUCLE FERMEE PAR RAPPORT AUX VARIATIONS PARAMETRIQUES

Par souci de simplicité, un système de commande en boucle fermée SISO (comme le montre la fig.1) est utilisé pour l'analyse de la sensibilité sachant que l'analyse proposée s'étend aux systèmes MIMO. Le système est représenté dans le domaine fréquentiel afin de préciser les bandes de fréquences où les défauts sont susceptibles d'être déterminés. Comme illustré à la figure (1), le système se compose d'un contrôleur qui est représenté par la fonction de transfert  $G_c(s)$ , du système

$G_p(s)$ , d'un capteur et d'un actionneur modélisés par des gains purs,  $K_s$  et  $K_a$ , respectivement.

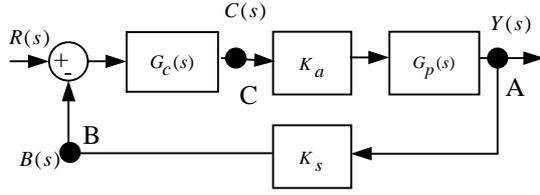


Figure 1 : Système en boucle fermée

### Définition

Soient  $G=G(j\omega, \alpha)$  et  $G_0=G(j\omega, \alpha_0)$  les fonctions de transfert du système en fonctionnement courant et du système en fonctionnement nominal respectivement, et  $\alpha_0$  le vecteur de paramètres nominal. Alors, la dérivée partielle (1) est appelée fonction de sensibilité de Bode [8] :

$$S_{\alpha_j}^G(j\omega) = \frac{\partial \ln G}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} = \frac{\partial G/G}{\partial \alpha_j / \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{j0}}{G_0} \quad (1)$$

Supposons que les signaux aux points A (sortie du système), B (sortie du capteur), et C (sortie du contrôleur) soient accessibles à la mesure pour mettre en oeuvre un système de FDI à base d'observateur qui produit des signaux de résidus. Supposons également que les défauts peuvent survenir au niveau du capteur, de l'actionneur et du système. Évaluons les fonctions de sensibilité de Bode [8,12] à ces trois endroits par rapport aux variations des paramètres du capteur, de l'actionneur et du système. Au total, 9 fonctions de sensibilité peuvent être obtenues. Elles peuvent être regroupées dans la matrice  $S$  dans laquelle chaque colonne correspond à l'emplacement de prise de mesure et chaque ligne est relative au composant du système sujet aux défauts:

$$S(j\omega) = \begin{bmatrix} \left| S_{K_s}^{G_{RY}}(j\omega) \right| & \left| S_{K_s}^{G_{RB}}(j\omega) \right| & \left| S_{K_s}^{G_{RC}}(j\omega) \right| \\ \left| S_{K_a}^{G_{RY}}(j\omega) \right| & \left| S_{K_a}^{G_{RB}}(j\omega) \right| & \left| S_{K_a}^{G_{RC}}(j\omega) \right| \\ \left| S_{G_p}^{G_{RY}}(j\omega) \right| & \left| S_{G_p}^{G_{RB}}(j\omega) \right| & \left| S_{G_p}^{G_{RC}}(j\omega) \right| \end{bmatrix} \quad (2)$$

où  $G_{ij}$  représente la fonction de transfert entre les éléments  $i$  et  $j$ .

Pour le point C, qui est la sortie du contrôleur, les trois fonctions de sensibilité sont:

$$\left| S_{K_s}^{G_{RC}}(j\omega) \right| = \left| S_{K_a}^{G_{RC}}(j\omega) \right| = \left| S_{G_p}^{G_{RC}}(j\omega) \right| = \left| \frac{-G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s}{1+G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s} \right| \quad (3)$$

Définissons le domaine de fréquences  $D$  suivant :

$$D = \left\{ \omega \mid \left| G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s \right| \gg 1 \right\} \quad (4)$$

Dans ce domaine de fréquences, ces fonctions de sensibilité peuvent être approximées par 1. Ceci signifie que la sortie du contrôleur peut être utilisée pour détecter

les défauts de capteur et actionneur ainsi que les défauts système.

Pour le point A, qui est la sortie du système, les trois fonctions de sensibilité sont :

$$\left| S_{K_s}^{G_{RY}}(j\omega) \right| = \left| \frac{-G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s}{1+G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s} \right| \quad (5)$$

qui est identique à celle définie en C, et

$$\left| S_{K_a}^{G_{RY}}(j\omega) \right| = \left| S_{G_p}^{G_{RY}}(j\omega) \right| = \left| \frac{1}{1+G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s} \right| \quad (6)$$

Pour des fréquences appartenant au domaine  $D$  (4), la sensibilité (5) peut être approximée par 1 et les sensibilités (6) par 0. Ceci signifie que la sortie du système ne peut être utilisée que pour générer des résidus pour des défauts de capteur. La sortie du système n'est pas assez sensible aux défauts actionneur et défauts système dans la bande de fréquences considérée (4).

De même, pour le point B, qui est la sortie du capteur, les trois fonctions de sensibilité sont:

$$\left| S_{K_s}^{G_{RB}}(j\omega) \right| = \left| S_{K_a}^{G_{RB}}(j\omega) \right| = \left| S_{G_p}^{G_{RB}}(j\omega) \right| = \left| \frac{1}{1+G_c(j\omega)G_p(j\omega)K_aK_s} \right| \quad (7)$$

Toujours dans le domaine  $D$  (4), les trois fonctions de sensibilité ci-dessus sont pratiquement nulles. Ceci signifie que l'emploi du signal du capteur pour la génération de résidus pour la détection de défauts dans les systèmes bouclés n'est pas judicieux. En d'autres termes, la sortie du système contient peu d'information sur les défauts. Avec les approximations précédentes, on peut définir une matrice de sensibilité approchée :

$$\tilde{S} = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} K_s \\ K_a \\ G_p(j\omega) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

mettant en évidence que la sortie du contrôleur (point C) peut être utilisée pour générer des résidus sensibles à des changements de paramètres ou des défauts de tous les composants du système, tandis que la sortie du capteur (point B) ne permet d'obtenir aucune information sur les défauts. La sortie du système (point A) ne peut être utilisée que pour détecter les défauts capteur.

Il est intéressant de noter qu'en boucle fermée, si l'on veut surveiller les performances ou détecter des défauts de certains composants, on doit effectuer des mesures en amont de ce composant, c'est-à-dire, le point C pour les défauts d'actionneur et de capteur, le point C et le point A pour les défauts capteur. Cette observation est différente de la pratique courante pour la détection de défaut dans les systèmes en boucle ouverte.

La matrice de sensibilité approchée (8) fournit également un indice pour la mise en oeuvre d'une méthode

d'isolation de défaut. Par exemple, si on a des résidus non nuls aux points A et C, le défaut s'est très probablement produit au niveau du capteur. Par contre, si on relève un résidu différent de zéro au point C et un résidu nul au point A, alors le défaut affecte l'actionneur ou le système.

### PLACEMENT OPTIMAL DE CAPTEURS POUR LA DETECTABILITE DE DEFAUTS EN BOUCLE FERMEE

A partir des résultats de l'analyse de sensibilité (8) du système en boucle fermée de la figure 1, l'emplacement optimal pour obtenir des informations pour la détection des différents défauts des composants du système peut être déterminé grâce au critère de sensibilité maximale par rapport aux variations de ce composant. En particulier, on peut voir que pour les défauts capteur, actionneur et système, l'endroit optimal est la sortie du contrôleur. Pour les défauts capteur, la sortie du système peut également être utilisée pour obtenir l'information. Cependant, la sortie du système n'est pas un endroit facilement accessible dans l'implémentation en temps réel du système de FDI puisqu'on n'a accès à la mesure qu'à travers un capteur, en l'occurrence le point B. Alternativement, on peut utiliser la sortie actionneur pour obtenir l'information concernant les défauts capteur et système.

En se basant sur l'analyse de la sensibilité, la détectabilité de défauts dans un système en boucle fermée peut être définie de la façon suivante:

Pour le système en boucle fermée de la figure 1, soit  $n_s$  le nombre de composants de de cette boucle. Supposons qu'il y a  $i$  ( $i=1,2,\dots,n_i$ ) endroits accessibles pour prendre la mesure, et  $j$  ( $j=1,2,\dots,n_j$ ) composants sujets aux variations de paramètres. Calculons la fonction de sensibilité de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée définie entre l'entrée et le signal pris au  $i^{\text{ème}}$  point vis-à-vis du  $j^{\text{ème}}$  paramètre. Une matrice de sensibilité peut être formée comme :

$$S(j\omega) = \left[ S_{C_j}^{L_i}(j\omega) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n_i \\ 1 \leq j \leq n_j}} \quad (9)$$

où  $L_i$  est la fonction de transfert entre l'entrée et le signal pris au  $i^{\text{ème}}$  point ( $i=1,2,\dots,n_i$ ).  $C_j$ , ( $j=1,2,\dots,n_j$ ), désigne le composant sujet à des variations paramétriques.

Pour tout élément  $S_{C_j}^{L_i}(j\omega)$  (9), si la condition  $|S_{C_j}^{L_i}(j\omega)| \approx 1$  est valide à une fréquence  $f < f_s$ , alors le défaut sur le  $j^{\text{ème}}$  composant est détectable au  $i^{\text{ème}}$  point. Ici  $f_s$  est appelée la fréquence de séparation qui doit être choisie telle que la condition d'existence d'un domaine  $D$  dans la gamme des basses fréquences soit remplie puisqu'on s'intéresse seulement à la partie constante (régime permanent) du résidu pour le FDI:

$$D = \left\{ \omega / \left| \prod_{s=1}^{n_s} E_s \right| \gg 1 \right\} \quad (10)$$

$E_s$  désigne les éléments de la boucle impliqués dans le calcul de la fonction de transfert  $L_i$ .

### GENERATION DE RESIDUS

Dans cette section, nous abordons l'influence du retour de sortie sur l'amplitude des résidus. D'une part, le gain de la boucle de rétroaction doit satisfaire aux performances de la commande et de stabilité, d'autre part, il serait souhaitable qu'il maximise la valeur du résidu en vue d'une détection facile des défauts. Le schéma de la boucle de commande (figure 2) représente un système linéaire SISO en boucle fermée soumis aux défauts capteur et actionneur  $f_c(t)$  et  $f_a(t)$  respectivement. Le correcteur proportionnel est de gain  $k_1$  et la chaîne de retour de gain  $k_2$ .

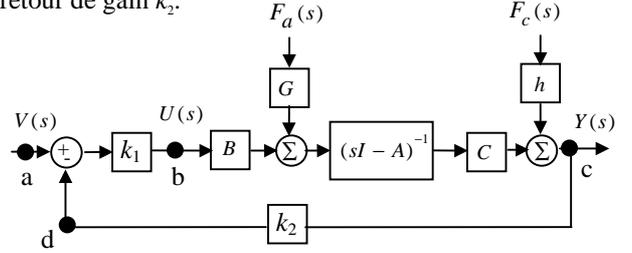


Figure 2 : Boucle de commande.

Le modèle défectueux est décrit par les équations :

$$\Sigma_{BO} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gf_a(t) \\ y(t) = Cx(t) + hf_c(t) \end{cases} \quad (11)$$

où  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  et  $G \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $x(t)$  est l'état du modèle défectueux,  $u(t)$  la commande et  $y(t)$  la sortie.  $f_a(t)$  et  $f_c(t)$  sont respectivement les défauts actionneur et capteur.

L'expression de la commande  $u(t)$  en fonction de la référence  $v(t)$  est :

$$u(t) = k_1 v(t) - k_1 k_2 Cx(t) - k_1 k_2 h f_c(t) \quad (12)$$

En reportant  $u(t)$  dans  $\Sigma_{BO}$ , le système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\Sigma_{BF} : \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - Bk_1k_2C)x(t) + Bk_1v(t) - Bk_1k_2hf_c(t) + Gf_a(t) \\ y(t) = Cx(t) + hf_c(t) \end{cases} \quad (13)$$

Notons :  $\bar{A} = A - Bk_1k_2C$  et  $\bar{B} = k_1B$  (14)

Le système étant linéaire, en appliquant le théorème de superposition pour les différentes entrées, la transformée de Laplace de la sortie est donnée par :

$$Y(s) = H_1(s)V(s) + H_2(s)F_a(s) + H_3(s)F_c(s) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_1(s) &= C(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \\ H_2(s) &= C(sI - \bar{A})^{-1} G \\ H_3(s) &= (-C(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}k_2 + 1)h \end{aligned} \quad (16)$$

En l'absence de défauts, la sortie du système est seulement due à l'entrée de référence  $v(t)$ , soit en transformée de Laplace:

$$Y(s) = H_1(s)V(s) \quad (17)$$

qui est exactement celle du modèle sain  $Y(s) = Y_m(s)$ . (l'indice  $m$  fait référence au modèle sain).

Les résidus aux différents points (b, c et d) sont alors donnés par la différence entre les signaux pris aux points (b, c et d) du système et les signaux correspondants du modèle. Notons que le résidu au point d est proportionnel au résidu calculé au point c :

$$R_d(s) = k_2 R_c(s) \quad (18)$$

Soient  $u_m(t)$  et  $y_m(t)$  respectivement les signaux pris aux points b et c du modèle sain et  $u(t)$  et  $y(t)$  respectivement les signaux aux points b et c du modèle défectueux. On peut alors calculer les deux résidus en b et c :

$$r_b(t) = u(t) - u_m(t) \quad (19)$$

$$r_c(t) = y(t) - y_m(t)$$

L'évolution de la dynamique du modèle en défauts et celle du modèle sain sont données par:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B} \\ \bar{B} \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} -\bar{B}k_2h \\ 0 \end{pmatrix} f_c(t) + \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} f_a(t) \quad (20)$$

où  $x(t)$  et  $x_m(t)$  représentent respectivement l'état du modèle défectueux et celui du modèle sain. Les signaux aux points b et c du système et du modèle sont respectivement:

$$\begin{aligned} u(t) &= -k_1k_2Cx(t) - k_1k_2hf_c(t) + k_1v(t) \\ u_m(t) &= -k_1k_2Cx_m(t) + k_1v(t) \end{aligned} \quad (21)$$

et

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + hf_c(t) \\ y_m(t) &= Cx_m(t) \end{aligned} \quad (22)$$

D'après (19), on obtient l'expression des résidus suivante:

$$\begin{aligned} r_b(t) &= -k_1k_2C(x(t) - x_m(t)) - k_1k_2hf_c(t) \\ r_c(t) &= C(x(t) - x_m(t)) + hf_c(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Les résidus aux points b et c dépendent de l'écart entre d'état du modèle en défaut et celui du modèle sain. Cet écart peut être calculé en résolvant les équations différentielles (13). Si les défauts n'apparaissent qu'à partir de l'instant  $t_0$  alors:

$$x(t) - x_m(t) = \int_{t_0}^t e^{\bar{A}(t-\tau)} (Gf_a(\tau) - \bar{B}k_2hf_c(\tau)) d\tau$$

## INFLUENCE DU RETOUR DE SORTIE SUR LE RESIDU

Cette section est indépendante des sections précédentes. Elle a pour but l'étude du découplage entre l'objectif de la commande et celui de la génération de résidus.

Le gain  $k_2$  du système représenté sur la figure 2 peut avoir comme rôle le placement de pôles du système en boucle fermée en vue de satisfaire les exigences de commande et de stabilité définies dans le cahier des charges. Dans la plage des gains admissibles remplissant ces contraintes, on choisit le gain qui optimise la valeur

du résidu. Dans la suite,  $k_2$  sera remplacé par  $k$ . Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BkC)x(t) + Bv(t) + Gf(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (24)$$

où  $v(t)$  est la référence et  $k$  représente maintenant le gain de la chaîne de retour devant satisfaire la condition de stabilité du système :

$$(A - BkC) \text{ stable} \quad (25)$$

Pour appliquer la méthode de l'espace de parité [15] en vue de la génération de résidus, on dérive la sortie jusqu'à l'ordre du système [11]. Considérons ici le cas d'un système du second ordre, on a :

$$\bar{y}(t) = O(k)x(t) + H(k)\bar{v}(t) + F(k)\bar{f}(t) \quad (26)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \ddot{y}(t)]^T, \bar{v}(t) = [v(t) \quad \dot{v}(t)]^T \\ O(k) &= \begin{bmatrix} C \\ C(A - BkC) \\ C(A - BkC)^2 \end{bmatrix}, \bar{f}(t) = [f(t) \quad \dot{f}(t)]^T \\ H(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CB & 0 \\ C(A - BkC)B & CB \end{bmatrix} \\ F(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CG & 0 \\ C(A - BkC)G & CG \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Pour obtenir une relation liant uniquement les grandeurs connues (la référence, la sortie et leurs dérivées) on élimine l'état  $x(t)$  en prémultipliant à gauche l'équation (26) par une matrice  $\omega(k)$  orthogonale à la matrice d'observabilité  $O(k)$ . La matrice  $\omega(k)$  ne doit pas appartenir à l'espace orthogonal de la matrice des défauts  $F(k)$ , sinon on risque de ne pas détecter certains défauts. Autrement dit,  $\omega(k)$  doit vérifier:

$$\begin{cases} \omega(k)O(k) = 0 \\ \omega(k)F(k) \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

L'équation (26) permet de définir le résidu:

$$r(t) = \omega(k)\bar{y}(t) - \omega(k)H(k)\bar{v}(t) = \omega(k)F(k)\bar{f}(t) \quad (29)$$

Parmi les valeurs de  $k$  qui satisfont (28), on choisit celle,  $k^*$ , qui maximise l'influence du défaut sur le résidu. Le gain  $k^*$  vérifie donc :

$$\begin{cases} \omega(k^*)F(k^*) \geq \omega(k)F(k), \quad \forall k \\ (A - Bk^*C) \text{ stable} \end{cases} \quad (30)$$

Si  $k^*$  existe, alors il réalisera un double objectif: assurer la stabilité du système et une meilleure détectabilité des défauts. Les éléments du vecteur  $\omega(k)$  peuvent être calculés en fonction des éléments des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$ . Pour illustrer ce calcul, considérons un système du

second ordre écrit sous sa forme compagne observable soumis à un défaut actionneur comme dans (24). Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sont alors données par:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Les matrices  $O(k)$  et  $F(k)$  sont données en (27). Les éléments du vecteur  $\omega(k)$  sont choisis sous forme de polynômes de degré 1 en  $k$ :

$$\omega(k) = [W_{10} + W_{11}k \quad W_{20} + W_{21}k \quad W_{30} + W_{31}k] \quad (32)$$

Posons :  $W = [W_{10} \quad W_{11} \quad W_{20} \quad W_{21} \quad W_{30} \quad W_{31}]$

Le produit  $\omega(k)O(k)$  s'écrira alors :

$$\omega(k)O(k) = W\theta_0 + W\theta_1k + W\theta_2k^2 + W\theta_3k^3 \quad (33)$$

$$\text{où: } \theta_0 = \begin{pmatrix} C \\ 0_{1 \times 2} \\ CA \\ 0_{1 \times 2} \\ CA^2 \\ 0_{1 \times 2} \end{pmatrix}, \theta_1 = \begin{pmatrix} 0_{1 \times 2} \\ C \\ -CBC \\ CA \\ -C(ABC + BCA) \\ CA^2 \end{pmatrix}, \theta_2 = \begin{pmatrix} 0_{1 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} \\ -CBC \\ C(BC)^2 \\ -C(ABC + BCA) \end{pmatrix}, \theta_3 = \begin{pmatrix} 0_{1 \times 2} \\ C(BC)^2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Pour que  $\omega(k)O(k)$  soit indépendant du gain  $k$ , il faut s'assurer que  $W\theta_i = 0$  avec  $i = 0, 1, 2, 3$ . La résolution de ce système d'équations donne :

$$\omega(k) = (-a_1 + b_1k \quad -a_2 + b_2k \quad 1)$$

On peut alors calculer le produit  $\omega(k)F(k)$  qui vaut :

$$\omega(k)F(k) = (g_1 \quad g_2)$$

Ce calcul montre que le résidu (29) pour l'exemple considéré est indépendant du gain  $k$ .

### SIMULATION

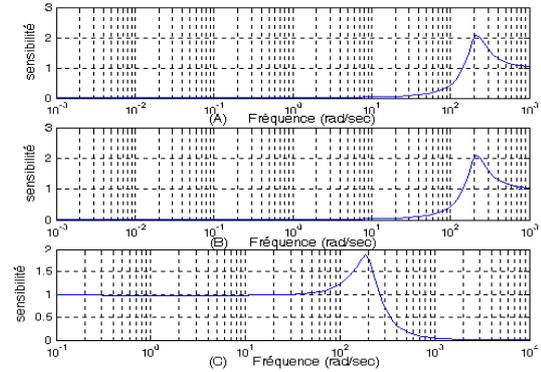
Un exemple de simulation illustre le diagnostic d'un système en boucle fermée selon la structure de la figure 1. On teste la sensibilité des différents points de la boucle puis on génère les résidus correspondants. Les fonctions de transfert du système, du contrôleur et les gains du capteur et de l'actionneur  $K_s$  et  $K_a$  sont donnés comme suit:

$$G_c(j\omega) = \frac{20j\omega + 2.5}{j\omega}$$

$$G_p(j\omega) = \frac{2000}{(j\omega)^2 + 110j\omega + 1000}$$

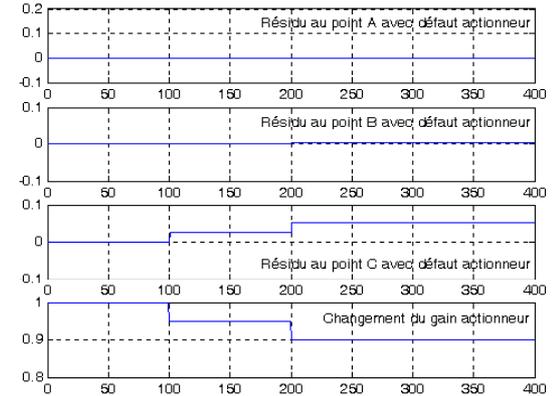
$K_a = K_s = 1$ , (valeurs nominales).

La figure 3 présente les modules des fonctions de sensibilité aux différents points, respectivement A, B et C pour changement de gain de l'actionneur  $K_a$ .

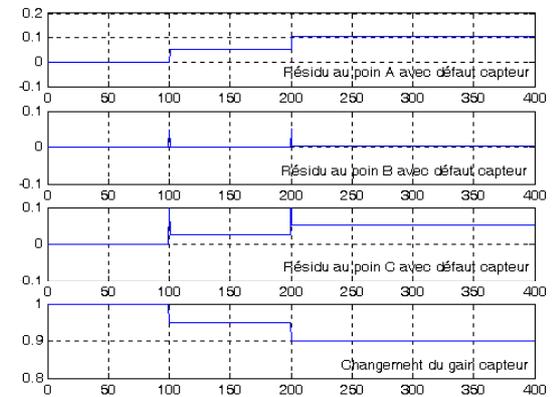


**Figure 3 :** Modules des fonctions de sensibilité aux points A, B et C pour un changement de  $K_a$

Les figures 4 et 5 montrent l'évolution temporelle des résidus calculés respectivement aux points A, B et C ainsi que celle du défaut considéré (défaut de gain actionneur et défaut de gain capteur).



**Figure 4 :** Résidus aux points A, B et C pour un changement du gain de l'actionneur  $K_a$ .



**Figure 5 :** Résidus aux points A, B et C pour un changement du gain du capteur  $K_s$ .

Pour cet exemple, on constate que pour les fréquences inférieures à 10 rad/sec, les deux premières fonctions de sensibilité sont proche de zéro, alors que la troisième a une valeur très proches de l'unité ce qui signifie que la sortie du contrôleur est sensible au défaut de l'actionneur. Pour des fréquences supérieures à 150 rad/sec, comme les deux premières fonctions de sensibilité sont de type passe-haut, le défaut capteur qui est un signal de basses fréquences induit un résidu de faible amplitude.

A partir de ces résultats, on peut conclure que des changements de faible amplitude du gain de l'actionneur ne peuvent être détectés qu'à la sortie du contrôleur les sauts des signaux de résidus pris aux points A et B étant trop faibles pour être détectés.

Il en est de même, pour de petits changements du gain du capteur, au point B ; un transitoire de faible amplitude apparaît dans le signal résidu, le régime permanent du résidu est nul alors que les résidus générés à partir des signaux pris aux points A et C ont une valeur en régime permanent différente de zéro.

## CONCLUSION

Dans ce travail, le problème de placement optimal de capteurs pour le diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée est abordé. Une étude systématique basée sur l'analyse de la sensibilité des différents points de la boucle par rapport aux composants (actionneur, système et capteur) permet de mieux mettre en évidence les points optimaux pour le diagnostic. Il est montré que la sortie du contrôleur est le signal qui contient le plus d'informations sur les défauts capteur et actionneur. En utilisant la méthode de l'espace de parité pour la génération de résidus (pour un système du second ordre en boucle fermée), le résidu ne dépend pas du gain de la chaîne de retour ce qui veut dire qu'on peut séparer le problème de commande de celui du diagnostic.

## REFERENCES

1. Frank, P. M., *Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge-based Redundancy - A Survey and Some New Results*, Automatica, Vol. 26, N° 3, pp. 459-474, 1990.
2. Gertler, J. J., *Survey of Model-Based Failure Detection and Isolation in Complex Plants*, IEEE Control System Magazine, Vol. 8, N° 6, pp. 3-11, December 1988.
3. Jiang, J. and Doraiswami, R., *Selection of Optimal Monitoring Locations In Real-Time Intelligent Reconfigurable Control Systems*,. 5th IEEE Int. Symp. on Intelligent Control, Vol. 2, Philadelphia, pp. 766-770, 1990.
4. Basseville, M., Benveniste, A., Moustakides, G.V. and Rougee, A. *Optimal Sensor Location for Detecting Changes in Dynamical Behavior*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, N° 12, pp. 1067-1075, December 1987.
5. Khan, A., Ceglarek, D. and Ni, J., *Sensor Location Optimization for Fault Diagnosis in Multi-Mixture Assembly Systems*, Trans. of the ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 120, pp. 781-792, November 1998 .
6. Raghuraj, R., Bhushan, M., and Rengaswamy, R., *Locating Sensors in Complex Chemical Plants Based on Fault Diagnostic Observability Criteria*, AIChE Journal, Vol. 45, N° 2, pp. 310-322, 1999.
7. Cobb, R. and Liebst, B.S., *Sensor Placement and Structural Damage Identification from Minimal Sensor Information*, AIAA Journal, Vol. 35, N° 2, pp. 369-374, February 1997 .
8. Frank, P. M., *Introduction to System Sensitivity Theory*, Academic Press, New York, 1978 .
9. Zhou, D.H., Frank, P. M., *Sensor fault tolerant control of non linear systems: unified approach*, TEMPUS Workshop on Advanced Control Systems, Vienna, Austria, 1996 .
10. Xu, Y., Jiang J., *Optimal Sensor Location in Closed-Loop Control Systems for Fault detection and Isolation*, American Control Conference, Chicago, Illinois, June 2000.
11. Maquin, D., Ragot, J., *Diagnostic des Systèmes Linéaires*, Hermès Science Publications, Paris, 2000.
12. Murray-Smith, D. J., *Investigation of Methods the Direct Assessment of Parameter Sensitivity in Linear Closed-Loop Control Systems*, in S.G Tzafesta and P. Borne, editors, *Complex and Distributed Systems : Analysis, Simulation and Control* IMACS Transactions of Scientific Computation, Vol. 4, pp. 323-328, North-Holland, Amsterdam, 1986.
13. Frank, P. M., Ding, X., *Survey of Robust Residual Generation and Evaluation Method in Observer-Based Fault detection Systems*, Journal. Proc. Cont. Vol. 7, N° 6, pp. 403-424, 1997.
14. Patton, R.J., Frank, P.M., Clark, R.N., *Issues of ault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag, London, 2000.
15. Chow, E.Y., Willsky, A. *Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-29, N° 7, pp. 603-614, July 1984.