



HAL
open science

Étude de la stabilité d'un vortex en fluide faiblement stratifié

Benjamin Cariteau, Jan-Bert Flór

► **To cite this version:**

Benjamin Cariteau, Jan-Bert Flór. Étude de la stabilité d'un vortex en fluide faiblement stratifié. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-00207163

HAL Id: hal-00207163

<https://hal.science/hal-00207163>

Submitted on 27 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude de la stabilité d'un vortex en fluide faiblement stratifié

B. Cariteau & J.-B. Flór

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, BP 53 38041 Grenoble Cedex 9
flor@hmg.inpg.fr

Résumé :

L'étude expérimentale de la stabilité d'un vortex en colonne verticale dans un fluide faiblement stratifié en densité a permis de mettre en évidence une instabilité tri-dimensionnelle de courte longueur d'onde. Le vortex de rayon R et de vitesse maximum U est instable pour des nombres de Froude compris entre 0.7 et 2 ($Fr = U/(NR)$, avec N la fréquence de stratification). L'étude détaillée de la structure de l'écoulement nous permet de proposer un mécanisme simple faisant intervenir un phénomène de résonance lié à la déformation du champ de densité qui force des oscillations verticales. L'instabilité se développe là où la fréquence intrinsèque des ondes est égale à la fréquence naturelle des oscillations verticales dans un fluide stratifié, N .

Abstract :

We present experimental evidence of a new instability of a vertical columnar vortex. This instability arises for a Froude number, based on the radius and the maximum velocity, ranging from 0.7 to 2, e.i. for weak stratification. Detailed measurements of the flow reveal that this instability is due to a resonance between buoyancy oscillations and the rotationnal motion in the vortex. This instability develops at a position where the Doppler-shifted frequency of the waves matches the natural buoyancy frequency, N .

Mots-clefs :

Vortex colonne, fluide stratifié, résonance, résonance

1 Introduction

Les structures tourbillonnaires cohérentes jouent un rôle prédominant dans les écoulements géophysiques. Leur formation est favorisée par les effets de la rotation de la terre et de la stratification en densité. D'une échelle allant de quelques kilomètres à un millier de kilomètres, leur impact dépend surtout de la vitesse maximum caractéristique qui peut varier dans l'atmosphère de 50km/h (anti-cyclone) à près de 500km/h (tornades). Des cyclones intenses ont été observés dans les occlusions des fronts (1) avec une taille de 10km et un taux de croissance explosif. Récemment, des études numériques ont suggéré que la force dévastatrice des tempêtes est due à ces tourbillons intenses. Pour de telles structures, la rotation de la terre est négligeable et l'influence de la stratification est faible. C'est dans ce cadre que s'inscrit la présente étude expérimentale sur la stabilité d'un vortex en fluide faiblement stratifié. Dans de telles conditions, l'approximation quasi-géostrophique classiquement utilisée pour modéliser les plus grandes échelles des écoulements géophysiques, ne s'applique pas. L'abandon de cette approximation fait souvent ressortir des phénomènes de résonances qui peuvent, selon le cas, rendre les écoulements instables (2; 3).

Un vortex colonne peut être sujet à plusieurs instabilités dont les plus courantes sont l'instabilité centrifuge et l'instabilité elliptique. La première peut se développer si le moment angulaire décroît vers l'extérieur du vortex. C'est le cas des vortex isolés qui possèdent un anneau de vorticité négative autour du coeur positif. Ce critère est toujours valable en présence d'une

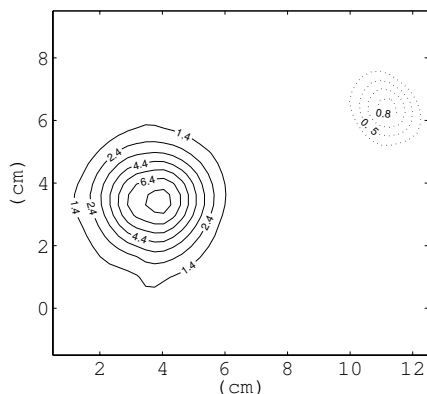


FIG. 1 – Champ de vorticité verticale dans un plan horizontal. Les contours continus correspondent à la vorticité positive, les courbes pointillés correspondent à la vorticité négative.

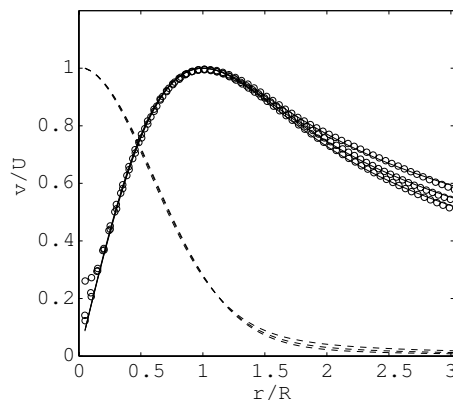


FIG. 2 – Profils de vitesse azimutale mesurée pour 3 différentes expériences (symboles). Les courbes en trait continu sont les profils théoriques basés sur la fonction de Whittaker et celles en trait discontinu correspondent aux profils de vorticité correspondant.

stratification (4) mais elle modifie la structure du mode le plus instable en stabilisant le mode axisymétrique (mode 0) en faveur du mode hélicoïdale (mode 1) (5). L'instabilité elliptique est due à une résonance entre les ondes inertielles qui peuvent se propager sur le vortex et le mode elliptique forcé par un cisaillement extérieur (6). La présence d'une stratification diminue le taux de croissance de cette instabilité jusqu'à stabiliser le vortex elliptique lorsque la stratification est prédominante. Enfin, s'ils présentent un fort gradient de vorticité, la présence de la stratification peut rendre les vortex instables (7).

2 Dispositif expérimental et écoulement de base

Les expériences ont été réalisées dans une cuve de $80 \times 80 \times 40 \text{ cm}^3$ équipée d'un volet tournant qui permet de générer un vortex vertical sur toute la hauteur de fluide. Le volet de $15.5 \times 35 \text{ cm}^2$ est contrôlé par un P.C. qui commande un moteur électrique fixé à son axe. Ainsi, la vitesse angulaire peut être modifiée au cours du temps de façon reproductible. Les variations imposées pour ces expériences sont, une accélération constante, suivie d'une décroissance lente de la vitesse angulaire jusqu'à une vitesse constante faible. De cette façon, le volet s'arrête le plus loin possible du vortex de démarrage après une durée allant de 50 à 60 s et la faible décroissance de vitesse angulaire limite au maximum l'intensité du vortex d'arrêt.

L'écoulement est généré dans un fluide linéairement stratifié en densité. La stratification stable est obtenue en faisant varier la concentration en sel. Afin d'inhiber l'écoulement axial qui se produit au coeur du vortex à cause du frottement au fond de la cuve, une couche d'eau très dense est ajoutée. La stratification est caractérisée par la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2 = -(g/\rho)d\rho/dz$. Le contrôle du gradient de densité a été réalisé par prélèvement sur toute la hauteur d'eau. La hauteur totale est de 30 cm et la hauteur de stratification effectivement linéaire est d'environ 25 cm.

L'écoulement généré par le volet a été caractérisé à l'aide de mesures du champ de vitesse par imagerie de particules (P.I.V.). La figure 1 montre le champ de vorticité verticale mesuré dans un plan horizontal à mi-hauteur, 12 s après le début du mouvement du volet. Le vortex de démarrage apparaît clairement avec une vorticité maximum de 7.5 rad/s . Ces mesures montrent

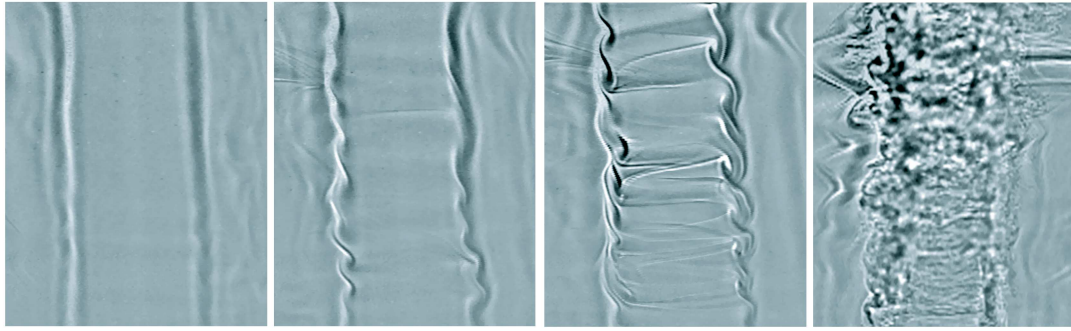


FIG. 3 – Visualisation de côté de l’écoulement par ombroscopie. La surface libre se trouve en haut et le volet à droite. Le centre du vortex se trouve approximativement au milieu des bandes verticales visibles dès la première image. Les instants correspondant sont 27, 29, 30 et 44s. Le nombre de Froude est de 2 et la longueur d’onde est de 2cm soit R .

aussi l’existence d’un vortex négatif (en pointillés sur la figure) dont la vorticité maximum ne dépasse pas 1rad/s . La présence de ce vortex peut déclencher une instabilité elliptique du vortex de démarrage en induisant un cisaillement sur ce dernier. A partir des paramètres d’un dipôle typique (taille et intensité des vortex et distance de séparation), et en utilisant les théories sur l’instabilité elliptique (8), l’estimation du taux de croissance maximum donne 0.015s^{-1} pour une longueur d’onde de 9cm . Cette estimation vaut pour un fluide homogène. La stratification n’est *a priori* pas assez forte pour inhiber cette instabilité mais le taux de croissance effectif doit être inférieur à la valeur obtenue théoriquement (9).

La caractérisation complète du vortex de démarrage est faite à partir du profil de vitesse azimutale. Plusieurs mesures sont présentées sur le graphe de la figure 2. Elles sont normalisées par le rayon du vortex R et le maximum de vitesse U . La courbe continue en trait épais correspond au profil de vitesse du vortex gaussien. Les courbes en trait fin correspondent à un autre modèle de vortex qui présente l’avantage d’être proche du vortex gaussien au coeur mais dont la décroissance de vitesse à l’extérieur est contrôlée par un paramètre supplémentaire. Sous forme adimensionnelle, la vitesse azimutale pour ce modèle s’exprime par :

$$u(r) = Wi_{m,n}(r^2/2)e^{-r^2/4}, \quad (1)$$

où $Wi_{m,n}$ est la fonction de Whittaker avec $n = 0.5$ et $m = (\alpha - 1)/2$ (10) (11). α est le coefficient dont dépend la décroissance de vitesse à l’extérieur. Le vortex est isolé si $\alpha > 1$. On note alors le bon accord entre le modèle et les mesures et, dans tout les cas, le coefficient α est strictement inférieur à 1 compte tenu de l’incertitude. Ceci implique que la distribution de vorticité au sein du vortex (jusqu’à $3R$ au moins) est toujours positive. Ainsi, le vortex de démarrage est stable du point de vue centrifuge puisque le critère de Rayleigh pour cette instabilité reste valable en fluide stratifié.

Ces mesures donnent une vitesse maximum d’environ 5cm/s et un rayon initial d’environ 2cm . Par diffusion, le rayon augmente et la vitesse diminue avec le temps en suivant le comportement d’un vortex gaussien bidimensionnel. Ceci permet de déterminer un nombre de Reynolds caractéristique défini par $Re = UR/\nu$ proche de 1000. Le nombre de Froude de l’écoulement $Fr = U/(NR)$ détermine l’importance des effets de la stratification devant ceux de l’advection. Des expériences ont été réalisées pour Fr allant de 0.5 à 7.

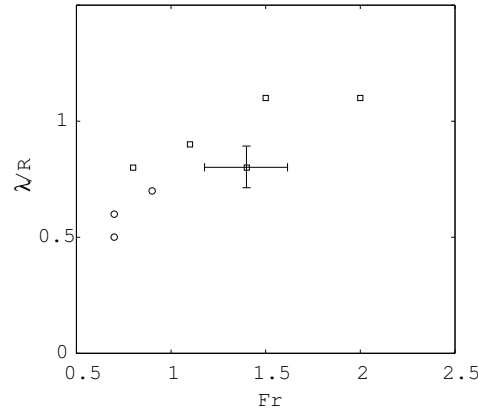


FIG. 4 – Longueur d’onde normalisée par le rayon du vortex en fonction du nombre de Froude.

3 L’instabilité du vortex

L’évolution du vortex a été observée de côté par la méthode d’ombroscopie. Elle utilise les variations d’indice de réfraction dans le fluide. Lorsque les iso-densités présentent des zones de courbure les rayons lumineux qui traversent le volume fluide, projettent sur un écran une image. La figure 3 présente une séquence d’images obtenues pour une expérience typique. Chaque image est centrée sur le cœur du vortex. Cette séquence montre le développement d’une instabilité qui se manifeste tout d’abord par la formation de bandes verticales. Ceci implique qu’il y a une perturbation importante du champ de densité de l’état de base qui devrait être barotrope et donc ne projeter aucune image. Le contraste de ces bandes s’intensifie en conséquence d’une augmentation du gradient de densité jusqu’à l’apparition d’une instabilité tri-dimensionnelle de courte longueur d’onde verticale. Cette instabilité s’amplifie et conduit à la formation de petits vortex co-rotatifs puis à une zone de mélange annulaire autour du vortex. La structure observée ici en projection montre que cette instabilité est hélicoïdale et résulte donc de l’amplification d’une perturbation de mode azimutal 1. Il ne peut s’agir d’une instabilité elliptique étant donné que le temps caractéristique nécessaire au développement de la présente instabilité ($\approx 10s$) et la longueur d’onde ($< R$) sont bien plus courts. Cela ne peut pas être non plus une instabilité centrifuge car elle se développe dans une zone entre R et $1.5R$ dans laquelle la vorticité reste monotone et positive (voir figure 2). Il y a donc bien une différence fondamentale entre le mécanisme de cette instabilité et les mécanismes connus mentionnés ci-dessus.

La longueur d’onde de l’instabilité a été mesurée en fonction du nombre de Froude (figure 4). Elle augmente légèrement de $0.5R$ à R pour Fr allant de 0.7 à 2. Ni les bandes verticales, ni l’instabilité ne se développent au-delà $Fr = 2$. Et pour $Fr < 0.7$ seules les bandes verticales se forment.

Des résultats expérimentaux complémentaires nous permettent de proposer un mécanisme simple pour cette instabilité. La figure 5 montre une image du champ de particules utilisées pour les mesures de P.I.V. sur laquelle apparaît clairement la perturbation de densité qui est à l’origine des bandes verticales observées par ombroscopie. Ceci est possible grâce à la faible dispersion en densité des particules. Dans le fluide stratifié, elles se répartissent dans une couche de faible épaisseur et sont illuminées par un plan laser encore plus fin. Ainsi, les mouvements verticaux sont rendus visibles de dessus par des zones en déficit ou en excès de particules. L’image résulte d’une moyenne sur 9s durant lesquelles la structure ainsi mise en évidence reste

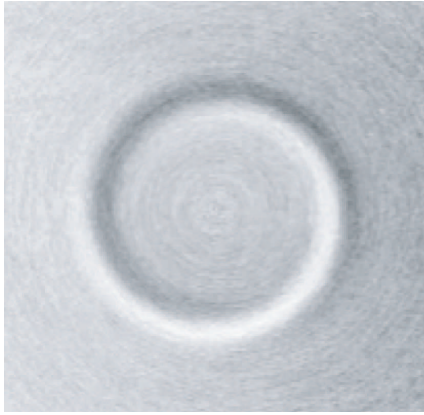


FIG. 5 – Champ de particules en coupe horizontale dans des conditions pour lesquelles elles se trouvent concentrées dans une tranche fine. Il s'agit là d'une image moyenne sur environ 9s durant les premiers instants qui suivent la formation du vortex et avant le développement de l'instabilité. L'image fait $10 \times 10 \text{ cm}^2$.

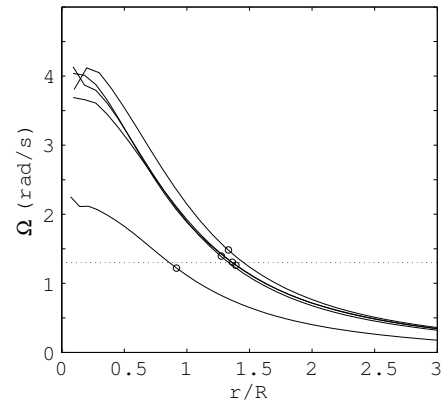


FIG. 6 – Profils de vitesse angulaire et position de la perturbation. La ligne pointillée horizontale indique la fréquence de la stratification

stationnaire. Alors, les particules fluide dans la perturbation de densité exécutent une période d'oscillation verticale à chaque tour. Or, comme le montre la figure 6 la perturbation se trouve localisée autour de la ligne de courant sur laquelle la vitesse angulaire $\Omega = v/r$ est égale à la fréquence de la stratification. Cette dernière est la fréquence naturelle des oscillations verticales des particules de fluide en milieu linéairement stratifié. Ceci montre que cette instabilité est liée à un phénomène de résonance. L'image de la figure 5 résulte d'une moyenne sur 9s durant lesquelles la structure reste stationnaire dans le repère du laboratoire. La pulsation du mode propre correspondant est donc nulle et la condition de résonance peut s'exprimer plus généralement par $\sigma = N$, où $\sigma \equiv \omega - l\Omega$ est la pulsation intrinsèque des ondes qui peuvent perturber le vortex, avec ω la pulsation dans le repère du laboratoire et l le mode azimutal. La condition $\sigma = N$ est une singularité dans les équations issues de l'analyse en mode normal de stabilité des écoulements axisymétriques en fluide stratifié non-visqueux.

Cette résonance se manifeste par la croissance d'un gradient horizontal de la vitesse verticale. Le couple barocline qui s'oppose à cette composante axiale est suffisant pour stabiliser la perturbation de densité pour un nombre de Froude inférieur à 0.7 mais au-delà, l'amplitude croît jusqu'au retournement. Pour un nombre de Froude supérieur à 2, la condition de résonance est satisfaite trop loin du vortex pour qu'il y ait amplification.

4 Conclusion

Les observations qualitatives et quantitatives obtenues dans l'étude expérimentale de la stabilité d'un vortex en fluide stratifié généré par le mouvement du volet, mettent en évidence une instabilité de résonance. Les mesures effectuées sur l'écoulement montrent qu'il ne peut s'agir ni d'une instabilité centrifuge ni d'une instabilité elliptique. Les perturbations du vortex par rapport à un état barotrope sont à l'origine de déformations du champ de densité. Ces dernières imposent des fluctuations verticales de vitesse. Les oscillations verticales sont amplifiées là où leur fréquence est égale à celle de la stratification. Ici, le mode observé est le plus bas possible et

résulte d'un déplacement des sections droites du vortex qui restent axisymétriques. Des modes azimutaux plus élevés peuvent probablement s'amplifier si le vortex n'est plus axisymétrique pourvu que la condition de résonance $\omega - l\Omega = N$ soit satisfaite, mais ceux-ci n'ont pas été observés.

Cette instabilité conduit à une zone de mélange qui augmente de façon significative la dissipation du vortex et provoque un rayonnement d'onde vers l'extérieur observé aussi bien sur les visualisations par ombroscopie que sur les mesures de P.I.V.

Références

- [1] P. J. Neiman, M.A. Shapiro, and L.S. Fedor. The life cycle of an extratropical marine cyclone. part ii : mesoscale structure and diagnostics. *Mon. Wea. Rev.*, 121 :2177–2199, 1993.
- [2] S. Sakai. Rossby-kelvin instability : a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 202 :149–176, 1989.
- [3] Y.-Y. Hayashi and W. R. Young. Stable and unstable shear modes of rotating parallel flows in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 184 :477–504, 1987.
- [4] I. Yavneh, J. C. McWilliams, and M. J. Molemaker. Non-axisymmetric instability of centrifugally stable stratified taylor-couette. *J. Fluid Mech.*, 448 :1–21, 2001.
- [5] W. D. Smyth and J. C. McWilliams. Instability of an axisymmetric vortex in a stably stratified, rotating environment. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 11 :305–322, 1998.
- [6] R. R. Kerswell. Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34 :83–113, 2002.
- [7] M. T. Schecter and M. T. Montgomery. Damping and pumping of a vortex rossby wave in a monotonic cyclone : critical layer stirring versus inertia-buoyancy wave emission. *Phys. Fluids*, Vol. 16, No 5 :1334–1348, 2004.
- [8] S. Le Dizès and F. Laporte. Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 471 :169–201, 2002.
- [9] T. Miyazaki and Y. Fukumoto. Three-dimensional instability of strained vortices in a stably stratified fluid. *Phys. Fluids*, A 4(11) :2515–2522, 1992.
- [10] R. C. Kloosterzie. *The vortices of two-dimensional turbulence*. PhD thesis, University of Utrecht, 1990.
- [11] J.-B. Floř and I. E. Eames. The dynamics of monopolar vortices on the β -plane. *J. Fluid Mech.*, 456 :353–376, 2002.