



HAL
open science

Compactification des variétés de Deligne-Lusztig

Cédric Bonnafé, Raphaël Rouquier

► **To cite this version:**

Cédric Bonnafé, Raphaël Rouquier. Compactification des variétés de Deligne-Lusztig. 2008. hal-00203392v2

HAL Id: hal-00203392

<https://hal.science/hal-00203392v2>

Preprint submitted on 10 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COMPACTIFICATION DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG

CÉDRIC BONNAFÉ & RAPHAËL ROUQUIER

RÉSUMÉ. Nous construisons explicitement la normalisation de la compactification de Bott-Samelson-Demazure des variétés de Deligne-Lusztig $\mathbf{X}(w)$ dans leur revêtement $\mathbf{Y}(w)$ et retrouvons ainsi un résultat de Deligne-Lusztig [DeLu, Lemma 9.13] sur la monodromie locale autour des diviseurs de la compactification.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations	2
1. Variétés de Deligne-Lusztig	2
1.A. Définition	2
1.B. Compactification de Bott-Samelson-Demazure	4
1.C. Normalisation	5
2. Démonstration du théorème 1.5	6
2.A. Première réduction	6
2.B. Fonctions bi-invariantes sur $\mathbf{G}_\alpha\mathbf{U}$	7
2.C. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: première étape	8
2.D. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: deuxième étape	9
2.E. Fin de la démonstration	12
Références	14

INTRODUCTION

Dans [BoRo], nous avons étudié le prolongement de certains systèmes locaux sur les variétés de Deligne-Lusztig en vue d’une application algébrique (équivalence de Morita donnée par la décomposition de Jordan, conjecturée par Broué). Dans cette étude, nous utilisons un résultat crucial de Deligne-Lusztig sur la ramification de ces systèmes locaux [DeLu, lemme 9.13]. Une des motivations du présent travail est de fournir une alternative “explicite” au calcul local effectué dans la preuve de Deligne et Lusztig.

Plus précisément, si w est un élément du groupe de Weyl d’un groupe réductif connexe \mathbf{G} muni d’une isogénie F dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius, il lui est associé deux variétés de Deligne-Lusztig $\mathbf{X}(w)$ et $\mathbf{Y}(w)$ ainsi qu’un morphisme fini $\mathbf{Y}(w) \rightarrow \mathbf{X}(w)$ faisant de $\mathbf{X}(w)$ un quotient de $\mathbf{Y}(w)$ par l’action du groupe fini \mathbf{T}^F des points rationnels d’un tore maximal F -stable \mathbf{T} de \mathbf{G} (voir [DeLu, §1] : la variété $\mathbf{Y}(w)$ y est notée $\tilde{\mathbf{X}}(w)$). Deligne et Lusztig [DeLu, lemme 9.11] ont construit une compactification lisse $\overline{\mathbf{X}}(w)$ de $\mathbf{X}(w)$ à la Bott-Samelson-Demazure. Le but principal de cet article est de construire explicitement

la normalisation $\overline{\mathbf{Y}}(w)$ de $\overline{\mathbf{X}}(w)$ dans $\mathbf{Y}(w)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{Y}}(w) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{X}}(w). \end{array}$$

Une fois cette construction explicite réalisée, nous en déduisons les propriétés fondamentales de $\overline{\mathbf{Y}}(w)$ (voir le théorème 1.5) permettant d'en déduire une nouvelle preuve du lemme 9.13 de Deligne-Lusztig [DeLu] qui détermine la monodromie locale du revêtement le long d'une des composantes de $\overline{\mathbf{X}}(w) \setminus \mathbf{X}(w)$. Ce lemme est un point clef dans la preuve de Deligne-Lusztig des conjectures de Macdonald associant une représentation irréductible de \mathbf{G}^F à un caractère en position générale de \mathbf{T}^F .

NOTATIONS

Tout au long de cet article, nous fixons un groupe réductif connexe \mathbf{G} défini sur une clôture algébrique \mathbf{F} du corps fini à p éléments \mathbb{F}_p , où p est un nombre premier. Nous supposons de plus que \mathbf{G} est muni d'une isogénie $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius de \mathbf{G} .

Fixons un sous-groupe de Borel F -stable \mathbf{B} de \mathbf{G} , un tore maximal F -stable \mathbf{T} de \mathbf{B} et notons \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} . Notons $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ le groupe de Weyl de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , $X(\mathbf{T})$ (resp. $Y(\mathbf{T})$) le réseau des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de \mathbf{T} , Φ (resp. Φ^\vee) le système de racines (resp. coracines) de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , Δ (resp. Δ^\vee) la base de Φ (resp. Φ^\vee) associée à \mathbf{B} et Φ_+ (resp. Φ_+^\vee) l'unique système de racines (resp. coracines) positives contenant Δ (resp. Δ^\vee).

Si $\alpha \in \Phi$, on notera α^\vee sa coracine associée, $s_\alpha \in W$ la réflexion par rapport à α , \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent à un paramètre normalisé par \mathbf{T} associé à α , \mathbf{T}_{α^\vee} le sous-tore de \mathbf{T} image de α^\vee et \mathbf{G}_α le sous-groupe de \mathbf{G} engendré par \mathbf{U}_α et $\mathbf{U}_{-\alpha}$.

Posons $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ et $\tilde{S} = S \cup \{1\}$. Nous noterons $\ell : W \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ la fonction longueur relativement à S . Nous noterons B le groupe de tresses associé à (W, S) , de générateurs $\{\mathbf{s}_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Soit $f : B \rightarrow W$ le morphisme canonique (i.e. l'unique morphisme tel que $f(\mathbf{s}_\alpha) = s_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$) et soit $\sigma : W \rightarrow B$ l'unique application telle que $\sigma(s_\alpha) = \mathbf{s}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et $\sigma(vw) = \sigma(v)\sigma(w)$ si $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$. Cette application vérifie $f \circ \sigma = \text{Id}_W$.

1. VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG

Le lecteur pourra trouver dans [DiMiRo] les résultats généraux sur les variétés de Deligne-Lusztig que nous utiliserons ici.

1.A. Définition. Si $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et si $g\mathbf{U}, h\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U}$, nous écrirons $g\mathbf{U} \xrightarrow{n} h\mathbf{U}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{UnU}$. Si $w \in W$ et si $g\mathbf{B}, h\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$, nous écrirons $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$.

Si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ est une suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et si $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$ désigne la suite de leurs images respectives dans W , on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{n}) &= \{(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \\ &\quad g_1\mathbf{U} \xrightarrow{n_1} g_2\mathbf{U} \xrightarrow{n_2} \dots \xrightarrow{n_{r-1}} g_r\mathbf{U} \xrightarrow{n_r} g_{r+1}\mathbf{U}\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}(\mathbf{w}) = \{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \\ g_1\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} g_2\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{r-1}} g_r\mathbf{B} \xrightarrow{w_r} g_{r+1}\mathbf{B}\}$$

Si $t \in \mathbf{T}$ et $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$, on pose

$$(g_1\mathbf{U}, g_2\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \cdot t = (g_1t\mathbf{U}, g_2^{n_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r^{n_{r-1}\dots n_1}t\mathbf{U}, g_{r+1}^{n_r\dots n_1}t\mathbf{U}).$$

Il est alors facile de vérifier que, si $\mathbf{g} \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$, alors $\mathbf{g} \cdot t \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$ et cela définit une action à droite de \mathbf{T} sur $\mathcal{U}(\mathbf{n})$. De plus, le morphisme canonique $\mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ induit un morphisme

$$\pi_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{w}) \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}) \end{array}$$

et ce dernier induit un isomorphisme

$$(1.1) \quad \mathcal{U}(\mathbf{n})/\mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathbf{w}).$$

Posons maintenant

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \end{array}$$

et

$$\beta_{\mathbf{w}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}). \end{array}$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\mathbf{v}_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

Notons \mathcal{U}_F (resp. \mathcal{B}_F) le graphe du morphisme $F : \mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$ (resp. $F : \mathbf{G}/\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$). Les variétés de Deligne-Lusztig associées à \mathbf{n} et \mathbf{w} sont respectivement définies par

$$\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = \mathbf{v}_{\mathbf{n}}^{-1}(\mathcal{U}_F) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons toujours $\mathbf{w} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ la conjugaison par $w_1 \dots w_r$. Alors le groupe $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ agit sur $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ (par restriction de l'action de \mathbf{T} sur $\mathcal{U}(\mathbf{n})$) et le morphisme canonique $\pi_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ obtenu par restriction de $\pi_{\mathbf{n}}$ induit un isomorphisme

$$(1.2) \quad \mathbf{Y}(\mathbf{n})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(\mathbf{w}).$$

Pour finir, notons $v_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$ et $\beta_{\mathbf{w}} : \mathbf{X}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ les premières projections. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{v_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

REMARQUE 1.3 - Prolongeons l'application $\sigma : W \rightarrow B$ aux suites d'éléments de W en posant $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(w_1) \dots \sigma(w_r)$. Si \mathbf{n}' est une autre suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ dont la suite des images dans W est \mathbf{w}' , et si $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}')$, alors les variétés $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{w}')$ sont canoniquement

isomorphes et les \mathbf{T} -variétés $\mathbf{U}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{U}(\mathbf{n}')$ sont isomorphes, ces isomorphismes rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{U}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{U}(\mathbf{n}') \\
 \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & \begin{array}{c} \searrow v_{\mathbf{n}} \\ \swarrow v_{\mathbf{n}'} \end{array} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\
 & & \downarrow \\
 \mathbf{B}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{B}(\mathbf{w}') \\
 \beta_{\mathbf{w}} \searrow & & \swarrow \beta_{\mathbf{w}'} \\
 & & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B}
 \end{array}$$

commutatif.

De plus, $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} = \mathbf{T}^{\mathbf{w}'F}$ et les $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{Y}(\mathbf{n}')$ (resp. les variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{w}')$) sont isomorphes (resp. canoniquement isomorphes), les isomorphismes rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Y}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Y}(\mathbf{n}') \\
 \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & \begin{array}{c} \searrow v_{\mathbf{n}} \\ \swarrow v_{\mathbf{n}'} \end{array} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \\
 & & \downarrow \\
 \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{X}(\mathbf{w}') \\
 \beta_{\mathbf{w}} \searrow & & \swarrow \beta_{\mathbf{w}'} \\
 & & \mathbf{G}/\mathbf{B}
 \end{array}$$

commutatif. \square

1.B. Compactification de Bott-Samelson-Demazure. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on fixe un représentant \dot{s}_α de s_α dans \mathbf{G}_α . La remarque 1.3 montre que, dans le but de construire une compactification des variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{w})$, il est suffisant de travailler sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse : Nous fixons une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ d'éléments de Δ et, si $1 \leq i \leq r$, nous posons pour simplifier $s_i = s_{\alpha_i}$ et $\dot{s}_i = \dot{s}_{\alpha_i}$. Nous supposons de plus que $\mathbf{n} = (\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_r)$ et $\mathbf{w} = (s_1, \dots, s_r)$.

Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ sont deux suites d'éléments de $\bar{S} = S \cup \{1\}$ (de même longueur), nous écrivons $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $x_i \in \{1, y_i\}$. On pose aussi $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r)$, où nous choisirons toujours $\dot{1} = 1$. Par exemple, $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{n}$ et, pour simplifier les notations, nous noterons $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$, $\pi_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v}_{\dot{\mathbf{x}}}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ les applications $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$, $\pi_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v}_{\dot{\mathbf{x}}}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$, et la variété $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}})$ sera notée $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Pour finir, on pose $I_{\mathbf{x}} = \{1 \leq i \leq r \mid x_i = 1\}$ et on définit, comme dans [BoRo, 4.4.2],

$$Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} = \sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} \mathbb{Z} s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee).$$

Bott-Samelson et Demazure ont construit une compactification lisse $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{w})$ de $\mathbf{B}(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{w}) &= \coprod_{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\
 &= \{(g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{r+1} \mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{B}\}.
 \end{aligned}$$

Alors $\overline{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$ est lisse, projective, irréductible et contient $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte dense. Posons

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_{\mathbf{w}} : \quad \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) &\longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) &\longmapsto (g_1\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Alors $\overline{\beta}_{\mathbf{w}}$ prolonge $\beta_{\mathbf{w}}$ (et en fait coïncide avec $\beta_{\mathbf{x}}$ sur $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$). On pose alors, suivant [DeLu, §9.10],

$$\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \overline{\beta}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons que

$$(1.4) \quad \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \coprod_{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}} \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Alors $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ est une variété lisse, projective et contient $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte dense [DeLu, lemme 9.11].

1.C. Normalisation. Avant de parler de la compactification de $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et avant d'énoncer le résultat principal de cet article, nous aurons besoin de quelques notations. Tout d'abord, fixons un entier naturel non nul d et une puissance q de p tels que, pour tout $t \in \mathbf{T}$ et pour tout $w \in W$, on ait $(wF)^d(t) = t^q$. On fixe une racine primitive $(q-1)$ -ième de l'unité ζ dans \mathbf{F}^\times . On note encore $\mathbf{w}F : Y(\mathbf{T}) \rightarrow Y(\mathbf{T})$ l'endomorphisme de groupes induits par l'endomorphisme $\mathbf{w}F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ et on pose

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{w}} : Y(\mathbf{T}) &\longrightarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \\ \lambda &\longmapsto N_{F^d/\mathbf{w}F}(\lambda(\zeta)), \end{aligned}$$

où $N_{F^d/\mathbf{w}F} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto t^{\mathbf{w}F} t \dots (wF)^{d-1} t$. Rappelons que $N_{\mathbf{w}}$ est surjective et induit un isomorphisme

$$Y(\mathbf{T})/(\mathbf{w}F - 1)(Y(\mathbf{T})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}.$$

Le morphisme $\pi_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ étant fini, on peut définir la *normalisation* $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$: c'est l'unique variété normale \mathbf{Z} contenant $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte dense et munie d'un morphisme fini $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Z} \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ prolongeant $\pi_{\mathbf{w}}$. Le morphisme $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant fini, $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une variété projective. Le but de cet article est de construire explicitement cette variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ et de déduire de cette construction les propriétés suivantes :

Théorème 1.5. *Avec les notations précédentes, on a :*

- (a) *La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une variété projective, normale, rationnellement lisse, de lieu singulier contenu dans*

$$\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1} \left(\bigcup_{\substack{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w} \\ |I_{\mathbf{x}}| \geq 2}} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right).$$

- (b) *La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est munie d'une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ prolongeant l'action sur $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ et telle que $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}$ induit un isomorphisme $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$.*
- (c) *Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, alors le stabilisateur dans $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ d'un élément de $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ est égal à $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$.*
- (d) *Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, alors il existe un morphisme canonique $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{i_{\mathbf{x}}} & \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \\ & \searrow \pi_{\mathbf{x}} & \downarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}} \\ & & \mathbf{X}(\mathbf{x}) \end{array}$$

et induisant un isomorphisme $\mathbf{Y}(\mathbf{x})/N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \xrightarrow{\sim} \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$.

Rassemblons les constructions précédentes dans le diagramme commutatif suivant :

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{i_{\mathbf{w}}} & \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) & \xleftarrow{i_{\mathbf{x}}} & \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ \downarrow \pi_{\mathbf{w}} & & \downarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}} & & \downarrow & \swarrow \pi_{\mathbf{x}} & \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\quad} & \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{X}(\mathbf{x}) & & \end{array}$$

REMARQUE 1.7 - L'énoncé (c) du théorème précédent montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}))$$

tandis que l'énoncé (d) montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{x}F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})).$$

Ceci n'est pas une incohérence car

$$\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \simeq \mathbf{T}^{\mathbf{x}F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$$

d'après [BoRo, proposition 4.4 (4)]. \square

La section suivante est consacrée à la démonstration du théorème 1.5. Avant cela, montrons que ce théorème fournit une autre preuve de [DeLu, lemme 9.13]. Tout d'abord, si $1 \leq i \leq r$, notons $\mathbf{w}(i) = (s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_r) \preccurlyeq \mathbf{w}$. Alors

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \setminus \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$$

et les $\overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$ sont des diviseurs lisses à croisements normaux.

On en déduit alors [DeLu, Lemma 9.13]:

Corollaire 1.8. *Le $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -torseur $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ (au-dessus de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$) se ramifie le long de $\overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$ de la même façon que le changement de base sous $s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee) : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$ du revêtement de Lang $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto t^{-1} \mathbf{w}^F t$, se ramifie en 0.*

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5

2.A. Première réduction. La preuve que nous proposons du théorème 1.5 passe par une construction explicite de $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Cependant, pour simplifier cette construction, il convient de remarquer qu'en raisonnant comme dans [BoRo, 6.2], on peut supposer (et nous le ferons) que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de §2, nous supposons que le groupe dérivé de \mathbf{G} est simplement connexe.*

Notons que ceci implique que $\mathbf{G}_\alpha \simeq \mathbf{SL}_2$ et que α^\vee est injective pour toute racine α (en particulier, $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha^\vee$ est sans torsion).

2.B. **Fonctions bi-invariantes sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$.** Avant de procéder à la construction explicite de $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires sur les fonctions régulières sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ invariantes par l'action de $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ par translations à gauche et à droite (ici, α est une racine simple). Commençons par étudier le cas du groupe \mathbf{SL}_2 .

Notons

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_2 & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & c \end{array}$$

et notons \mathbf{U}_2 le sous-groupe de \mathbf{SL}_2 formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Il est alors facile de vérifier que φ est invariante par l'action de $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ sur \mathbf{SL}_2 (par translations à gauche et à droite). En fait, en notant \mathbf{B}_2 le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de \mathbf{SL}_2 , on a :

Proposition 2.1. *Soient $g \in \mathbf{SL}_2$, $z \in \mathbf{F}^\times$, $t = \text{diag}(z, z^{-1})$ et $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :*

- (a) $\mathbf{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2} = \mathbf{F}[\varphi]$.
- (b) $\varphi(tg) = z^{-1}\varphi(g)$ et $\varphi(gt) = z\varphi(g)$.
- (c) $\varphi(t^{-1}g^st) = \varphi(g)$.
- (d) On a $\varphi(g) = 0$ si et seulement si $g \in \mathbf{B}_2$.
- (e) On a $\varphi(g) = 1$ si et seulement si $g \in \mathbf{U}_2 s \mathbf{U}_2$.

Démonstration. (a) Soit $\psi \in \mathbf{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{F}[T]$ tel que, pour tout $c \in \mathbf{F}$, $\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = P(c)$. Alors $\psi - P(\varphi)$ est une fonction $(\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2)$ -invariante sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F})$ et nulle sur ${}^s\mathbf{U}_2$. Par conséquent, elle est nulle sur $\mathbf{U}_2 {}^s\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2$: or, cet ensemble est dense dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F})$, donc $\psi - P(\varphi) = 0$.

(b), (c) (d) et (e) découlent de calculs élémentaires. □

Revenons aux groupes $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$. Fixons une racine simple $\alpha \in \Delta$. Choisissons un isomorphisme $\aleph_\alpha : \mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_\alpha$ de sorte que

$$\aleph_\alpha(\mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_\alpha, \quad \aleph_\alpha(s) = \dot{s}_\alpha, \quad \text{et} \quad \aleph_\alpha \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^\vee(z)$$

pour tout $z \in \mathbf{F}^\times$. Notons \mathbf{U}_α^* le sous-groupe de \mathbf{U} engendré par la famille $(\mathbf{U}_\beta)_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}}$. On a alors $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* = \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{U}_\alpha^*$. On note $\tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{U}_\alpha^* \rightarrow \mathbf{G}_\alpha$ la projection naturelle. Notons pour finir φ_α la composition $\varphi \circ \aleph_\alpha^{-1} \circ \tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{F}$, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} & \xrightarrow{\tau_\alpha} & \mathbf{G}_\alpha & \xrightarrow{\aleph_\alpha^{-1}} & \mathbf{SL}_2 \\ & \searrow \varphi_\alpha & & & \downarrow \varphi \\ & & & & \mathbf{F} \end{array}$$

soit commutatif. Le morphisme φ_α définit une fonction régulière sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$. Notons de plus que

$$(2.2) \quad \varphi_\alpha(\dot{s}_\alpha) = 1,$$

car $\varphi(s) = 1$.

Proposition 2.3. *Soient $g \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$, $u, v \in \mathbf{U}$, $t \in \mathbf{T}$ et $z \in \mathbf{F}^\times$. Alors*

- (a) $\varphi_\alpha(ugv) = \varphi_\alpha(g)$.
- (b) $\varphi_\alpha(g\alpha^\vee(z)) = z\varphi_\alpha(g)$ et $\varphi_\alpha(\alpha^\vee(z)g) = z^{-1}\varphi_\alpha(g)$.
- (c) $t^{-1}g^{s_\alpha t} \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ et $\varphi_\alpha(t^{-1}g^{s_\alpha t}) = \varphi_\alpha(g)$.
- (d) $\varphi_\alpha(g) = 0$ si et seulement si $g \in \mathbf{B}$ (c'est-à-dire si et seulement si $g \in \mathbf{T}_{\alpha^\vee} \mathbf{U} = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$).
- (e) $\varphi_\alpha(g) = 1$ si et seulement si $g \in \mathbf{U} \dot{s}_\alpha \mathbf{U}$.

Démonstration. Les assertions (a), (b), (d) et (e) découlent facilement de la proposition 2.1 et du fait que \mathbf{U}_α^* est normalisé par \mathbf{U} et \mathbf{G}_α . Seul le (c) nécessite un commentaire. Tout d'abord, comme \mathbf{T} est engendré par $\text{Ker } \alpha$ et \mathbf{T}_{α^\vee} , il suffit de montrer le résultat dans les deux cas suivants : $\alpha(t) = 1$ ou $t = \alpha^\vee(z)$, $z \in \mathbf{F}^\times$. Le deuxième cas se traite immédiatement par la proposition 2.1. Dans le premier cas, on remarque que t commute avec \mathbf{G}_α (et donc $g^{s_\alpha t} = t$) et, comme il normalise \mathbf{U}_α^* , on a $\tau_\alpha(t^{-1}g^{s_\alpha t}) = \tau_\alpha(g)$. \square

2.C. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: première étape. Posons pour commencer

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{w}) = \{(g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}\}$$

et notons

$$\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{w}) \longrightarrow \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{w})$$

l'application canonique. La variété $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{w})$ est irréductible, quasi-affine, lisse et de dimension $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$.

Nous définissons

$$\varphi_{\mathbf{w}} : \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{w}) & \longrightarrow & \mathbf{A}^r \\ (g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}) & \longmapsto & (\varphi_{\alpha_1}(g_1^{-1} g_2), \dots, \varphi_{\alpha_r}(g_r^{-1} g_{r+1})). \end{array}$$

D'après la proposition 2.3 (a), l'application $\varphi_{\mathbf{w}}$ est bien définie et est un morphisme de variétés. Fixons maintenant un r -uplet d'entiers naturels non nuls $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$, notons $f_{\mathbf{d}} : \mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{A}^r$, $(\xi_1, \dots, \xi_r) \mapsto (\xi_1^{d_1}, \dots, \xi_r^{d_r})$ et posons

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{w}) \times \mathbf{A}^r \mid \varphi_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) = f_{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi})\}.$$

Proposition 2.4. *La variété $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w})$ est lisse, de dimension $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$.*

Démonstration. Si $\alpha \in \Delta$ et $d \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathbf{u}_{\alpha, d} = \{(g, \xi) \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}/\mathbf{U} \times \mathbf{A}^1 \mid \varphi_\alpha(g) = \xi^d\}.$$

Les isomorphismes $\aleph_\alpha^{-1} : \mathbf{G}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_2$ et $\mathbf{SL}_2/\mathbf{U}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$ induisent un isomorphisme $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}/\mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et finalement

$$\mathbf{u}_{\alpha, d} \xrightarrow{\sim} \{(x, y, \xi) \in \mathbf{A}^3 \mid (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } y = \xi^d\} \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

En particulier, $\mathbf{u}_{\alpha, d}$ est lisse.

Soient $\mathbf{w}_i = (s_1, \dots, s_i)$ et $\mathbf{d}_i = (d_1, \dots, d_i)$. On dispose d'une suite de morphismes canoniques

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}_r}(\mathbf{w}_r) \longrightarrow \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}_{r-1}}(\mathbf{w}_{r-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}_1}(\mathbf{w}_1) \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$$

(consistant à chaque étape à oublier le dernier terme de \mathbf{g} et $\boldsymbol{\xi}$) qui sont des fibrations successives de fibres successivement isomorphes à des variétés de la forme $\mathbf{u}_{\alpha, d}$, donc lisses. La lissité de $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w})$ s'en déduit. \square

2.D. Construction de la variété $\overline{Y}(\mathbf{w})$: deuxième étape. Si $1 \leq i \leq r$, il existe un unique $\lambda_i \in Y(\mathbf{T})$ et un unique $m_i \in \mathbb{Z}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_i - \mathbf{w}F(\lambda_i) = m_i s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee), \\ m_i > 0, \\ Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i \text{ est sans torsion.} \end{cases}$$

Ceci découle de l'injectivité de $\text{Id}_{Y(\mathbf{T})} - \mathbf{w}F$ et du fait que $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ est sans torsion.

REMARQUE 2.5 - Les m_i ne sont pas divisibles par p car l'égalité qui les définit implique que

$$(2.6) \quad m_i N_{F^d/\mathbf{w}F}(s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee)) = (q-1)\lambda_i,$$

donc

$$(2.7) \quad m_i \text{ divise } q-1,$$

car $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$ est sans torsion. \square

Posons alors $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ et

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \mid v_{\mathbf{m}}(\mathbf{g}) \in \mathcal{U}_F\}.$$

En d'autres termes, $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est formée des éléments $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \times \mathbf{A}^r$ tels que

$$(2.8) \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U} \text{ et } \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1}g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}; \\ g_{r+1}\mathbf{U} = F(g_1)\mathbf{U}. \end{cases}$$

Le morphisme $v_{\mathbf{m}} : \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U}$ est équivariant pour l'action diagonale de \mathbf{G} et on déduit de [DeLu, page 151] que

$$(2.9) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est lisse, purement de dimension } 2r.$$

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) &\longrightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) &\longmapsto \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant construire une action à droite de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r$ sur $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Tout d'abord posons, pour tout $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$,

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{z}) = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r) \\ \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = s_i \gamma_i(\mathbf{z}) \alpha_i^\vee(z_i^{m_i}), \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, r\}. \end{cases}$$

Alors

$$(2.10) \quad F(\gamma_1(\mathbf{z})) = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}).$$

Démonstration. En effet,

$$\gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}^{-1} \gamma_1(\mathbf{z}) s_r \cdots s_2 \alpha_1^\vee(z_1^{m_1}) s_r \cdots s_3 \alpha_2^\vee(z_2^{m_2}) \cdots \alpha_r^\vee(z_r^{m_r})$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^F \gamma_1(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{w} \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) &= (\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)) \mathbf{w}^F (\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r))^{-1} \times \\ &\quad \times \alpha_1^\vee(z_1^{-m_1}) s_1 \alpha_2^\vee(z_2^{-m_2}) \cdots s_1 \cdots s_{r-1} \alpha_r^\vee(z_r^{-m_r}) = 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la définition des λ_i . \square

Si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$, si $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ et si $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, on pose

$$(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * \mathbf{z} = (g_1\gamma_1(\mathbf{z})\mathbf{U}, \dots, g_r\gamma_r(\mathbf{z})\mathbf{U}, F(g_1)\gamma_{r+1}(\mathbf{z})\mathbf{U}; z_1\xi_1, \dots, z_r\xi_r)$$

et

$$(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * t = (g_1t\mathbf{U}, g_2^{s_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r^{s_{r-1}\dots s_1}t\mathbf{U}, F(g_1)^{s_r\dots s_1}t\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r).$$

Proposition 2.11. *Les formules ci-dessus définissent une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r$ sur la variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. De plus, le morphisme $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$.*

Démonstration. Montrons que l'on a bien défini une action. Soient $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ et $\mathbf{z} \in (\mathbf{G}_m)^r$. Il suffit de montrer que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t$ et $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z}$ appartiennent à $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ (les axiomes des actions de groupes sont clairement vérifiés). Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r) \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r).$$

Commençons par montrer que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Posons pour simplifier $t_i = {}^{s_{i-1}\dots s_1}t$. On a alors

$$(g_it_i)^{-1}(g_{i+1}t_{i+1}) = t_i^{-1}(g_i^{-1}g_{i+1}) {}^{s_it_i}$$

et donc, d'après la proposition 2.3 (c), on a $(g_it_i)^{-1}(g_{i+1}t_{i+1}) \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U}$ et

$$\varphi_{\alpha_i}((g_it_i)^{-1}(g_{i+1}t_{i+1})) = \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1}g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}.$$

D'autre part, puisque $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$, on a $F(g_1t_1)\mathbf{U} = g_{r+1} {}^Ft\mathbf{U} = g_{r+1} {}^{\mathbf{w}^{-1}}t\mathbf{U} = g_{r+1}t_{r+1}\mathbf{U}$. Donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$.

Montrons maintenant que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. D'une part, on a

$$(g_i\gamma_i(\mathbf{z}))^{-1}(g_{i+1}\gamma_{i+1}(\mathbf{z})) = \gamma_i(\mathbf{z})^{-1}(g_i^{-1}g_{i+1}) {}^{s_i}\gamma_i(\mathbf{z})\alpha_i^{\vee}(z_i^{m_i}),$$

donc $(g_i\gamma_i(\mathbf{z}))^{-1}(g_{i+1}\gamma_{i+1}(\mathbf{z})) \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U}$ et son image par φ_{α_i} est $z_i^{m_i}\varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1}g_{i+1}) = (z_i\xi_i)^{m_i}$ (voir la proposition 2.3 (b) et (c)). D'autre part, $g_{r+1}\gamma_{r+1}(\mathbf{z})\mathbf{U} = F(g_1\gamma_1(\mathbf{z}))\mathbf{U}$ d'après 2.10. Donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$.

Il nous reste à montrer la dernière assertion de la proposition. Tout d'abord, il est clair que les $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites sont contenues dans les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$. Réciproquement, montrons que les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ sont des orbites. Soient donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$ et $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$ deux éléments de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ tels que $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) = \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$. Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r),$$

$$\mathbf{g}' = (g'_1\mathbf{U}, \dots, g'_{r+1}\mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_r).$$

Par hypothèse, il existe $t_i \in \mathbf{T}$ tels que $g'_i\mathbf{U} = g_it_i\mathbf{U}$. Mais, puisque $g_i^{-1}g'_{i+1}$ et $g_i^{-1}g_{i+1}$ appartiennent à $\mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U}$, cela montre que $t_i^{-1}t_{i+1}$ appartient à $\mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}$, ou encore que ${}^{s_it_i^{-1}}t_{i+1}$ appartient à $\mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}$. Soit donc $z_i \in \mathbf{G}_m$ tel que $t_{i+1} = {}^{s_it_i}\alpha_i^{\vee}(z_i^{m_i})$. Posons $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$. Alors, quitte à remplacer $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$ par $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z}$, et quitte à multiplier z_i par une racine m_i -ième de l'unité, on peut supposer que $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$ et $t_{i+1} = {}^{s_it_i}$. Mais alors, le fait que $g_{r+1}\mathbf{U} = F(g_1)\mathbf{U}$ et $g'_{r+1}\mathbf{U} = F(g'_1)\mathbf{U}$ impose que $t_{r+1} = F(t_1)$, et donc que $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$. Par conséquent, $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t$.

Les variétés $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ et $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant lisses et les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ étant des $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites, il suffit maintenant de montrer que $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ est séparable [Bor, proposition 6.6]. Pour cela, notons $\Pi(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \cdots \xi_r$ si $(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbf{A}^r$ et posons

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \Pi(\boldsymbol{\xi}) \neq 0\}.$$

Notons $\tilde{t}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, $\mathbf{g} \mapsto (\mathbf{g}; 1, \dots, 1)$. Le fait que $\tilde{t}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ découle de ce que $\varphi_{\alpha_i}(s_i) = 1$ d'après 2.2. Alors $\tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w})$ est un ouvert de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ contenant $\tilde{t}_{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}(\mathbf{w}))$ et son image par $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ est $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ (voir la proposition 2.3 (d)). Le morphisme $\mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ étant séparable, il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) & \longmapsto & \tilde{t}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{array}$$

est un isomorphisme de variétés : cela vient du fait que, si $\mathbf{g} \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1}$ est tel que $(\mathbf{g}; 1, \dots, 1) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, alors $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{w})$ d'après la proposition 2.3 (e). \square

On a donc un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des morphismes quotients par les actions des groupes indiqués:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{G}_m)^r \downarrow & & \downarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r \\ \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & & \\ \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \end{array}$$

Si I est une partie de $\{1, 2, \dots, r\}$, on pose

$$\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, i \in I \iff \xi_i = 0\}$$

et

$$H_I = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r \mid \gamma_1(\mathbf{z}) = \cdots = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = 1 \text{ et } \forall i \notin I, z_i = 1\}.$$

Alors $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ est une sous-variété localement fermée de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, stable par l'action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r$, et

(2.12) *le stabilisateur d'un élément de $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ dans $(\mathbf{G}_m)^r$ est égal à H_I .*

D'autre part, il résulte facilement de la proposition 2.3 (d) que, si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, alors

$$(2.13) \quad \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

En particulier, on a une partition en sous-variétés localement fermées

$$(2.14) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

Proposition 2.15. *Soit I une partie de $\{1, 2, \dots, r\}$. Alors :*

- (a) H_I est un groupe fini, contenu dans $H_{\{1, 2, \dots, r\}}$.
- (b) Si $|I| \leq 1$, alors $H_I = 1$.

Démonstration. (a) Il est tout d'abord évident que H_I est contenu dans $H_{\{1,2,\dots,r\}}$. Il suffit donc de montrer que ce dernier est fini. Or, si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_{\{1,2,\dots,r\}}$, alors puisque $\gamma_i(\mathbf{z}) = \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = 1$, il résulte de la définition des γ_i que $\alpha_i^\vee(z_i^{m_i}) = 1$. Puisque α_i^\vee est injectif (car $\mathbf{G}_{\alpha_i} \simeq \mathbf{SL}_2$), on en déduit que z_i est une racine m_i -ième de l'unité. D'où le résultat.

(b) Si $I = \emptyset$, alors $H_I = 1$ par définition. Si $I = \{i\}$ et si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_I$, alors $z_1 = \dots = z_{i-1} = z_{i+1} = \dots = z_r = 1$. Mais de plus $\gamma_1(\mathbf{z}) = 1$, ce qui implique que $\lambda_i(z_i) = 1$. Donc $z_i = 1$ car, puisque $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$ est sans torsion, le morphisme $\lambda_i : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$ est injectif. \square

Posons maintenant

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r,$$

notons $\text{proj}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ la projection canonique et notons $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ le morphisme de variétés induit par $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$. Si $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$, on note $\boldsymbol{\xi}_I$ la fonction caractéristique du complémentaire de I , que l'on voit comme un élément de \mathbf{A}^r . On pose aussi $\overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r \subset \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. On a bien sûr

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1,2,\dots,r\}} \overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

Soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. Comme dans la preuve de la proposition 2.11, on montre qu'on a un morphisme bien défini

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{G}_m)^r / H_{I_{\mathbf{x}}} &\rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ (g, z) &\mapsto (g, \boldsymbol{\xi}_{I_{\mathbf{x}}}) * z \end{aligned}$$

et que c'est un isomorphisme. En particulier, $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse.

On définit alors

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{g} &\longmapsto \text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}_{I_{\mathbf{x}}}). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(2.16) \quad \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

Le morphisme canonique $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est le quotient par l'action libre de $(\mathbf{G}_m)^r / H_{I_{\mathbf{x}}}$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse, donc $\overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse.

Nous allons montrer que $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est la normalisation de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ et que les énoncés (a), (b), (c) et (d) du théorème 1.5 sont vérifiés.

2.E. Fin de la démonstration. Dans la preuve de la proposition 2.11, il a été remarqué que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r &\longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) &\longmapsto \tilde{\iota}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés. Cela montre que $i_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une immersion ouverte, d'image $\overline{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) = \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(w) & \xrightarrow{i_{\mathbf{w}}} & \overline{\mathbf{Y}}(w) \\ \pi_{\mathbf{w}} \downarrow & & \downarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{X}(w) & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathbf{X}}(w). \end{array}$$

D'autre part, par construction, $i_{\mathbf{w}}$ est $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -équivariant et il résulte de la proposition 2.11 que $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}$ induit un isomorphisme de variétés

$$(2.17) \quad \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}).$$

D'autre part, posons $H = H_{\{1,2,\dots,r\}}$. Alors $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$ est une variété normale et rationnellement lisse (car $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse et H est fini) et le groupe $(\mathbf{G}_m)^r/H$ agit librement sur $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$. Donc

$$(2.18) \quad \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est une variété normale et rationnellement lisse}$$

et

$$(2.19) \quad \text{le morphisme } \bar{\pi}_{\mathbf{w}} \text{ est un morphisme fini.}$$

Par conséquent, $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ est bien la normalisation de $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$.

Preuve du (a). Puisque $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}$ est un morphisme fini (voir 2.19), c'est un morphisme projectif. La variété $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant projective, $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est aussi projective.

Le morphisme canonique $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}} \rightarrow \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse et la description du lieu singulier de $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ se ramène donc au cas de la variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$. Puisque $H_{\{1,\dots,r\}}$ agit librement sur $\coprod_{|I| \leq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ (proposition 2.15 (b)), on obtient la dernière assertion de (a).

REMARQUE - Le lieu de ramification du morphisme quotient $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$ est de codimension > 1 . La variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse, donc le théorème de pureté du lieu de ramification [SGA1, X, Théorème 3.1] montre que le lieu singulier de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$ est l'image de $\coprod_{|H_I| > 1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$. Par conséquent, le lieu singulier de $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est $\coprod_{|H_I| > 1} \bar{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$.

Preuve du (b). Cela a été démontré dans 2.17.

Preuve du (c). Soit $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ et soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. Alors t stabilise un élément de $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ si et seulement si il existe $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ tel que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on ait

$$\gamma_i(\mathbf{z}) = s_{i-1} \cdots s_1 t \text{ pour tout } i \text{ et } z_i = 1 \text{ pour } i \notin I_{\mathbf{x}}.$$

Si tel est le cas, on a $z_i^{m_i} = 1$ pour tout i et $t = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)$. D'après 2.7, il existe donc $e_i \in \mathbb{Z}$ tel que $z_i = (\zeta^{(q-1)/m_i})^{e_i}$, donc

$$t = N_{\mathbf{w}} \left(\sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} e_i s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^{\vee}) \right)$$

d'après 2.6. Donc $t \in N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$. La réciproque se montre de façon analogue.

Preuve du (d). Soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. On a construit un morphisme canonique $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$. Tout d'abord, il est évident que $i_{\mathbf{x}}$ est surjective : cela résulte du fait suivant : si $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ et si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$, alors $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{I_{\mathbf{x}}}$ si et seulement si $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$ (voir la proposition 2.3 (e)). De plus, puisque $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$ (où $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}}$ désigne la restriction de $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}$ à $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x})$), le morphisme $i_{\mathbf{x}}$ est séparable. Les variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ et $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ étant lisses, il suffit de montrer que les fibres de $i_{\mathbf{x}}$ sont les $N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$ -orbites.

Écrivons $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, où $x_i \in \{1, s_i\}$ pour tout i . Comme $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$, les fibres de $(\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}})^{-1}$ sont contenues dans des $\mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$ -orbites. Soit $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$ et soit $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Alors $i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g} \cdot t) = i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g})$ si et seulement si il existe $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$ dans $(\mathbf{G}_m)^r$ tel que

$$(*) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq r+1, & x_{i-1} \cdots x_1 t = \gamma_i(\mathbf{z}), \\ \forall i \notin I_{\mathbf{x}}, & z_i = 1. \end{cases}$$

Posons, comme dans [BoRo, §4.4.3],

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} &= \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ &\forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} &= \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ &\forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, x_i a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}\} \end{aligned}$$

et donc l'application

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{x}} : \mathbf{T}^{\mathbf{x}F} &\longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} \\ t &\longmapsto (t, x_1 t, \dots, x_{r-1} \cdots x_1 t, x_r \cdots x_1 t) \end{aligned}$$

est bien définie (et est un morphisme de groupes injectif). D'autre part, si $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ est l'ensemble des $(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ tels que $z_i = 1$ si $i \notin I_{\mathbf{x}}$, alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}_{\mathbf{x}} &\longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} &\longmapsto (\gamma_1(\mathbf{z}), \dots, \gamma_{r+1}(\mathbf{z})) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes qui est bien défini et dont il est facile de vérifier que le noyau est fini (c'est $H_{I_{\mathbf{x}}}$). Donc son image est de dimension $|I_{\mathbf{x}}|$, ce qui est aussi la dimension de $\mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}}$ (voir [BoRo, page 17]). Donc

$$\mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}}^{\circ} = \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}}).$$

Mais la condition (*) est équivalente à dire que $\mu_{\mathbf{x}}(t) \in \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}})$. Le résultat découle alors de [BoRo, proposition 4.11 (4)]. La preuve du théorème 1.5 est complète.

RÉFÉRENCES

- [Bor] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics **126**, Second edition, Springer-Verlag, 1991.
- [BoRo] C. BONNAFÉ ET R. ROUQUIER, *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. I.H.E.S. **97** (2003), 1-59.
- [DeLu] P. DELIGNE ET G. LUSZTIG, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103-161.
- [DiMiRo] F. DIGNE, J. MICHEL ET R. ROUQUIER, *Cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig attachées à des éléments réguliers*, Adv. Math. **209** (2007), 749-822.
- [SGA1] A. GROTHENDIECK *et al.*, "SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental", Springer Lecture Notes in Math. **224**, 1971.

CÉDRIC BONNAFÉ : LABO. DE MATH. DE BESANÇON (CNRS: UMR 6623), UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, 16 ROUTE DE GRAY, 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE

E-mail address: `cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr`

RAPHAËL ROUQUIER : MATHEMATICAL INSTITUTE, UNIVERSITY OF OXFORD, 24-29 ST GILES', OXFORD, OX1 3LB, UK

E-mail address: `rouquier@maths.ox.ac.uk`