

# Le $n^{\text{ième}}$ groupe fondamental algébrique

Eric Reynaud\*

Département de Mathématiques, Université de Montpellier II  
pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5

Dans l'optique d'étudier les modules de génération finie sur des algèbres de dimension finie, il a été développé ces dernières années une méthode diagramatique, essentiellement due à P. Gabriel, basée sur des carquois, c'est-à-dire sur des graphes orientés finis. Plus précisément, il a été démontré que pour toute algèbre  $A$  sobre de dimension finie sur un corps  $k$  algébriquement clos, il existe un carquois unique  $Q$  et au moins un idéal  $I$  admissible de l'algèbre  $kQ$ , l'algèbre des chemins de  $Q$ , tels que  $A$  soit isomorphe à  $kQ/I$ . Un tel couple  $(Q, I)$  est nommé une présentation de  $A$  par carquois et relations. Pour chaque paire  $(Q, I)$ , nous pouvons définir un groupe fondamental  $\Pi_1(Q, I)$ . En général, cependant, différentes présentations d'une même algèbre peuvent conduire à des groupes fondamentaux différents. Ainsi, une algèbre dont toutes les présentations donnent un groupe fondamental trivial est appelée simplement connexe. L'importance des algèbres simplement connexes dans la théorie des représentations d'algèbres réside dans le fait que souvent, il est possible de réduire, avec l'aide des recouvrements, l'étude des modules indécomposables d'une algèbre à ceux d'une algèbre simplement connexe bien choisie (voir par exemple [BG]).

Dans cette article, nous définissons le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental d'une algèbre d'incidence. Cette définition a le mérite de donner un isomorphisme entre ce groupe fondamental et le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental topologique du complexe simplicial associé. J.C. Bustanante a récemment montré que [Bus2] que le premier groupe fondamental d'une présentation d'une algèbre triangulaire est isomorphe au groupe fondamental d'un CW-Complexe. Cette construction nous permet de construire ici une algèbre d'incidence pour chaque présentation d'une algèbre ayant le même premier groupe fondamental. Ainsi pour chaque présentation d'une algèbre triangulaire, il est possible de construire une algèbre ayant le même groupe fondamental et de donner ainsi une signification au  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental d'une présentation d'une algèbre triangulaire.

## 1. CW-complexe associé à une présentation.

**1.1 Le groupe fondamental.** Rappelons dans un premier temps la construction du groupe fondamental d'une présentation  $(Q, I)$  par carquois et relation d'une algèbre. Soit  $\alpha$  une flèche de  $Q$  reliant  $x$  à  $y$ , notons  $\alpha^{-1}$  son inverse formel qui relie  $y$  à  $x$ ; les sommets  $y$  et  $x$  sont appelés respectivement *source* et *terminus* de  $\alpha^{-1}$  et sont notés  $s(\alpha^{-1})$  et  $t(\alpha^{-1})$ . Une promenade de  $kQ$ , algèbre de carquois associé à  $Q$ , de longueur  $n$  est une suite formelle  $p = \alpha_n^{\pm 1} \alpha_{n-1}^{\pm 1} \dots \alpha_1^{\pm 1}$  telle que le but de  $\alpha_k^{\pm 1}$  soit égal à la source de  $\alpha_{k+1}^{\pm 1}$  pour  $k$  variant de 1 à  $n-1$ ; les sommets  $s(\alpha_1^{\pm 1})$  et  $t(\alpha_n^{\pm 1})$  sont naturellement appelés *source* et *terminus* de la promenade  $p$  et sont notés  $s(p)$  et  $t(p)$ . Remarquons que les applications *source* et *terminus* ainsi définies sont des prolongements des applications *source* et *terminus* définies sur les chemins de  $Q$ . Nous noterons  $P(Q)$  l'ensemble des promenades de  $Q$ .

La promenade triviale en  $x$ , celle ne contenant aucune flèche et dont les extrémités se trouvent en  $x$ , est encore notée  $x$ . De plus, une promenade est dite fermée si elle a des extrémités identiques. La composition des chemins munit également l'ensemble des promenades d'une multiplication partiellement définie. Elle prolonge celle construite sur l'ensemble des chemins. Plus précisément, si  $p_1$  et  $p_2$  sont deux promenades,

---

\* E-mail address : reynaud@math.univ-montp2.fr

alors  $p_2.p_1$  est définie uniquement si le terminus de  $p_1$  est égal à la source de  $p_2$  et vaut, dans ce cas là, la concaténation des deux suites.

Considérons maintenant la plus petite relation d'équivalence  $\sim$  sur  $P(Q)$  vérifiant :

1. Si  $\alpha$  est une flèche reliant le sommet  $x$  au sommet  $y$  alors  $\alpha\alpha^{-1} \sim y$  et  $\alpha^{-1}\alpha \sim x$ .
2. Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$  est une relation minimale alors  $\omega_1 \sim \dots \sim \omega_n$ .
3. Si les promenades  $\alpha$  et  $\beta$  sont équivalentes alors  $\omega \alpha \omega' \sim \omega \beta \omega'$  pour toute promenade  $\omega$  et  $\omega'$  de  $Q$  telles que les produits précédents existent.

Considérons enfin un sommet  $x_0$  de  $Q$ . L'ensemble quotient des promenades fermées en  $x_0$  par la relation d'équivalence précédente est un groupe et ne dépend pas de  $x_0$  lorsque  $Q$  est connexe. Il est noté  $\Pi_1(Q, I)$ .

**1.2 CW-complexe associé à une présentation.** Soit  $(Q, I)$  la présentation d'une algèbre. Considérons la relation d'équivalence précédente  $\sim$  définie pour la construction du groupe fondamental et restreignons-là à l'ensemble  $C(Q)$  des chemins sur  $Q$ . Ainsi deux chemins sont équivalents, s'ils sont équivalents en tant que promenades. Rappelons à présent la construction, proposé par J.C. Bustamente (Voir [Bus2]), d'un CW-complexe  $\mathcal{B}(Q, I)$  associé à la présentation  $(Q, I)$  :

1. Les 0-cellules de  $\mathcal{B}(Q, I)$  sont les sommets de  $Q$ .
2. Les 1-cellules sont les classes de chemins  $\tilde{\omega}$  de  $Q$  selon la relation  $\sim$  où  $\tilde{\omega}$  contient au moins un chemin qui n'est pas dans  $I$ . Les 0-cellules sur lesquels on attache  $\tilde{\omega}$  sont exactement les 0-cellules correspondant à la source et au terminus de  $\tilde{\omega}$ .
3. Les  $n$ -cellules, pour  $n \geq 2$ , sont exactement les  $n$ -uplets  $(\tilde{\omega}_n, \dots, \tilde{\omega}_1)$  tels qu'il existe pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , un chemin  $\omega_i$  dans  $\tilde{\omega}_i$  vérifiant  $\omega_n \dots \omega_2 \omega_1 \neq 0$  dans  $kQ/I$ . On attache ensuite cette cellule sur les  $n + 1$  cellules de dimension  $n - 1$  :
  - $(\tilde{\omega}_{n-1}, \dots, \tilde{\omega}_1)$
  - $(\tilde{\omega}_n, \dots, \tilde{\omega}_{i+1} \cdot \omega_i \dots \tilde{\omega}_1)$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n - 1\}$
  - $(\tilde{\omega}_n, \dots, \tilde{\omega}_2)$

Vous pourrez trouver plus amples informations et des exemples dans [Bus2].

**1.3 Comparaison des groupes fondamentaux.** J.C. Bustamente montre qu'il existe un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de la présentation d'une part et du complexe simplicial d'autre part dans le cas où la présentation est une présentation d'une algèbre triangulaire c'est-à-dire tel que le carquois n'ait pas de cycle orienté.

**1.4 Algèbre d'incidence associée à une présentation.** Considérons à présent l'ensemble  $P_{(Q, I)}$  contenant les  $n$ -cellules de  $\mathcal{B}(Q, I)$  et la relation d'ordre :  $c_1 < c_2$  si et seulement si  $c_1 \subset \overline{c_2}$  c'est-à-dire si  $c_2$  est attaché sur la cellule  $c_1$ . Ainsi  $P_{(Q, I)}$  est un poset. Alors :

**Théorème.** Soit  $(Q, I)$  une présentation d'une algèbre triangulaire et  $A_{(Q, I)}$  l'algèbre d'incidence associée à  $P_{(Q, I)}$ , alors les groupe fondamentaux, de la présentation  $(Q, I)$  d'une part et de l'algèbre d'incidence  $A_{(Q, I)}$  d'autre part sont isomorphes.

Remarquons que dans le cas où  $(Q, I)$  est la présentation d'un complexe, la présentation  $(\tilde{Q}, \tilde{I})$  est en quelque sorte la décomposition barycentrique de  $(Q, I)$  et le théorème précédent existe déjà (voir par exemple [Rey]).

**Preuve.** Commençons par introduire quelques notations que nous utiliserons dans la preuve. Notons  $(\tilde{Q}, \tilde{I})$  la présentation de l'algèbre d'incidence  $A_{(Q, I)}$  et  $\sim$  les relations d'équivalence sur les ensembles de promenades, utilisés pour construire les groupes fondamentaux. Définissons également la source et le terminus d'un  $n$ -uplet  $x = (\tilde{\alpha}_n, \dots, \tilde{\alpha}_1)$  par  $s(x) = s(\alpha_1)$  et  $t(x) = t(\alpha_n)$ .

Considérons  $f$  le morphisme de  $\mathcal{P}(Q)$  dans  $\mathcal{P}(Q)/\sim$  défini par :

1. si  $a$  est un sommet alors  $f(a) = a$

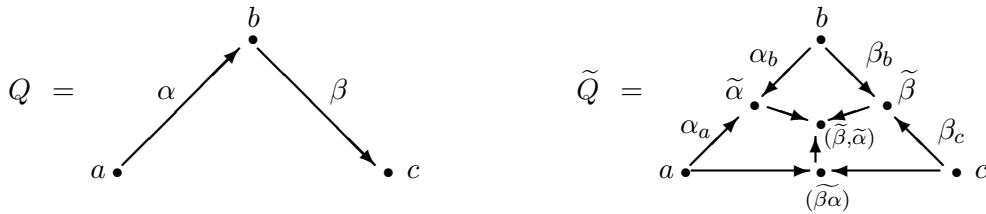
2. si  $\alpha$  est une flèche de  $a$  vers  $b$  alors  $a \leq \alpha$  et  $b \leq \alpha$ . Comme  $I$  est admissible,  $a$ ,  $b$  et  $\alpha$  ne sont pas dans  $I$  et sont donc des sommets dans  $\tilde{Q}$ . De plus, puisqu'aucun élément ne peut s'intercaler entre les membres des inéquations précédente, il existe des flèches  $\alpha_a$  et  $\alpha_b$  de  $\tilde{Q}$  reliant respectivement les sommets  $a$  à  $\alpha$  et  $b$  à  $\alpha$
3. Si  $\alpha_n^{\pm 1} \dots \alpha_1^{\pm 1}$  est une promenade alors  $f(\alpha_n^{\pm 1} \dots \alpha_1^{\pm 1}) = f(\alpha_n)^{\pm 1} \dots f(\alpha_1)^{\pm 1}$

Définissons également le morphisme  $g$  de  $\mathcal{P}(\tilde{Q})$  dans  $\mathcal{P}(Q)/\sim$  par :

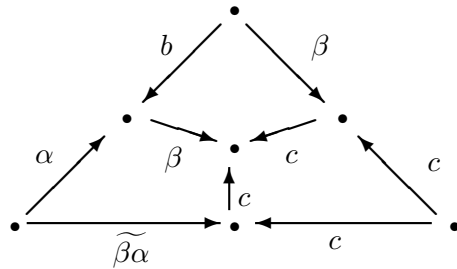
1. Si  $a$  est un sommet de  $\tilde{Q}$  alors  $g(a) = t(a)$ ; le terminus étant pris dans  $Q$ .
2. Si  $\alpha$  est une flèche du sommet  $a$  vers le sommet  $b = (\tilde{\alpha}_n, \dots, \tilde{\alpha}_1)$  alors  $g(\alpha) = t(a)$ , si  $t(a) = t(b)$  et  $g(\alpha) = \tilde{\alpha}_n$  sinon.

Nous allons montrer que ces deux morphismes  $f$  et  $g$  induisent deux morphismes respectivement de  $\Pi_1(Q, I)$  dans  $\Pi_1(\tilde{Q}, \tilde{I})$  et de  $\Pi_1(\tilde{Q}, \tilde{I})$  dans  $\Pi_1(Q, I)$  inverse l'un de l'autre, ce qui prouvera le théorème.

**Exemple d'action de  $f$  et  $g$ .** Commençons par donner un exemple d'action de  $f$  et  $g$  sur une présentation  $(Q, I)$  simple :



Ainsi  $f(\beta\alpha) = \beta_c^{-1}\beta_b\alpha_b^{-1}\alpha_a$ . Pour montrer l'action de  $g$  redessignons le graphe de  $\tilde{Q}$  en indiquant sur chaque flèche leur image par  $g$ . Ainsi :



Remarquons que quelque soit la promenade pris entre les sommets  $a$  et  $b$ , l'image de cette promenade est  $\tilde{\beta}\alpha$ .

**Suite de la preuve..** Montrons tout d'abord que  $f$  est constante sur les classes d'équivalence. Soit  $\alpha$  une flèche de  $a$  vers  $b$  alors

$$f(\alpha^{-1}\alpha) = (\alpha_b^{-1}\alpha_a)^{-1}\alpha_b^{-1}\alpha_a \sim a = f(a) \quad \text{et} \quad f(\alpha\alpha^{-1}) = \alpha_b^{-1}\alpha_a(\alpha_b^{-1}\alpha_a)^{-1} \sim b = f(b)$$

De plus, considérons  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$  une relation minimale de  $I$ . En particulier, aucun des  $\omega_i$  n'est dans  $I$  car cela contredirait le fait que la relation soit minimale et ainsi  $\tilde{\omega}_n = \dots = \tilde{\omega}_1$  est un sommet de  $\tilde{Q}$ . Montrons que pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , la promenade  $f(\omega_i)$  est homotope à la promenade :

$$s(\omega_i) \longrightarrow (\tilde{\omega}_i) \longleftarrow t(\omega_i)$$

qui est identique pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Fixons  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et posons  $\omega_i = \alpha_p \dots \alpha_1$ . Notons également  $a_k$  la source de  $\omega_k$  pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$  et  $a_{p+1}$  le terminus de  $\alpha_p$ . En d'autres termes  $\omega_i$  est le chemin suivant :

$$a_1 \xrightarrow{\alpha_1} a_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} a_p \xrightarrow{\alpha_p} a_{p+1}$$

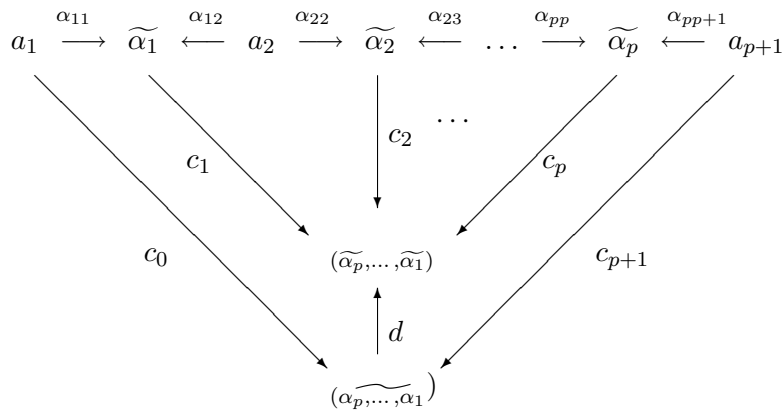
Ainsi  $f(\omega_i)$  vaut

$$a_1 \longrightarrow \widetilde{\alpha}_1 \longleftarrow a_2 \longrightarrow \widetilde{\alpha}_2 \longleftarrow \dots \longrightarrow \widetilde{\alpha}_p \longleftarrow a_{p+1}$$

De plus, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$ , on a :

1.  $a_1 < \widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$ , il existe donc un chemin  $c_0$  de  $\widetilde{Q}$  reliant  $a_1$  à  $\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$
2.  $a_{p+1} < \widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$ , il existe donc un chemin  $c_{p+1}$  de  $\widetilde{Q}$  reliant  $a_{p+1}$  à  $\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$
3.  $\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1 < \widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$ , il existe donc un chemin  $d$  de  $\widetilde{Q}$  reliant  $\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1$  à  $(\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1)$
4.  $\widetilde{\alpha}_k < (\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1)$  pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$ , il existe donc un chemin  $c_k$  de  $\widetilde{Q}$  reliant  $\widetilde{\alpha}_k$  à  $(\widetilde{\alpha}_p \dots \widetilde{\alpha}_1)$

Résumons la situation sur un schéma, en notant  $\alpha_{ij}$  à la place de  $\alpha_{ia_j}$  :



Ainsi

$$\begin{aligned} f(\omega_i) &= (\alpha_{pp+1}^{-1} \alpha_{pp}) \dots (\alpha_{23}^{-1} \alpha_{22}) \cdot (\alpha_{12}^{-1} \alpha_{11}) \\ &= \alpha_{pp+1}^{-1} (\alpha_{pp} \alpha_{p-1p}^{-1}) \dots (\alpha_{33} \alpha_{23}^{-1}) (\alpha_{22} \cdot \alpha_{12}^{-1}) \alpha_{11} \\ &\sim \alpha_{pp+1}^{-1} c_p^{-1} (c_p \alpha_{pp} \alpha_{p-1p}^{-1} c_{p-1}^{-1}) \dots (c_3 \alpha_{33} \alpha_{23}^{-1} c_2^{-1}) (c_2 \alpha_{22} \alpha_{12}^{-1} c_1^{-1}) c_1 \alpha_{11} \end{aligned}$$

or les chemins  $c_{i-1} \alpha_{i-1i}$  et  $c_i \alpha_{ii}$  sont parallèles pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, p\}$ , ainsi toutes les parenthèses sont équivalentes à un sommet. Donc  $f(\omega_i) \sim \alpha_{pp+1}^{-1} c_p^{-1} c_1 \alpha_{11}$ . Enfin  $c_1 \alpha_{11}$  et  $dc_0$  d'une part et  $c_p \alpha_{pp+1}$  et  $dc_{p+1}$  d'autre part sont parallèles. Il vient donc que  $f(x) \sim c_{p+1}^{-1} d^{-1} dc_0 \sim c_{p+1}^{-1} c_0$  d'où le résultat.

Montrons à présent que  $g$  est constante sur les classes d'équivalence. Soit  $c$  un chemin allant de  $a$  vers  $b$ . Posons  $b = (\widetilde{\alpha}_n, \dots, \widetilde{\alpha}_1)$ . Comme  $a$  correspond à une sous-cellule de  $b$ , il existe des entiers naturels  $k_1, \dots, k_p$  tels que :

$$a = \left( (\alpha_{k_p-1} \dots \alpha_{k_p-1}) \dots (\alpha_{k_2-1} \dots \alpha_{k_1}) \right)$$

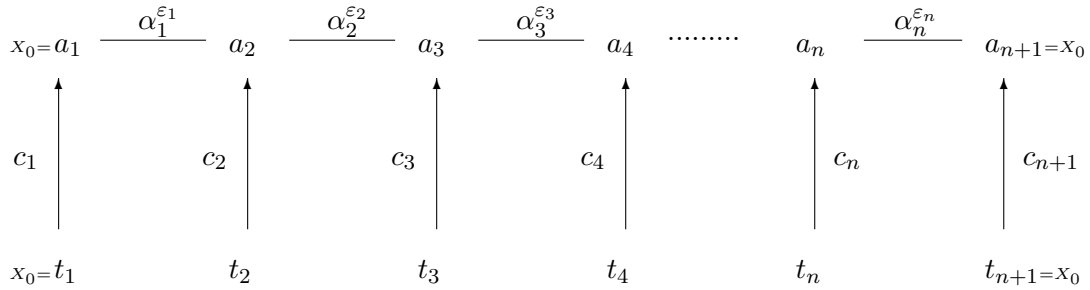
Chaque fois que l'on franchit une flèche en direction de  $b$ , le sommet d'arrivée de la flèche peut être obtenu à partir du sommet de départ de 3 manières différentes :

1. Une classe du type  $\widetilde{\alpha}_{k_q-1} \dots \alpha_{k_q-1}$  du sommet de départ se scinde en 2 classes du même type. Dans ce cas, l'image de cette flèche par  $g$  ne donne qu'un sommet.
2. On ajoute une classe à droite. Dans ce cas là encore, l'image de cette flèche est un sommet.
3. On ajoute une classe à gauche. Dans ce cas, l'image par  $g$  de cette flèche est exactement cette classe.

Ainsi en arrivant en  $b$ , on obtient  $f(c) = \widetilde{\alpha}_n \dots \widetilde{\alpha}_{k_p}$ . Toutes les images des chemins reliant  $a$  à  $b$  sont identiques et  $g$  est constante sur les classes d'équivalence.

Les morphismes  $f$  et  $g$  induisent donc des morphismes  $f^*$  et  $g^*$  entre les espaces quotients  $\mathcal{P}(Q)/\sim$  et  $\mathcal{P}(\tilde{Q})/\sim$ . Montrons dans un premier temps que  $g^* \circ f^* = Id$ . Considérons  $\alpha$  une flèche de  $Q$  allant du sommet  $a$  au sommet  $b$ , alors en identifiant  $\alpha$  et sa classe d'équivalence, on obtient  $f^*(\alpha) = \alpha_b^{-1} \alpha_a$ . Comme  $\alpha$  et  $b$  ont le même terminus, on a  $g^*(\alpha_b) = b$ . De plus, comme  $\alpha$  n'est pas un cycle, l'algèbre  $kQ/I$  étant triangulaire, la flèche  $\alpha$  et le sommet  $a$  n'ont pas le même terminus dans  $Q$ , donc  $g^*(\alpha_a) = \alpha$ . Ainsi  $g^*(f^*(\alpha)) = \alpha$ .

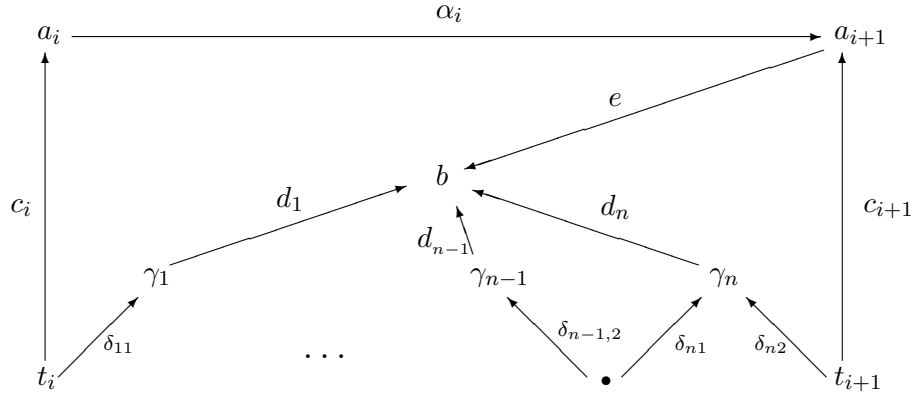
Soit  $x_0$  un sommet de  $Q$ , c'est donc également un sommet de  $\tilde{Q}$ . Restreignons à présent  $f^*$  et  $g^*$  à l'ensemble des classes de promenades fermées en  $x_0$ . Ces morphismes sont donc des morphismes entre  $\Pi_1(Q, I)$  et  $\Pi_1(\tilde{Q}, \tilde{I})$ . Montrons que  $f^* \circ g^* = Id$ . Pour cela, considérons la promenade  $\omega = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$  fermée en  $x_0$  et notons  $a_i = s(\alpha_i^{\varepsilon_i})$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  et  $a_{n+1} = t(\alpha_n^{\varepsilon_n})$ ; les sources et terminus étant pris dans  $\tilde{Q}$ . Pour chaque sommet  $a_i$ , notons  $t_i$  le terminus de  $a_i$  dans le carquois  $Q$ , c'est donc également un sommet dans  $\tilde{Q}$ , alors il existe un chemin  $c_i$  reliant  $t_i$  à  $a_i$ . Par exemple si  $a_i = (\tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ , il suffit de prendre pour  $c_i$  le chemin passant par les sommets  $t_i, \tilde{\beta}_m, (\tilde{\beta}_m, \tilde{\beta}_{m-1}), \dots, (\tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ . La situation est résumée dans le schéma suivant :



Ainsi, en remarquant que les chemins  $c_1$  et  $c_{n+1}$  sont triviaux car la promenade est fermée en  $x_0$ , on obtient :

$$w \sim (c_{n+1} \alpha_n^{\varepsilon_n} c_n^{-1}) (c_n \alpha_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} c_{n-1}^{-1}) \dots (c_3 \alpha_2^{\varepsilon_2} c_2^{-1}) (c_2 \alpha_1^{\varepsilon_1} c_1^{-1})$$

Soit  $i$  fixé dans  $\{1, \dots, n\}$ . Supposons de plus que  $\varepsilon_i = 1$ ; la démonstration étant identique dans le cas où  $\varepsilon_i = -1$  en intervertissant le rôle de  $a_i$  et  $a_{i+1}$ . Si  $t(a_i) = t(a_{i+1})$  dans  $Q$  alors les chemins  $\alpha_i c_i$  et  $c_{i+1}$  sont parallèles. la promenade  $c_{i+1} \alpha_i c_i^{-1}$  est donc équivalente à  $t(a_i)$ . Maintenant, considérons le cas où  $t(a_i) \neq t(a_{i+1})$  et notons  $a_i = (\tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ . Le sommet  $a_{i+1}$  est donc de la forme  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ . Notons de plus  $\gamma = \gamma_p \dots \gamma_1$  un représentant de  $\tilde{\gamma}$  et  $b$  le sommet  $(\tilde{\gamma}_p, \dots, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ . Remarquons qu'il existe dans  $\tilde{Q}$  un chemin  $d_i$  reliant  $\gamma_i$  à  $b$ . Il existe également un chemin  $e_1$  allant de  $a_{i+1}$  à  $b$ ; par exemple le chemin passant par les sommets :  $((\gamma_m \dots \gamma_1), \tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1), (\tilde{\gamma}_m, (\gamma_{m-1} \dots \gamma_1), \tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1), \dots, (\tilde{\gamma}_m, \tilde{\gamma}_{m-1}, \dots, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_m, \dots, \tilde{\beta}_1)$ . De même il existe un chemins  $e_2$  allant de  $a_i$  à  $b$ . Notons enfin  $s_i$  la source de  $\gamma_i$  dans  $Q$ , il existe donc une flèche  $\delta_{i1}$  et  $\delta_{i2}$  de  $\tilde{Q}$  reliant respectivement la source et le but de  $\gamma_i$  à  $\gamma_i$ . Résumons la situation par un schéma, où les flèches représentent en fait des chemins :



Ainsi, en utilisant que les chemins parallèles sont équivalents, on obtient :

$$c_{i+1}^{-1} \alpha_i c_i \sim c_{i+1}^{-1} e^{-1} d_1 \delta_{11} \sim \delta_{n2}^{-1} d_n^{-1} d_1 \delta_{11} \sim \delta_{n2}^{-1} (\delta_{n1} \delta_{n-1,2} d_{n-1}^{-1}) d_1 \delta_{11} \sim \dots \sim (\delta_{n2}^{-1} \delta_{n1}) \dots (\delta_{22}^{-1} \delta_{21}) (\delta_{12}^{-1} \delta_{11})$$

Il suffit ensuite de remarquer que l'expression de droite appartient à la classe de  $f(\gamma)$ . De plus  $g(\alpha_i)$  est égal à la classe de  $\gamma$ , ainsi  $f^*(g^*(\tilde{\omega})) = \tilde{\omega}$ .

**Contr-exemple.** Remarquons que le théorème est faux si l'algèbre n'est pas triangulaire. Par exemple, considérons le carquois ne contenant un seul sommet  $a$  et une seule boucle  $\alpha$  avec  $I = 0$ . Alors  $\tilde{Q}$  est le carquois  $a \longrightarrow \alpha$  et les deux groupes fondamentaux sont différents.

## 2. Le $n$ -groupe d'homotopie algébrique d'une algèbre d'incidence.

**2.1 Les  $N$ -matrices de promenade.** Définissons dans un premier temps la notion de matrices de promenade qui permettra de définir le groupe fondamental algébrique. Soit  $(Q, I)$  une présentation d'une algèbre et  $N, n_1, n_2, \dots, n_N$  des entiers naturels. Notons par  $Q_0$  les sommets de  $Q$ . Une  $N$ -matrice de  $(Q, I)$  de taille  $(n_1, \dots, n_N)$  est une matrice à  $N$  dimensions de sommet de  $Q$  c'est-à-dire une application  $f$  :

$$f : \begin{array}{ccc} [[1, n_1]] \times [[1, n_2]] \times \dots \times [[1, n_N]] & \rightarrow & Q_0 \\ (i_1, i_2, \dots, i_N) & \mapsto & f(i_1, i_2, \dots, i_N) \end{array}$$

où  $[[1, n]]$  désigne l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Par convention, les 0-matrices seront les matrices ne contenant qu'un seul sommet. Une  $N$ -matrice est dite une matrice de promenade si pour tout  $N$ -uplet  $(i_1, \dots, i_N)$  d'entiers naturels il existe un chemin tel que les sommets  $f(j_1, \dots, j_N)$  avec  $i_k \leq j_k \leq i_k + 1$  soient tous dans ce chemin. En d'autres termes les sous-matrices de taille  $(2, 2, \dots, 2)$  de  $f$  ne contiennent que des sommets appartenant un chemin. Notons  $\mathcal{M}_N(Q)$  l'ensemble des  $N$ -matrices de promenade.

Généralisons à présent les notions de source et terminus pour les promenades. Pour cela, notons par  $s_1, \dots, s_N$  les applications sources et par  $t_1, \dots, t_N$  les applications buts définies de  $\mathcal{M}_N(Q)$  dans  $\mathcal{M}_{N-1}(Q)$  par :

$$\begin{cases} s_i(M)(x_1, \dots, x_N) & = M(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_N) \\ t_i(M)(x_1, \dots, x_N) & = M(x_1, \dots, x_{i-1}, n, x_i, \dots, x_N) \end{cases}$$

pour tout  $(N + 1)$ -matrice  $M$  et pour tout  $x_1, \dots, x_N$  tels que les expressions précédentes aient un sens ; l'entier  $n$  étant la dimension de la matrice  $M$  suivant la  $i^{\text{ème}}$  composante. Par convention on pose  $s = s_N$  et  $t = t_N$  et lorsque l'on par de source et terminus, il s'agit des images par  $s$  et  $t$  dont il s'agit.

Deux  $N$ -matrices  $M$  et  $M'$  sont dites égales sur le bord si  $s_i(M) = s_i(M')$  et  $t_i(M) = t_i(M')$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, N\}$ .

**Exemple 1.** Les 1-matrices de promenade peuvent être représentées par des matrices lignes où deux sommets successifs sont des sommets d'un même chemin.

**Exemple 2.** Les 2-matrices peuvent être représentées par des matrices conventionnelles. Ainsi la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

est une 2-matrice de promenade de taille  $(3, 3)$  si et seulement s'il existe des chemins  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et  $\omega_4$  contenant respectivement les sommets  $\{a, b, d, e\}$ ,  $\{d, e, g, h\}$ ,  $\{b, c, ef\}$  et  $\{e, f, h, i\}$ .

Définissons à présent l'opération sur les  $N$ -matrices de promenade qui deviendra la loi de composition interne du  $N^{\text{ième}}$  groupe fondamental. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux  $N$ -matrices de tailles respectives  $(n_1, \dots, n_N)$  et  $(n'_1, \dots, n'_N)$  telles que  $t(M_1) = s(M_2)$ . En particulier on a  $n_k = n'_k$  pour  $k$  inférieur ou égal à  $N - 1$ . Notons alors  $M_1 \times M_2$  la matrices obtenues en "empilant" les deux matrices sur la dernière dimension et en supprimant la  $(N - 1)$ -matrice commune c'est-à-dire :

$$M_1 \times M_2(x_1, \dots, x_{N-1}, t) = \begin{cases} M_1(x_1, \dots, x_{N-1}, t) & \text{si } t \in \{1, \dots, n_N\} \\ M_2(x_1, \dots, x_{N-1}, t - n_N + 1) & \text{si } t \in \{n_N + 1, \dots, n_N + n'_N - 1\} \end{cases}$$

pour tout  $x_1, \dots, x_{N-1}$  tels que les expressions précédentes aient un sens.

On définit aussi une autre opération sur les  $N$ -matrices. Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux  $N$ -matrices de promenade de dimension commune  $(n_1, \dots, n_N)$ . Notons par  $M = [M_1, M_2]$  la  $(N + 1)$ -matrice définie par  $M(\dots, 1) = M_1(\dots)$  et  $M(\dots, 2) = M_2(\dots)$ . Remarquons qu'en général  $[M_1, M_2]$  n'est pas une matrice de promenade.

**Exemple de produit.**

1.  $(a \ b \ c) \times (c \ d \ e) = (a \ b \ c \ d \ e)$
2.  $[(a \ b \ c), (c \ d \ e)] = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & e \end{pmatrix}$

**2.2 Le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental.** Construisons maintenant une relation d'équivalence sur les  $N$ -matrice de promenade. Pour cela raisonnons par récurrence sur  $N$ . Si  $N = 0$  deux matrices de promenade sont équivalentes si elles ont identiques. Supposons que la construction de  $\sim$  sur  $\mathcal{M}_{N-1}(Q)$  pour  $N$  fixé dans  $\mathbb{N}^*$ . La relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathcal{M}_N(Q)$  est alors la plus petite relation d'équivalence vérifiant :

1. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux  $N$ -matrices de promenade de même taille  $(n_1, \dots, n_N)$ . S'il existe une  $N + 1$ -matrice de promenade  $F$  de source  $M_1$  et de terminus  $M_2$  telle que les  $N$ -matrices  $F(\dots, t)$  pour tout entier  $t$  de  $\{1, \dots, n_N\}$  aient toutes le même bord alors  $M_1$  et  $M_2$  sont équivalentes.
2. Soit  $M$  une  $N$ -matrice de promenade de taille  $\{n_1, \dots, n_N\}$ . Considérons  $M'$  la matrice obtenu à partir de  $M$  en supprimant un hyperplan de sommet c'est-à-dire de façon plus formel qu'il existe  $i$  dans  $\{1, \dots, N\}$  et  $k$  dans  $\{1, \dots, n_i\}$  telle que

$$M'(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} M(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) & \text{si } 1 \leq x_i < k \\ M(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_N) & \text{si } k \leq x_i \leq n_i - 1 \end{cases}$$

et telle que pour tout  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  de  $\{0, 1\}$  on ait :

$$M(1 + \varepsilon_1(n_1 - 1), \dots, 1 + \varepsilon_N(n_N - 1)) = M'(1 + \varepsilon_1(n'_1 - 1), \dots, 1 + \varepsilon_N(n'_N - 1))$$

où  $(n'_1, \dots, n'_N)$  désigne la dimension de  $M'$ . Si  $M'$  ainsi construit est également une matrice de promenade et que toutes les sources et terminus de la matrice  $M$  soient équivalentes à celle de  $M'$  alors  $M$  et  $M'$  sont équivalente.

Remarquons tout d'abord, si l'hyperplan choisi se trouve à l'intérieur c'est-à-dire si  $2 \leq k \leq n_i - 1$ , et que la matrice  $M'$  est une matrice de promenade alors  $M$  et  $M'$  sont équivalentes. En effet, enlever un hyperplan de sommet à  $M$ , revient soit à enlever un hyperplan aux sources et terminus de  $M$  soit à les laisser inchangés. De plus, si  $N = 1$ , enlever un hyperplan de sommet ne change pas la source et le terminus, ainsi, par récurrence simple, on trouve que  $M \sim M'$ .

Remarquons de plus, que cette relation d'équivalence est compatible avec l'opération  $\times$  précédemment définie. Par ailleurs, elle est complètement définie sur l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{M}_N^x(Q)/\sim$  où  $\mathcal{M}_N^x(Q)$  désigne l'ensemble des matrices de promenades dont le bord est constamment égale au sommet  $x$  de  $Q$ . C'est ainsi que nous définissons le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental d'une présentation  $(Q, I)$  d'une algèbre d'incidence  $A$  :

$$\Pi_n(A) = (\mathcal{M}_N^x(Q) / \sim, \times)$$

Si  $Q$  est connexe, ce que nous supposons dorénavant, le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental ne dépend pas du sommet  $x$  choisi. Le fait que  $\Pi_n(A)$  soit un groupe peut être vu comme une conséquence du théorème du paragraphe suivant.

**2.3 Complexe simplicial et Algèbre d'incidence.** C'est le résultat du théorème suivant qui a motivé l'appellation de l'espace  $\mathcal{M}_N^x(Q)/\sim$  : le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental.

**Théorème.** Soit  $(Q, I)$  la présentation d'une algèbre d'incidence  $A$ , et notons  $C$  son complexe simpliciale associé. Alors

$$\Pi_n(A) \simeq \Pi_n(C)$$

Comme nous savons déjà que le groupe fondamental  $\Pi_1(Q, I)$  défini avec les promenades est isomorphe au groupe fondamental topologique  $\Pi_1(C)$  (voir par exemple [Rey] ou [Bus]), nous pouvons en déduire que la nouvelle définition du premier groupe fondamental d'une algèbre d'incidence coïncide avec la précédente. La preuve de ce théorème s'inspire de la démonstration du théorème d'approximation des complexes simpliciaux. Nous allons donc dans un premier temps rappeler quelques définitions et quelques résultats qui nous seront utiles.

Rappelons tout d'abord que tout élément  $x$  dans la réalisation  $|C|$  d'un complexe simpliciale  $C$  il n'existe qu'une seule face contenant  $x$ . Celle-ci est appelée la face porteuse. De plus deux fonctions  $f$  et  $g$  définies de  $[0, 1]^n$  dans la réalisation géométrique  $|C|$  d'un complexe simpliciale sont dites  $C$  approximées si pour tout  $x$  de  $[0, 1]^n$ , il existe une face  $s$  de  $C$  telle que  $f(x)$  et  $g(x)$  soient inclus dans l'adhérence de  $s$ . Nous savons de plus que deux applications  $C$ -approximées sont homotopes (voir par exemple [Hil] p102). Définissons également, pour tout sommet  $a$  d'un complexe simplicial, l'étoile de  $a$  noté  $st(a)$ , comme étant la réunion des faces ayant  $a$  pour sommet. Lorsque  $Q$  est fini, la réalisation  $|st(a)|$  d'une étoile  $st(a)$  est un ouvert dans  $|C|$  (voir [Hil] p 102) et  $\bigcap_{i \in I} |st(a_i)| \neq \emptyset$  si et seulement si les  $(a_i)_{i \in I}$  sont sur un même simplexe (voir [Hil] p.92).

De plus, notons  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  le polyèdre obtenu à partir de  $[0, 1]^n$  en le découpant suivant chaque dimension  $i$  en  $n_i$  morceaux égaux. Plus précisément :

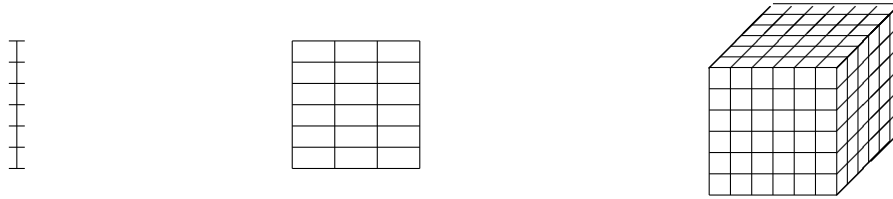
1. les sommets sont les points de coordonnées  $\left( \frac{k_1}{n_1}, \frac{k_2}{n_2}, \dots, \frac{k_N}{n_N} \right)$  avec  $k_i$  dans  $\{0, \dots, n_i\}$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,
2. Les 1-faces sont les segments reliant deux sommets dont les coordonnées sont toutes identiques sauf en une composante  $i$  où elle diffère de  $\frac{1}{n_i}$ ,



3. Les 2-faces sont délimités par 4 arêtes formant un carrée,
4. Les 3-faces sont délimités par 12 arêtes formant un cube, etc...

Nous ferons, comme dans le cas des complexes simpliciaux, la différence entre  $C_x^N$ , avec  $x = (n_1, \dots, n_N)$ , le polyèdre théorique c'est-à-dire l'ensemble contenant les sommets et des informations permettant de déterminer les faces, et  $|C_x^N|$  la réalisation géométrique de  $C_x^N$ . Nous noterons également pour plus de commodité  $C_n^N = C_{(n, n, \dots, n)}^N$ . Nous étendons également les définitions de l'étoile d'un sommet et de face porteuse aux polyèdres de ce type.

**Exemple.** Par exemple les 3 polyèdres suivants représentent respectivement  $C_6^1$ ,  $C_{(6,3)}^2$  et  $C_6^3$



Nous désignerons aussi par morphisme de  $C_x^N$  dans le complexe simpliciale  $C$ , avec  $x = (n_1, \dots, n_N)$  toute application  $u$  conservant les faces, c'est-à-dire si les sommets  $a_1, \dots, a_m$  sont sur une même face de  $C_x^N$  alors  $u(a_1), \dots, u(a_m)$  sont sur un même simplexe de  $C$ . Remarquons tout d'abord que tout morphisme  $u$  de  $C_x^N$  dans  $C$  définit de manière unique une  $N$ -matrice de promenade et inversement puisque que les sommets des simplexes de  $C$  sont des sommets du carquois  $Q$  dont il provient appartenant à un même chemin.

Pour tout morphisme  $u$  de  $C_x^N$  dans  $C$ , nous allons construire une application continue de  $|C_x^N|$  dans  $|C|$  telle que si  $a_1, \dots, a_p$  sont les sommets de la face porteuse de  $x$  dans  $C_x^N$  alors  $|u|(x)$  est à l'intérieur du simplexe  $\{u(a_1), \dots, u(a_p)\}$ . Moralement si  $x$  est sur une face  $s$  de  $|C_x^N|$  alors  $|u|(x)$  est sur l'image de  $s$  par  $u$ . Pour cette construction raisonnons par récurrence. Si  $N = 0$ , le polyèdre  $C_x^N$  contient un seul sommet  $a$  et le morphisme  $|u|$  est défini par  $|u|(a) = u(a)$ . Supposons le résultat acquis pour  $N$  fixé et montrons le pour  $N + 1$ . Soit  $u$  un morphisme de  $C_{(n_1, \dots, n_{N+1})}^{N+1}$  dans  $C$ . Notons pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n_{N+1}\}$  :

$$u_k(x_1, \dots, x_n) = u\left(x_1, \dots, x_n, \frac{k}{n_{N+1}}\right)$$

Les applications  $u_k$  sont des morphismes de  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  dans  $C$ , il existe donc, d'après l'hypothèse de récurrence une application  $|u_k|$ . Prolongeons entre les  $|u_k|$  linéairement suivant la dernière variable. Plus précisément, posons :

$$|u|\left(x_1, \dots, x_n, \frac{k+t}{n}\right) = |u_k|(x_1, \dots, x_n) \times (1-t) + |u_{k+1}|(x_1, \dots, x_n) \times t$$

où  $k$  est un entier,  $t$  un réel compris entre 0 et 1, et  $x_1, \dots, x_n$  des réels de  $[0, 1]$ . Nous allons montrer que l'application  $u \mapsto |u|$  induit en fait un isomorphisme de groupe entre les groupes fondamentaux. Pour cela démontrons et rappelons quelques lemmes qui nous seront utiles.

**Lemme 1 - nombre de Lebesgue -.** Soit  $X$  un compact métrique et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouvert de  $X$ , alors il existe  $\delta$  (nombre de Lebesgue) tel que tout ensemble contenu dans  $X$  de diamètre inférieur à  $\delta$  est inclus dans l'un des  $U_i$  (voir par exemple [Mau], p.20)

**Lemme 2.** Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]^N$  dans  $|C|$  où  $C$  est un complexe simplicial, alors il existe  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n'$  entier supérieur à  $n$  il existe un morphisme  $u$  de  $C_{n'}^N$  dans  $C$  tel que  $|u|$  et  $f$  sont homotopes.

**Preuve.** Comme tout simplexe admet au moins un sommet comme face, on a :

$$|C| = \bigcup_{a \in C_0} |St(a)|$$

où  $C_0$  désigne l'ensemble des sommets de  $C$ . Ainsi :

$$[0, 1]^N = f^{-1}(|C|) = f^{-1}\left(\bigcup_{a \in C_0} |St(a)|\right) = \bigcup_{a \in C_0} f^{-1}(|St(a)|)$$

Ainsi, les ensembles  $(f^{-1}(|St(a)|))_{a \in C_0}$  sont ouverts car  $f$  est continue et forment un recouvrement du compact  $[0, 1]^N$ . D'après le lemme 1, il existe  $\delta$  tel que tout sous-ensemble de diamètre inférieur à  $\delta$  est inclus dans l'un de ces ouverts. Choisissons  $n$  de façon à avoir  $diam(|st(b)|) < \delta$  pour tout sommet  $b$  de  $C_n^N$ . Donc pour tout entier  $n'$  supérieur à  $n$  l'inégalité  $diam(|st(b)|) < \delta$  est encore vrai pour tout  $b$  de  $C_{n'}^N$ . Ainsi pour tout sommet  $b$  de  $C_{n'}^N$ , il existe un sommet  $a$  tel que :  $|st(b)| \subset f^{-1}(|st(a)|)$ . Posons  $u(b) = a$ . On a donc, pour tout sommet de  $C_{n'}^N$  :

$$f(|st(b)|) \subset |st(u(b))|$$

Montrons que  $u$  est un morphisme de  $C_{n'}^N$  dans  $C$ . Pour cela il suffit de voir que les images des sommets d'une même face sont dans un même simplexe. Soit  $a_1, \dots, a_p$  les sommets d'une face, donc  $\bigcap_{i=1}^p |st(a_i)| \neq \emptyset$  et ainsi :

$$\emptyset \neq f\left(\bigcap_{i=1}^p |st(a_i)|\right) \subset \bigcap_{i=1}^p f(|st(a_i)|) \subset \bigcap_{i=1}^p |st(u(a_i))|$$

Et ainsi  $u(a_1), \dots, u(a_p)$  sont sur une même face.

Il reste à montrer que  $|u|$  et  $f$  sont homotopes. Pour cela, il suffit de montrer qu'ils sont  $C$ -approximés. Soient  $x$  dans  $C_{n'}^N$  et  $a_1, \dots, a_p$  les sommets de sa face porteuse. Comme  $x$  appartient à  $\bigcap_{i=1}^p |st(a_i)|$ , il vient que :

$$f(x) \in f\left(\bigcap_{i=1}^p |st(a_i)|\right) \subset \bigcap_{i=1}^p f(|st(a_i)|) \subset \bigcap_{i=1}^p |st(u(a_i))|$$

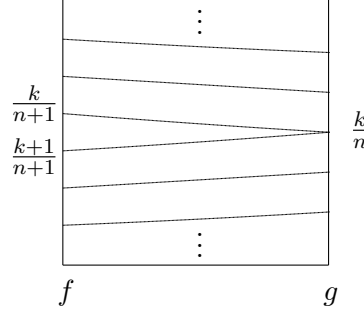
Notons  $s$  la face porteuse de  $f(x)$ . Le calcul précédent permet de déduire que les  $u(a_i)$ , avec  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$ , sont dans  $\bar{s}$ . De plus par construction de  $|u|$  à partir de  $u$ , l'image de  $x$  par  $|u|$  est dans le simplexe formé par les  $u(a_i)$  et donc dans  $\bar{s}$ . Ainsi  $f(x)$  et  $|u|(x)$  appartiennent tout deux à l'adhérence  $\bar{s}$  de la face porteuse de  $f(x)$ , les applications  $|u|$  et  $f$  sont donc  $C$ -approximés et donc homotopes.

**Preuve du théorème.** Rappelons qu'à chaque  $N$ -matrice de promenade  $M$ , on peut lui associer un morphisme de  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  dans  $C$  et inversement. De plus, les produits sur ces deux ensembles coïncident.

Notons par  $\phi$  l'application de  $\mathcal{M}_N(Q)$  dans  $Hom\left(\left|C_{(n_1, \dots, n_N)}^N\right|, |C|\right)$  définie par  $\phi(M) = |u|$ , où  $u$  représente le morphisme de  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  dans  $C$  associé à  $M$ . Montrons tout d'abord que les images par  $\phi$  de  $N$ -matrices équivalentes sont homotopes. Il suffit de vérifier cela sur les générateurs de la relation d'équivalence. Pour cela considérons  $M$  et  $M'$  des  $N$ -matrices de promenades ayant des bords identiques et tels que  $[M, M']$  soit une  $(N+1)$ -matrice. Notons également  $u$  et  $u'$  les morphismes de  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  dans  $C$  correspondant respectivement aux matrices  $M$  et  $M'$  et montrons que  $|u|$  et  $|u'|$  sont homotopes. Pour cela il suffit de voir que  $[|u|, |u'|]$  définit une fonction d'homotopie faisant passer de  $|u|$  à  $|u'|$ . Ainsi  $|u|$  et  $|u'|$  sont  $C$ -homotopes. Quant à la deuxième relation engendrant la relation d'équivalence, par symétrie suivant les dimensions, on peut se contenter de montrer que :

$$|[M_1, \dots, M_k, M, M_{k+1}, \dots, M_n]| \sim |[M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n]|$$

Remarquons tout d'abord que  $[[M_1, \dots, M_k, M, M_{k+1}, \dots, M_n]] \sim [[M_1, \dots, M_k, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n]]$  car ces deux matrices forment une  $(N+1)$ -matrice de promenade et leur images sont homotopes en utilisant le point précédent. Notons  $f = [[M_1, \dots, M_k, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n]]$  et par  $g = [[M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n]]$ , et montrons que  $f$  et  $g$  sont homotopes. Pour cela il suffit de rapprocher continûment les deux  $M_k$ . En regardant suivant la dernière dimension, on peut schématiser le processus par :



De façon plus formel il suffit de considérer la fonction  $\psi$  définie de la façon suivante :

$$\psi(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_{n-1}, & x_n \cdot (1-t) + x_n \cdot t \cdot \frac{n+1}{n} & ) & \text{si } x \leq \frac{k}{n+1} \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, & x_n \cdot (1-t) + t \cdot (1 - (1-x_n) \cdot \frac{n+1}{n}) & ) & \text{si } x \geq \frac{k+1}{n+1} \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, & x_n \cdot (1-t) + t \cdot \frac{k}{n} & ) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi  $\phi$  induit une application  $\phi^*$  de  $\mathcal{M}_N(Q)/\sim$  dans  $C^0([0,1]^N, |C|)/\sim$ . Montrons que  $\phi^*$  est injective. Pour cela considérons deux  $N$ -matrices  $M_1, M_2$  et notons par  $u_1, u_2$  les morphismes de  $C_{(n_1, \dots, n_N)}^N$  dans  $C$  associés à  $M_1$  et  $M_2$ . Supposons de plus que  $|u_1|$  et  $|u_2|$  soient homotopes. Nous allons montrer que  $M_1$  et  $M_2$  sont équivalentes. Remarquons tout d'abord que, quitte à rajouter des hyperplans aux matrices  $M_1$  et  $M_2$ , on peut supposer qu'elles sont de même taille et carré, c'est-à-dire que les tailles suivant toutes les dimensions sont égales. Notons  $n$  cette taille.

Comme  $|u_1|$  et  $|u_2|$  soient homotopes, il existe une application continue  $f$  de  $[0,1]^{N+1}$  dans  $|C|$  vérifiant pour tout  $x_1, \dots, x_N$  de  $[0,1]$  :

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_N, 0) = |u_1|(x_1, \dots, x_N) \\ f(x_1, \dots, x_N, 1) = |u_2|(x_1, \dots, x_N) \\ f(x_1, \dots, x_N, t) = |u_1|(x_1, \dots, x_N) = |u_2|(x_1, \dots, x_N) & \text{si l'un des } x_i \text{ vaut 0 ou 1.} \end{cases}$$

D'après le lemme 2, il existe donc un entier  $m$  et un morphisme  $u$  de  $C_m^{N+1}$  dans  $C$  tel que  $|u|$  et  $f$  soient homotopes. D'après le lemme toujours, on peut choisir  $m$  quelconque à condition d'être assez grand. On peut donc supposer que  $m$  est un multiple de  $n$ . Posons  $u'_1(x_1, \dots, x_N) = u(x_1, \dots, x_N, 0)$  et  $u'_2(x_1, \dots, x_N) = u(x_1, \dots, x_N, 1)$ . Comme  $u'_1 \sim u'_2$ , il suffit de montrer que  $u_1 \sim u'_1$  et  $u_2 \sim u'_2$ . Les deux assertions se montrant de la même manière, montrons uniquement la première.

Comme  $|u_1| = f(\dots, 0) = |u'_1|$ , les morphismes  $u_1$  et  $u_2$  ont même image sur les sommets communs à  $C_n^N$  et  $C_m^N$  donc sur  $C_n^N$  puisque  $m$  est un multiple de  $n$ . En effet, par construction de  $|u_1|$  (resp.  $|u'_1|$ ), pour tout sommet  $a$  du polyèdre,  $u_1(a)$  (resp.  $u'_1(a)$ ) et de  $|u_1|(a)$  (resp.  $|u'_1|(a)$ ) sont identiques. Ainsi  $u'_1$  est obtenu à partir de  $u_1$  en insérant un nombre fixe (égal à  $m/n-1$ ) d'hyperplans de sommets entre chaque hyperplan existant. Par exemple si  $N = 2$  et  $m = 3n$ , le dessin est le suivant, les sommets entourés étant ceux de  $u_1$  les autres ceux de  $u'_1$ .

$$\begin{pmatrix} \textcircled{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \textcircled{a_{14}} & a_{15} & a_{16} & \textcircled{a_{17}} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & \dots \\ \textcircled{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & \textcircled{a_{44}} & a_{45} & a_{46} & \textcircled{a_{47}} & & \\ & & & \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

Pour montrer que  $u_1$  et  $u'_1$  sont équivalents, il suffit de montrer que tous les sommets de  $C_m^N$  contenus dans une même  $N$ -face de  $C_n^N$  appartiennent à un même simplexe. Soit  $b$  un sommet de  $C_m^N$  dans une face  $C_n^N$  d'arêtes  $a_1, \dots, a_p$ . Par construction de  $|u_1|$ , il vient que  $|u_1|(b)$  appartient au simplexe  $s$  de sommets  $u_1(a_1), \dots, u_1(a_p)$ . Ainsi

$$u'_1(b) = |u'_1(b)| = |u_1(b)| \in s$$

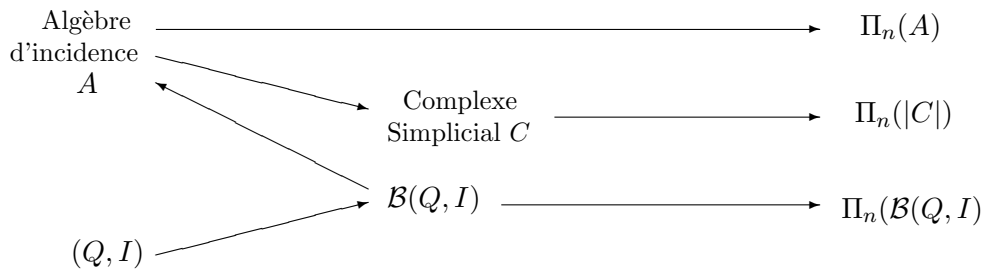
Ainsi  $\phi^*$  est injective. De plus le lemme 2 prouve que  $\phi^*$  est surjective. Enfin, restreignons l'ensemble de départ aux  $N$ -matrices de promenade à bord constant égal au sommet  $x$ . Le produit  $\times$  partiellement définie sur  $\mathcal{M}_N(Q)$  devient un loi interne et l'application  $\phi^*$  devient un morphisme de groupe et donc un isomorphisme.

**2.4 Cas où le poset est infini.** Peut-on étendre le théorème précédent dans le cas des posets infinis? Dans certains cas oui. Plus précisément, si les sous-ensembles totalement ordonnés du poset sont de dimension finie, alors les groupes fondamentaux, algébrique et topologique, sont isomorphes.

Rappelons dans un premier temps la construction de la réalisation géométrique  $|C|$  d'un complexe simplicial infini  $C$ ; notons  $C_0$  l'ensemble des sommets de  $C$ . Les simplexes des complexes simpliciaux considérés contiendront tous un nombre fini de sommets. Dans un premier temps, décrivons les point de  $|C|$ , nous en donnerons la topologie ensuite. Les points de  $|C|$  sont les familles  $(\lambda_i)_{i \in C_0}$  de  $[0, 1]$ , où les indices  $i$  non nuls sont inclus dans un même simplexe, vérifiant  $\sum_{i \in C_0} \lambda_i = 1$ . Notons que cette dernière égalité a un sens puisque l'ensemble des  $\lambda_i$  non nuls est fini. A chaque simplexe  $s = (a_1, \dots, a_n)$  correspond un sous-ensemble  $\bar{s}$  de  $|C|$  formé par les points  $(\lambda_i)_{i \in I}$  tels que  $\lambda_i = 0$  si  $i$  n'est pas dans  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . L'injection  $f$  définie de  $\bar{s}$  dans  $\mathbb{R}^n$  par  $b((\lambda_i)_{i \in C_0}) = (\lambda_{a_1}, \dots, \lambda_{a_n})$  permet de transporter le topologie de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\bar{s}$ . Enfin, déterminons la topologie de  $|C|$  en décrivant ses sous-ensembles fermés : un sous ensemble  $A$  de  $|C|$  est dit fermé si et seulement si  $A \cap \bar{s}$  est un fermé dans  $\bar{s}$  pour tout simplexe  $s$  de  $C$ . Cette construction de la réalisation géométrique coïncide, dans le cas où le complexe simplicial est fini, à la définition existante (Voir [H-W], p 46). Dans le cas des complexes simpliciaux infinis, la notion de  $st(a)$  pour un sommet  $a$  peut être étendue et est encore un ouvert de  $|C|$  ([H-W], p 47). La démonstration précédente peut être alors étendue au complexes simpliciaux infinis.

### 3. Le $n$ -groupe d'homotopie algébrique.

**3.1 Motivation et définition.** Nous avons vu qu'à partir d'une présentation  $(Q, I)$  d'une algèbre triangulaire, il existe un CW-complexe  $\mathcal{B}(Q, I)$ . De plus, il existe une algèbre d'incidence  $A$  associé à  $(Q, I)$  ayant le même groupe fondamental. A cette algèbre  $A$ , on peut associer un  $n$ -groupe d'homotopie algébrique isomorphe au au  $n$ -groupe d'homotopie du complexe simplicial associé à  $A$ . La situation est résumée sur le schéma suivant :



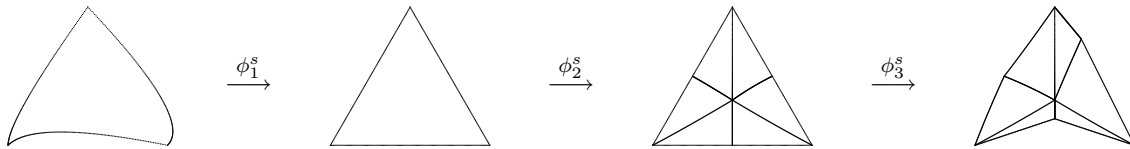
Nous avons déjà montré dans le paragraphe précédent que  $\Pi_n(\Pi_n(|C|))$  et  $\Pi_n(|C|)$  sont isomorphes. Mais la situation est encore plus agréable, les 3 groupes fondamentaux sont isomorphes

**Théorème.** Soit  $(Q, I)$  un algèbre triangulaire,  $\mathcal{B}(Q, I)$  le CW-complexe associé,  $A$  son algèbre d'incidence et  $C$  le complexe simplicial associé  $A$ , alors :

$$\pi_n(A) \simeq \pi_n(|C|) \simeq \pi_n(\mathcal{B}(Q, I))$$

Ainsi, il semble naturel de définir le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental algébrique d'une présentation  $(Q, I)$  d'une algèbre triangulaire, comme étant le  $n^{\text{ième}}$  groupe fondamental de l'algèbre d'incidence associé. Ce théorème redémontre en particulier le théorème de la première partie, c'est-à-dire que les groupes fondamentaux  $\Pi_1(Q, I)$  et  $\Pi_1(A)$  sont isomorphes.

**3.2 Preuve du théorème.** Notons  $\Delta_n$  le  $n$ -simplexe géométrique de  $\mathbb{R}^n$  défini comme l'enveloppe convexe des points  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ ; l'ensemble  $\Delta_n$  peut être considéré comme un CW-complexe. Soit  $s$  une  $n$ -cellule de  $\mathcal{B}(Q, I)$ . Le CW-complexe  $\mathcal{B}(Q, I)$  étant régulier, l'ensemble  $\bar{s}$  est homéomorphe à la boule unité fermée de dimension  $n$  et donc aussi à  $\Delta^n$ . On peut, de plus choisir, un homéomorphisme conservant les sous-cellules, c'est-à-dire que l'image d'une  $k$ -cellule de  $\Delta_n$  soit une cellule de dimension  $k$  de  $\mathcal{B}(Q, I)$ . Notons  $\phi_1^s$  cette homéomorphisme. Considérons de plus  $\phi_2^s$  l'homéomorphisme induit par l'identité entre  $\Delta_n$  et sa subdivision barycentrique  $\Delta'_n$ . Notons enfin  $s'$  le sous-complexe de  $|C|$  formé par les sommets associés aux sous-cellules de  $s$ . Comme  $s'$  et  $\Delta_n$  sont deux réalisations d'un même CW-complexe, elles sont isomorphes. Notons  $\phi_3^s$  cet homéomorphisme. Voyons sur un exemple, l'action de  $\phi_1^s, \phi_2^s$  et  $\phi_3^s$  :



Notons enfin l'homéomorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{B}(Q, I)$  dans  $|C|$  défini par  $\phi(x) = \phi_s(x)$  pour tout cellule non dégénérée  $s$  et tout point  $x$  dans  $\bar{s}$ . Cette application continue définit en fait un homéomorphisme, les groupes d'homotopie associés à  $\mathcal{B}(Q, I)$  d'une part et  $|C|$  d'autre part sont isomorphes.

**3.3 Le  $n^{\text{ième}}$  groupe d'homotopie comme groupe fondamental d'une algèbre d'incidence.**

## 4. Bibliographie

- [AP] I. ASSEM and J.A. DE LA PEÑA, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra, 24(1), p.187-208 (1996).
- [Bus] J.C. BUSTAMANTE, *On the fundamental group of a schurian algebra*, Comm. Algebra 30(2002) n11 5307-5329, 166xx.
- [Bus2] J.C. BUSTAMANTE, *The classifying space of a bound quiver*, preprint, 2001.
- [BG] K. BONGARTZ and P. GABRIEL, *Covering Spaces in representation-Theory*, Invent. Math. 65, p.331-378 (1982).
- [BM] M.J. BARDZELL et E.N. MARCOS,  *$H^1$  and presentations of finite dimensional algebras*, Representation of algebras (São Paulo 1999) 31-38, Lecture notes in pure and applied math. 224 Dekler, New York.

- [Ci1] C. CIBILS, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complex*, J. Pure Appl. Algebra 56 p.221-232 (1989).
- [Ci2] C. CIBILS, *Complexes simpliciaux et carquois*, C.R. Acad. Sci. Paris t.307, Serie I, p.929-934 (1988).
- [Ci3] C. CIBILS, *On the Hochschild cohomologie of finite dimensional algebras*, Comm. in Algebra, 16, p645-649 (1988), p.647.
- [CLS] C. CIBILS, F. LARRION and L. SALMERON, *Méthodes diagrammatiques en représentation d'algèbres de dimensions finie*, publications internes de la section de mathématiques de l'université de Genève.
- [Gab] P. GABRIEL, *Indecomposable representation II*, Symposia Mathematica II (Istituto Nazionale di alta Matematica), Roma, p.81-104 (1973).
- [GRo] P. GABRIEL and A.V. ROITER *Representations of finite-dimensional Algebras*, Springer, 1997.
- [GR] M. A. GATICA and M. J. REDONDO, *Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras*, à paraître dans Comm. Algebra.
- [GS] M. GERSTENHABER and S.P. SCHACK, *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 30 p.143-156 (1983).
- [Gre] E.L. GREEN, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 297-310.
- [Hap] D. HAPPEL, *Hochschild Cohomologie of finite dimensional algebras*, p.108-126. Number 1404 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1989.
- [HS] P.J. HILTON and U. STAMMBACH, *A course in Homological Algebra*, Springer (1996).
- [HW] P.J. HILTON and S. WYLIE, *An introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University press (1967).
- [Mas] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology : an Introduction*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin (1989).
- [MP] R. MARTINEZ-VILLA and J.A. DE LA PEÑA, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra 30, p.277-292 (1983).
- [PS] J.A. DE LA PEÑA et M. SAORIN, *The first Hochschild cohomology group of an algebra*, Manuscripta math. 104(2001) n4, 431-442.
- [Pe] J.A. DE LA PEÑA, *On the abelian Galois covering of an algebra*, J. Algebra 102(1) p.129-134 (1986).
- [Red] M.J. REDONDO, *Cohomología de Hochschild de Artin álgebras*, (Spanish) (Vacquerías 1998) Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) 65(2000), 207-215.
- [Rey1] E. REYNAUD, *Algebraic fundamental group and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra 177, Issue 2 24 January 2003 p.203-214
- [Rey2] E. REYNAUD, *Incidence algebra of a presentation*, to be published.
- [Rot] J. ROTMAN, *An introduction to Homological Algebra*, Academic press, inc. (1979).
- [Wei] C. WEIBEL, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge Univerty Press, (1997).