

Algèbre d'incidence associée à une présentation

Eric Reynaud*

Département de Mathématiques, Université de Montpellier II
pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5

Abstract

In this paper we construct an incidence algebra of a poset associated to a presentation by a quiver and relations of a finite dimensional algebra. We provide an exact sequence relying the fundamental groups of the incidence algebra and the presentation. Moreover, we give an algorithm to calculate any fundamental group.

AMS classification : 16E40; 16G20; 06A11; 55Q05

Dans l'optique d'étudier les modules de génération finie sur des algèbres de dimension finie, il a été développé ces dernières années une méthode diagramatique, essentiellement due à P. Gabriel, basée sur des carquois, c'est-à-dire sur des graphes orientés finis. Plus précisément, il a été démontré que pour toute algèbre A sobre de dimension finie sur un corps k algébriquement clos, il existe un carquois unique Q et au moins un idéal I admissible de l'algèbre kQ , l'algèbre des chemins de Q , tels que A soit isomorphe à kQ/I . Un tel couple (Q, I) est nommé une présentation de A par carquois et relations. Pour chaque paire (Q, I) , nous pouvons définir un groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$. Dans la théorie des représentations d'algèbres, l'importance des algèbres simplement connexes, algèbres dont les groupes fondamentaux associés à chacune de ses présentations sont triviaux, réside dans le fait que souvent, il est possible de réduire, avec l'aide des recouvrements, l'étude des modules indécomposables d'une algèbre à ceux d'une algèbre simplement connexe bien choisie (voir par exemple [BG]).

Dans [], il a été montré que le groupe fondamental, unique dans ce cas là, associé à une algèbre d'incidence avait une interprétation géométrique. En effet, le groupe fondamental algébrique est isomorphe au groupe fondamental topologique d'un complexe simplicial. Afin de donner une vision géométrique du groupe fondamental algébrique dans tous les cas, nous avons associé à toute présentation (Q, I) d'algèbre une algèbre d'incidence A . Un lien étroit unit les groupes fondamentaux de ces deux présentations :

Théorème. Soit (Q, I) la présentation d'une algèbre et A l'algèbre d'incidence associée, il existe un sous-groupe H de $\Pi_1(Q, I)$ que l'on peut décrire par générateurs tel que la suite

* E-mail address : reynaud@math.univ-montp2.fr

suivante soit exacte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \Pi_1(Q, I) \longrightarrow \Pi_1(A) \longrightarrow 1$$

Il existe de nombreux cas où ce noyau est nul, par exemple dans les cas où l'algèbre est Schurian ou lorsque le carquois ne contient pas de "huit". En l'occurrence, il devient facile, grâce à ce théorème, de retrouver le groupe fondamental des algèbres d'incidence dont le carquois est une couronne.

Cette article décrit également un algorithme de calcul du groupe fondamental, qui permet de présenter rapidement le groupe fondamental par générateurs et relations. Pour calculer le groupe fondamental d'un couple (Q, I) , nous montrons qu'il est isomorphe au groupe fondamental d'un couple (Q', I') où Q' contient un sommet de moins que Q . Ainsi en réitérant le processus, le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un carquois ne contenant qu'un seul sommet ce qui donne une présentation par générateurs et relations. Cet algorithme permet également de calculer le premier groupe de cohomologie de Hochschild des algèbres dont une présentation vérifie les hypothèses décrites par I. Assem et M. Saorin dans [PS] permettant d'obtenir un isomorphisme entre $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$.

Cette article regroupe quelques résultats de ma thèse et je tiens ici à remercier ici tous ceux qui m'ont aidé dans sa réalisation : tout particulièrement Claude CIBILS, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, ses conseils avisés, et toute l'aide qu'il m'a apportée et Manolo SAORIN, avec qui j'ai eu la chance d'avoir de fructueuses discussions, à l'origine notamment de la construction de l'algèbre d'incidence associé à chaque présentation.

Dans cette article, k désignera un corps algébriquement clos.

1. Rappel sur le groupe fondamental algébrique.

Donnons dans un premier temps quelques notions sur les relations minimales d'un idéal d'une algèbre de carquois ce qui permettra de construire la relation d'équivalence nécessaire à l'élaboration du groupe fondamental algébrique. Soit Q un carquois et I un idéal de kQ . Une relation de I est un élément de I du type $\sum_{i \in J} a_i \omega_i$ avec J non vide, où les a_i sont dans k^* et les ω_i sont des chemins de kQ .

La relation est dite minimale si pour tout sous-ensemble J' non vide et strict de J , la somme $\sum_{i \in J'} a_i x_i$ n'est plus un élément de I .

Les relations minimales vont permettre de construire, sur les promenades d'un carquois, une relation d'équivalence qui permettra de définir le groupe fondamental d'une présentation. Commençons par introduire la notion de promenades d'un carquois :

Définition. Soit Q un carquois et kQ son algèbre de carquois. Soit α une flèche de Q reliant x à y , notons α^{-1} son inverse formel qui relie y à x ; les sommets y et x sont appelés respectivement *source* et *terminus* de α^{-1} et sont notés $s(\alpha^{-1})$ et $t(\alpha^{-1})$. Une promenade de kQ de longueur n est une suite formelle $p = \alpha_n^{\pm 1} \alpha_{n-1}^{\pm 1} \dots \alpha_1^{\pm 1}$ telle que le but de $\alpha_k^{\pm 1}$ soit égal à la source de $\alpha_{k+1}^{\pm 1}$ pour k variant de 1 à $n-1$; les sommets $s(\alpha_1^{\pm 1})$ et $t(\alpha_n^{\pm 1})$ sont naturellement appelés *source* et *terminus* de la promenade p et sont notés $s(p)$ et $t(p)$. Remarquons que les applications

source et *terminus* ainsi définies sont des prolongements des applications *source* et *terminus* définies sur les chemins de Q . Nous noterons $P(Q)$ l'ensemble des promenades de Q .

La promenade triviale en x , celle ne contenant aucune flèche et dont les extrémités se trouvent en x , est encore notée x . De plus, une promenade est dite fermée si elle a des extrémités identiques. La composition des chemins munit également l'ensemble des promenades d'une multiplication partiellement définie. Elle prolonge celle construite sur l'ensemble des chemins. Plus précisément, si p_1 et p_2 sont deux promenades, alors $p_2.p_1$ est définie uniquement si le terminus de p_1 est égal à la source de p_2 et vaut, dans ce cas là, la concaténation des deux suites.

Remarque. Une promenade est en fait un chemin à travers le graphe non orienté, c'est-à-dire qu'une promenade peut parcourir les flèches dans le sens que celles-ci indiquent ou dans le sens inverse.

Définition. Afin de construire le groupe fondamental d'une présentation (Q, I) , nous considérerons une relation d'équivalence sur l'ensemble des promenades du carquois Q . Celle-ci est définie comme étant la plus petite relation d'équivalence \sim vérifiant :

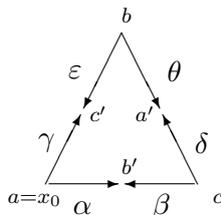
1. Si α est une flèche reliant le sommet x au sommet y alors $\alpha\alpha^{-1} \sim y$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim x$.
2. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ est une relation minimale alors $\omega_1 \sim \dots \sim \omega_n$.
3. Si les promenades α et β sont équivalentes alors $\omega\alpha\omega' \sim \omega\beta\omega'$ pour toute promenade ω et ω' de Q telles que les produits précédents existent.

Remarques.

1. Si l'idéal I de la présentation (Q, I) est l'idéal parallèle, le point (2) revient à ce que les chemins parallèles soient équivalents.
2. La relation d'équivalence \sim dépend de l'idéal I et est compatible avec la multiplication des promenades, lorsqu'elle est définie grâce au point (3).
3. Deux chemins équivalents sont parallèles ; cela provient de (-2).

Rappelons à présent la définition du groupe fondamental algébrique, voir par exemple [AP]. Considérons un sommet x_0 de Q . L'ensemble quotient des promenades fermées en x_0 par la relation d'équivalence précédente est un groupe et ne dépend pas de x_0 lorsque Q est connexe. Il est noté $\Pi_1(Q, I)$.

Exemple I.1. Soit Q le carquois suivant et I l'idéal parallèle de kQ :



les lettres grecques représentant les flèches et les lettres latines les sommets. Notons ω la promenade $\gamma^{-1}\epsilon\theta^{-1}\delta\beta^{-1}\alpha$ fermée en x_0 . Le point 1 lors de la définition de la relation d'équivalence

indique qu'un aller-retour sur une même flèche équivaut à ne pas bouger. De plus, comme il n'existe pas de chemins parallèles, le groupe fondamental ne contient que les classes des promenades ω^n avec n dans \mathbb{Z} . Par ailleurs, ni ω ni aucune de ses puissances n'est trivial puisque I est trivial. Le groupe fondamental est donc isomorphe à \mathbb{Z} .

Remarquons que ce carquois provient du poset $P = \{a, b, c, a', b', c'\}$ muni de la relation d'ordre : $a < c', b < c', a < b', c < b', b < a', c < a'$; ces inéquations ayant donné respectivement dans le carquois Q les flèches $\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta, \theta$ et δ . On a donc $\Pi_1(Q, I) = \Pi_1(P) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Algorithme de calcul de $\pi_1(Q, I)$

Avant d'énoncer le théorème principal, nous introduisons quelques notations. Considérons un carquois Q , un sommet x_0 de Q et des familles de chemins $(c_i)_{i \in A}$ et $(c'_i)_{i \in A}$ de Q indexés par un ensemble A . Notons $\langle (c_i \sim c'_i)_{i \in A} \rangle$ la plus petite relation d'équivalence sur l'ensemble $P(Q)$ des promenades de Q , compatible avec la concaténation et vérifiant :

1. Si f est une flèche de Q allant de a vers b alors $f.f^{-1} \sim b$ et $f^{-1}.f \sim a$.
2. Pour tout i de A , on a : $c_i \sim c'_i$

Cette notation pourra également servir pour désigner la même relation d'équivalence restreinte à $P_{x_0}(Q)$, l'ensemble des promenades fermées en x_0 .

Considérons de plus une flèche f_0 de Q d'origine a_0 et d'extrémité b_0 avec $a_0 \neq b_0$, et désignons par Q' le carquois obtenu à partir de Q en fusionnant les sommets a_0 et b_0 . Plus précisément :

- Les sommets de Q' sont les sommets de Q où a_0 et b_0 sont identifiés. Notons c_0 ce sommet.
- Les flèches de Q' sont les flèches de Q privées de f_0 . Chacune a même origine et même but que dans Q . Remarquons qu'une flèche parallèle à f_0 devient une boucle dans Q' .

Notons également par p la projection de $P(Q)$ sur $P(Q')$ définie par

- $p(s) = s$ pour tout sommet s différent de a_0 et b_0 ,
- $p(a_0) = p(b_0) = c_0$,
- $p(f) = f$ pour toute flèche f différente de f_0 ,
- $p(f_0) = c_0$.

Définissons enfin R' sur kQ' , la relation d'équivalence $\langle (p(c_i) \sim p(c'_i))_{i \in A} \rangle$.

Théorème II.1. Dans le contexte ci-dessus, le morphisme p induit un isomorphisme :

$$P_{x_0}(Q)/R \simeq P_{p(x_0)}(Q')/R'$$

Preuve.

Définissons tout d'abord une application q de $P_{p(x_0)}(Q')$ dans $P_{x_0}(Q)$ vérifiant $p \circ q = Id$. Considérons $\omega' = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une promenade de Q' fermée en $p(x_0)$. Cette promenade en général n'est pas une promenade de Q , puisque que l'on a pas forcément $t(\alpha_i^{\varepsilon_i}) = s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$ pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$. L'application q insère f_0 et f_0^{-1} entre certaines flèches de ω' de façon à ce que celle-ci deviennent une promenade de Q .

Construisons q de façon plus formelle. Posons pour faciliter l'écriture $\alpha_0^{\varepsilon_0} = \alpha_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} = p(x_0)$, et notons s_i et t_i respectivement la source et le terminus de $\alpha_i^{\varepsilon_i}$ considéré comme une promenade de Q . Considérons alors $\omega = e_n \cdot \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdot e_{n-1} \dots e_1 \cdot \alpha_1^{\varepsilon_1} \cdot e_0$ de Q , où les e_i sont définis de façon suivante :

$$e_i = \begin{cases} t_i & \text{si } t_i = s_{i+1} \\ f_0 & \text{si } t_i = a_0 \text{ et } s_{i+1} = b_0 \\ f_0^{-1} & \text{si } t_i = b_0 \text{ et } s_{i+1} = a_0 \end{cases}$$

On a alors $p(\omega) = \omega'$. Posons $q(\omega') = \omega$, alors $p \circ q = Id$.

Montrons que l'image par q de deux promenades équivalentes par R' sont deux promenades équivalentes par R .

Il suffit de montrer cette propriété sur les générateurs de la relation d'équivalence. Considérons dans un premier temps une flèche f de Q' et les promenades de Q' fermées en $p(x_0)$ $\omega = p_1 \cdot f^{-1} \cdot f \cdot p_2$ et $\omega' = p_1 \cdot p_2$, et montrons que $q(\omega)$ et $q(\omega')$ sont équivalentes. Pour cela notons p'_1 et p'_2 les promenades de Q obtenues à partir de p_1 et p_2 en insérant f_0 et f_0^{-1} , comme expliqué lors de la construction de q , on a ainsi :

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot e_1 \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 \quad \text{et} \quad q(\omega') = p'_1 \cdot e_2 \cdot p'_2$$

Comme $t(f) = s(f^{-1})$ on a $e_1 = t(f)$ et

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot e_1 \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 \sim p'_1 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot p'_2$$

Etant donné que les promenades e_2 , e_3 et e_4 sont formées uniquement avec la flèche f_0 et son inverse, on obtient $q(\omega) \sim q(\omega')$. La démonstration est identique pour l'insertion de $f \cdot f^{-1}$.

Considérons à présent deux promenades de Q' fermées en $p(x_0)$ de la forme $\omega = p_1 \cdot c_1^{-1} \cdot c_2 \cdot p_2$ et $\omega' = p_1 \cdot p_2$ avec c_1 et c_2 R' -équivalents où c_1 et c_2 sont deux chemins équivalents générateurs de la relation d'équivalence R' . En d'autres termes, il existe des chemins c'_1 et c'_2 de Q équivalent par la relation R tels que $p(c'_1) = c_1$ et $p(c'_2) = c_2$. Montrons alors que les promenades $q(\omega)$ et $q(\omega')$ sont équivalentes. Notons de plus, comme précédemment, p'_1 et p'_2 les promenades de Q obtenues à partir de p_1 et p_2 en insérant f_0 et f_0^{-1} . Ainsi :

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot e_1 \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 \quad \text{et} \quad q(\omega') = p'_1 \cdot e_2 \cdot p'_2$$

Les chemins c'_1 et c'_2 étant équivalents, on a $t(c'_2) = s(c_1'^{-1})$ et $e_1 = t(f)$. On obtient donc

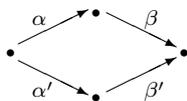
$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot e_1 \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 \sim p'_1 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot p'_2$$

Etant donné que les promenades e_2 , e_3 et e_4 sont formées uniquement avec la flèche f_0 et son inverse, on obtient encore $q(\omega) \sim q(\omega')$.

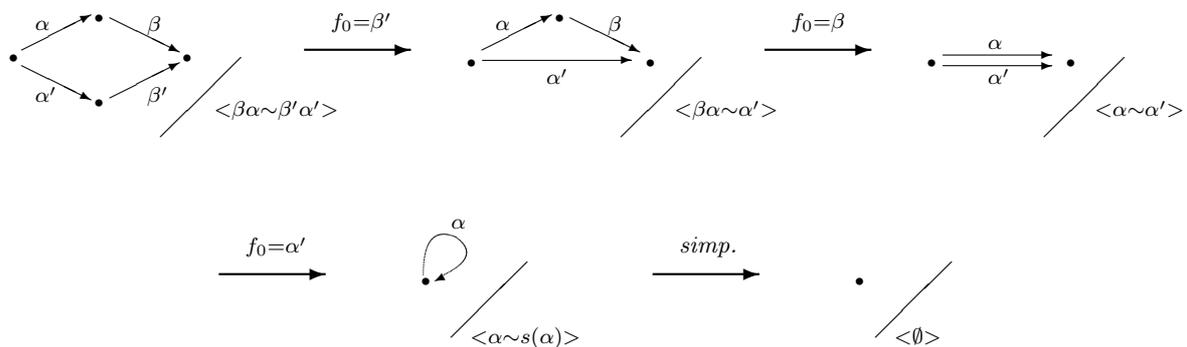
Par définition de la relation R' , la projection p est également constante sur les classes d'équivalence. Ainsi p et q induisent p_* et q_* entre les espaces $P_{x_0}(Q)/R$ et $P_{p(x_0)}(Q')/R'$. Il suffit de montrer que $q_* \circ p_* = Id$, ce qui est vrai puisque l'application $q \circ p$ appliquée à une promenade lui enlève les expressions du type $f_0 \cdot f_0^{-1}$ et $f_0^{-1} \cdot f_0$ et sa classe d'équivalence reste inchangée. \square

La méthode. Soit Q un carquois et I un idéal quelconque de kQ . Remarquons tout d'abord que la relation d'équivalence définie afin de construire le groupe fondamental algébrique $\Pi_1(Q, I)$ est en fait la relation d'équivalence $\langle (\omega_i \sim \omega'_i)_{i \in A} \rangle$ où pour tout i de A , les chemins ω_i et ω'_i sont des chemins d'une relation minimale. En appliquant ensuite le théorème un certain nombre de fois (autant que de sommets de Q moins 1), et après avoir simplifié par les boucles équivalentes à leur extrémité, on trouve que le groupe fondamental algébrique $\Pi_1(Q, I)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un carquois ne contenant qu'un seul sommet. Cela donne donc une description de $\Pi_1(Q, I)$ par générateurs et relations. Nous allons reprendre des exemples vus précédemment et les calculer grâce à cet algorithme.

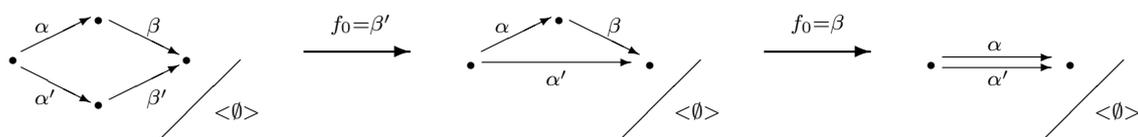
Exemple II.2. Considérons le carquois Q :

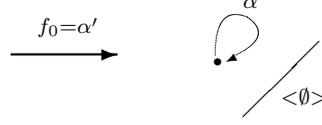


et les idéaux $I_1 = \langle \beta\alpha - \beta'\alpha' \rangle$ et $I_2 = \langle \beta\alpha \rangle$. Calculons les groupes fondamentaux associés à ces deux présentations. Tout d'abord pour (Q, I_1) :



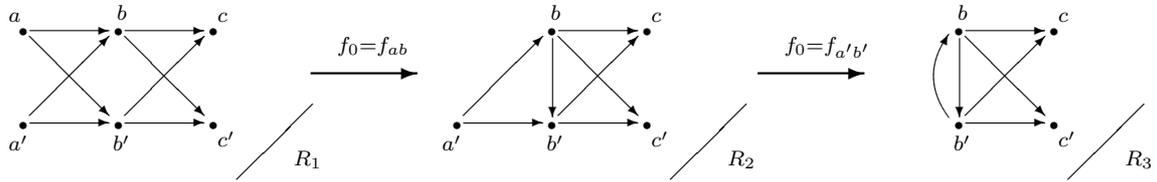
Le groupe fondamental associé à (Q, I_1) est donc trivial. Calculons à présent celui de (Q, I_2) :





Ainsi, le groupe fondamental de la présentation (Q, I_2) est isomorphe à \mathbb{Z} .

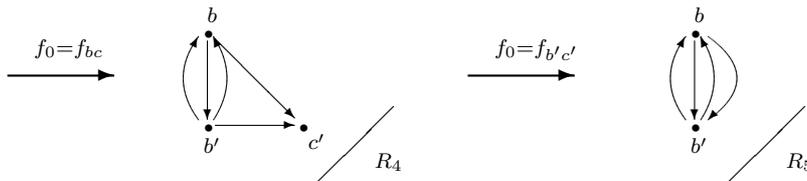
Exemple II.3. Considérons à présent l’algèbre d’incidence suivante. Cet exemple sera repris en () pour montrer que le complexe simplicial associé est un octaèdre. Nous noterons par f_{xy} la flèche allant du sommet x au sommet y .



Avec

$$\begin{cases} R_1 = \langle f_{bc}f_{ab} \sim f_{b'c}f_{ab'}, & f_{bc'}f_{ab} \sim f_{b'c'}f_{ab'}, & f_{bc}f_{a'b} \sim f_{b'c}f_{a'b'}, & f_{bc'}f_{a'b} \sim f_{b'c'}f_{a'b'} \rangle \\ R_2 = \langle f_{bc} \sim f_{b'c}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{bc}f_{a'b} \sim f_{b'c}f_{a'b'}, & f_{bc'}f_{a'b} \sim f_{b'c'}f_{a'b'}, \rangle \\ R_3 = \langle f_{bc} \sim f_{b'c}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{bc}f_{b'b} \sim f_{b'c}, & f_{bc'}f_{b'b} \sim f_{b'c'}, \rangle \end{cases}$$

On effectue le même procédé sur les flèches f_{bc} et $f_{b'c'}$; les nouvelles flèches entre b et b' seront notées avec des primes. On obtient :



Avec

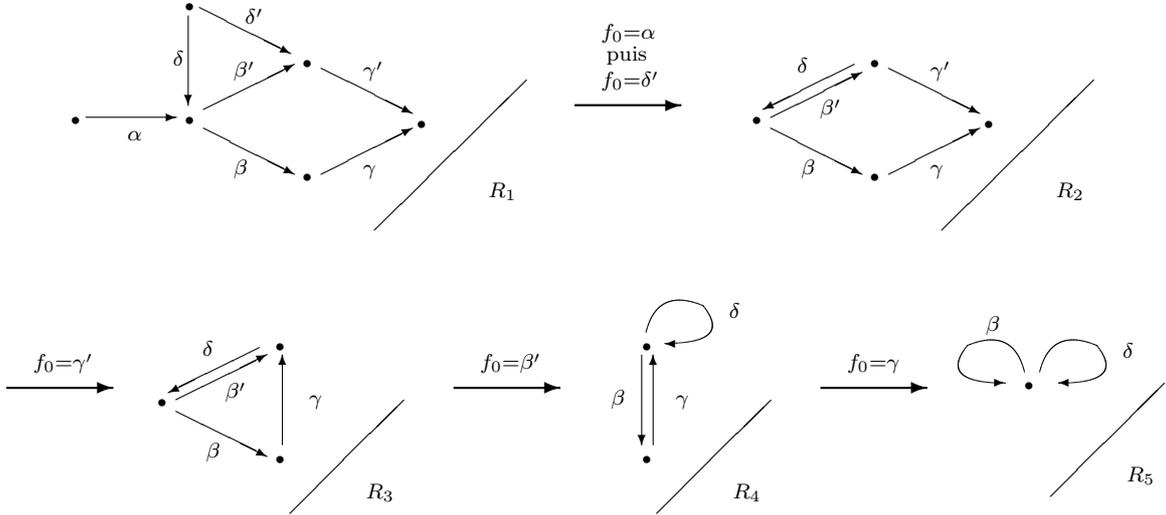
$$\begin{cases} R_4 = \langle b \sim f'_{b'b}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{b'b} \sim f'_{b'b}, & f_{bc'}f_{b'b} \sim f_{b'c'}, \rangle \\ R_5 = \langle b \sim f'_{b'b}f_{bb'}, & f'_{bb'} \sim f_{bb'}, & f_{b'b} \sim f'_{b'b}, & f'_{bb'}f_{b'b} \sim b', \rangle \end{cases}$$

Enfin en effectuant l’opération une dernière fois avec $f_0 = f_{bb'}$, et en posant $\alpha = p(f_{b'b})$, $\beta = p(f'_{bb'})$ et $\gamma = p(f'_{b'b})$, on obtient un carquois ne contenant qu’un seul sommet b et trois flèches α , β et γ avec les relations :

$$R = \langle b \sim \gamma, \beta \sim b, \alpha \sim \gamma, \beta\alpha \sim b \rangle = \langle \alpha \sim \beta \sim \gamma \sim b \rangle$$

Le groupe fondamental topologique est donc trivial, ce qui est logique puisque c’est le groupe fondamental de la surface d’un octaèdre.

Exemple II.4. Un dernier exemple avec le carquois ci-dessous et l'idéal $I = \langle \gamma\beta\alpha - \gamma'\beta'\alpha, \gamma\beta\delta - \gamma'\delta', \gamma'\beta'\delta - \gamma'\delta' \rangle$.



Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \langle \gamma\beta\alpha \sim \gamma'\beta'\alpha, \quad \gamma\beta\delta \sim \gamma'\delta', \quad \gamma'\beta'\delta \sim \gamma'\delta' \rangle \\ R_2 = \langle \gamma\beta \sim \gamma'\beta', \quad \gamma\beta\delta \sim \gamma', \quad \gamma'\beta'\delta \sim \gamma' \rangle \\ R_3 = \langle \gamma\beta \sim \beta', \quad \gamma\beta\delta \sim t(\gamma), \quad \beta'\delta \sim t(\gamma) \rangle \\ R_4 = \langle \gamma\beta \sim s(\beta), \quad \gamma\beta\delta \sim t(\gamma), \quad \delta \sim t(\gamma) \rangle \\ R_5 = \langle \beta \sim s(\beta), \quad \beta\delta \sim s(\beta), \quad \delta \sim s(\beta) \rangle \end{array} \right.$$

Ainsi, après simplification des deux dernières flèches, on trouve que le groupe fondamental de (Q, I) est trivial.

3. Algèbre d'incidence associée à une présentation

Dans ce paragraphe nous allons pour chaque présentation par carquois et relations (Q, I) d'une k -algèbre A , construire une algèbre d'incidence A' , avec pour objectif d'obtenir une surjection du groupe fondamental du couple (Q, I) sur le groupe fondamental de l'algèbre d'incidence A' .

Nous commencerons donc par construire un poset Σ à partir d'une présentation (Q, I) , puis nous montrerons qu'il existe une surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(A')$ où A' est l'algèbre d'incidence associée à Σ . Enfin nous mettrons en évidence un sous-groupe H de $\Pi_1(Q, I)$ tel que la suite

$$0 \rightarrow H \rightarrow \Pi_1(Q, I) \rightarrow \Pi_1(A') \rightarrow 0$$

soit exacte.

L'intérêt principal de cette algèbre d'incidence est de donner dans le cas où le sous-groupe H est trivial, une vision géométrique du groupe fondamental. En effet, comme nous l'avons

montré en () les groupes fondamentaux $\Pi_1(A')$ et $\Pi_1(\text{Sim}(\Sigma))$ sont isomorphes. Ceci permet de réaliser géométriquement tout groupe fondamental dont le sous-groupe H est nul.

Enfin signalons que dans le cas où l'algèbre de départ est déjà une algèbre d'incidence, les groupes fondamentaux de cette algèbre et de l'algèbre d'incidence construite par la méthode précédente sont isomorphes ; dans ce cas H est trivial. Nous montrerons ensuite qu'il existe d'autres familles avec cette même propriété.

a) Les sommets de Σ .

Considérons tout d'abord l'ensemble quotient $C(Q)/\sim$ où $C(Q)$ est l'ensemble des chemins de Q et \sim est la relation d'équivalence utilisée lors de la construction du groupe fondamental (1.) restreinte à l'ensemble $C(Q)$. Notons alors Σ l'ensemble quotient de $C(Q)/\sim$ privé des classes contenant des chemins se trouvant dans I . Ainsi par construction, tout chemin se trouvant dans une classe de Σ n'est jamais équivalent à un chemin se trouvant dans I .

Etant donné que les origines et les terminus de chemins équivalents sont identiques, les notions d'origine, d'extrémité et de parallélisme s'étendent à l'ensemble Σ . De plus comme la relation d'équivalence \sim est compatible avec la concaténation des chemins, l'ensemble Σ hérite d'une loi de composition interne partiellement définie sur les promenades. Remarquons également que cette opération est entièrement définie sur $\Sigma \cup \{0\}$ qui est ainsi muni d'une structure de semi-groupe.

b) Relation d'ordre sur Σ .

Soit (Q, I) une présentation et Σ l'ensemble associé à (Q, I) défini précédemment.

Proposition - Définition III.2.1. Soit \bar{a} et \bar{b} des éléments de Σ alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists \bar{w}, \bar{w}' \in \Sigma \ / \ \bar{b} = \bar{w}.\bar{a}.\bar{w}'$
2. $\forall a \in \bar{a}, \exists b \in \bar{b}, \exists w, w' \in C(Q) \ / \ b = w.a.w'$
3. $\exists a \in \bar{a}, \exists b \in \bar{b}, \exists w, w' \in C(Q) \ / \ b = w.a.w'$
4. $\forall a \in \bar{a}, \forall b \in \bar{b}, \exists w, w' \in C(Q) \ / \ b \sim w.a.w'$

On dit alors que \bar{a} divise \bar{b} et on note \bar{a}/\bar{b} . Cette relation est donc la restriction à Σ de la relation divise du semi-groupe $\Sigma \cup \{0\}$

Preuve.

(1 \implies 2) : supposons qu'il existe \bar{w} et \bar{w}' dans Σ vérifiant $\bar{b} = \bar{w}.\bar{a}.\bar{w}'$. Fixons a, ω et ω' respectivement dans $\bar{a}, \bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$, il suffit alors de poser $b = w.a.w'$.

(2 \implies 3) : évident.

(3 \implies 4) : tous les chemins de \bar{a} (resp. \bar{b}) sont équivalents. De plus la relation \sim est compatible avec la multiplication.

(4 \implies 1) : soit $b \sim w.a.w'$. Comme b n'est pas dans I , il en est de même pour $w.a.w'$ d'après la construction de Σ . De plus, \bar{w} (resp. \bar{w}') est dans Σ . En effet dans le cas contraire w est

équivalent à un chemin dans I et donc $w.a.w'$ est équivalent à un chemin dans I ce qui est exclus. Ainsi $\overline{(b)} = \overline{w.a.w'} = \overline{(w).(a).(w')}$ \square

Proposition III.2.2. La relation divise définie précédemment est une relation d'ordre sur Σ .

Preuve. La réflexivité et la transitivité étant évidentes, il ne reste que l'antisymétrie à considérer. Les relations $\overline{a}/\overline{b}$ et $\overline{b}/\overline{a}$ impliquent qu'il existe $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2$ et α'_2 tels que $a \sim \alpha_1.b.\alpha'_1$ et $b \sim \alpha_2.a.\alpha'_2$ où a et b désigne des éléments quelconques de \overline{a} et \overline{b} . En posant $w = \alpha_1.\alpha_2$ et $w' = \alpha'_2.\alpha'_1$, on a $a \sim w.a.w'$. Ainsi, en utilisant n fois la dernière équation, on trouve que $a \sim w^n.a.w'^n$ pour tout n de \mathbb{N} . Comme I est admissible, il existe un n_0 de \mathbb{N} tel que $F^{n_0} \subset I$ où F^{n_0} est l'idéal contenant les chemins de longueur supérieure ou égale à n_0 . Deux cas peuvent alors se produire :

1. Les classes \overline{w} ou $\overline{w'}$ contiennent au moins un chemin de longueur strictement positive. Supposons pour clarifier la situation que ce soit \overline{w} et notons ω_0 ce chemin. Ainsi, le chemin a est équivalent à $\omega_0^{n_0}.a.\omega_0^{n_0}$. Mais $\omega_0^{n_0}$ étant dans I , l'élément a est équivalent à un élément de I ce qui est impossible par construction de l'ensemble Σ . Ce cas ne peut donc pas se produire.
2. Les classes \overline{w} et $\overline{w'}$ ne contiennent que des sommets. Comme I est admissible les sommets ne peuvent pas être équivalents à un autre chemin que le sommet lui-même et ainsi \overline{w} et $\overline{w'}$ sont des singletons contenant respectivement le terminus t et la source s de \overline{a} ; ainsi $w' = s$ et $w = t$. De plus, pour une question de longueur, l'égalité $\alpha_1.\alpha_2 = t$ se traduit forcément par $\alpha_1 = \alpha_2 = t$. En raisonnant de même pour w' , on trouve que $a = b$.

\square

Proposition III.2.3. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Σ le poset associé à cette présentation, alors :

1. $\dim(kQ/I) \geq \text{card}(\Sigma)$. En particulier, si kQ/I est de dimension finie alors Σ est fini et l'algèbre d'incidence associée est également de dimension finie.
2. Le carquois Q est connexe si et seulement si son poset d'incidence Σ est connexe.

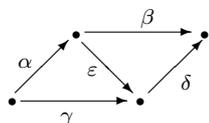
Preuve.

(1) : Soit $(w_i)_{i \in J}$ une famille de représentants de chaque classe de Σ . Montrons que c'est une famille libre dans kQ/I . On suppose que $\sum_{i \in J} \lambda_i w_i \in I$, il existe donc $J' \subset J$ non vide tel que $\sum_{i \in J'} \lambda_i w_i$ soit une relation minimale : en conséquence les $(w_i)_{i \in J'}$ sont équivalents. Par ailleurs, les w_i étant choisis dans des classes d'équivalence distinctes, le cardinal de J ne peut être que 1. Ainsi, la relation minimale se réduit à $\lambda_k.w_k = 0$ pour un certain k de J . Comme w_k n'est pas dans I par construction de Σ , le scalaire λ_i est nul. On réitère l'opération autant de fois que J contient d'éléments, et nous trouvons que tous les λ_i avec i dans J sont nuls, la famille $(w_i)_{i \in J}$ est libre.

(2) : La démonstration sera plus facile après avoir démontré la surjection entre les deux groupes fondamentaux, voir (Ch0: IV.1.1). \square

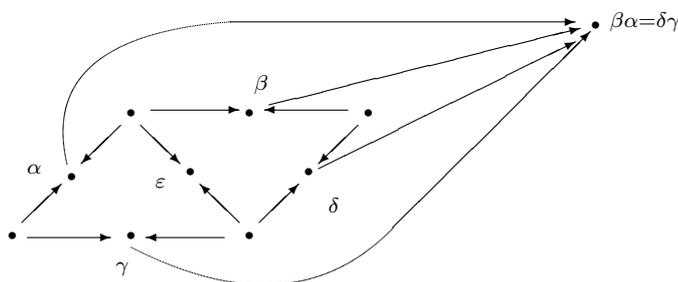
c) Exemple

Considérons le carquois Q et l'idéal I de kQ suivants :



$$I = \langle \varepsilon\alpha, \delta\varepsilon, \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$$

Mis à part les flèches et les sommets, il existe un unique chemin dans Q à savoir $\beta\alpha = \delta\gamma$. Ainsi le carquois d'incidence est :



4. Relation entre les groupes fondamentaux.

Soit (Q, I) , une présentation d'une algèbre par carquois et relations. Dans les paragraphes précédents, nous avons construit un poset Σ à partir cette présentation (Q, I) . Ces deux objets, la présentation et le poset, ont chacun leur groupe fondamental, et notre propos est de les comparer. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe toujours une surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(\Sigma)$. Puis pour étudier le défaut d'injectivité, nous allons introduire un sous-groupe explicite H de $\Pi_1(Q, I)$ tel que le groupe quotient $\Pi_1(Q, I)/H$ soit isomorphe à $\Pi_1(\Sigma)$. En d'autres mots, nous donnons un système de générateurs du noyau de la surjection.

a) Surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(\Sigma)$

Théorème IV.1.1. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Σ le poset d'incidence associé, alors il existe une surjection :

$$\phi_* : \Pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \Pi_1(\Sigma).$$

Preuve. Notons Q_Σ le carquois ordonné associé à Σ . Pour simplifier les notations de la démonstration un sommet de Q_Σ pourra également désigner une classe de chemins de $C(Q)/\sim$ ou même un chemin de Q si le chemin est seul dans sa classe. Ceci est le cas par exemple pour

les classes de sommets ou de flèches. Considérons à présent l'application ϕ définie de $P(Q)$, l'ensemble des promenades de Q , vers $P(Q_\Sigma)$, l'ensemble des promenades de Q_Σ , caractérisé par :

- Si a est un sommet de Q (considéré comme chemin constant) alors $\phi(a) = a$. Remarquons que l'idéal étant admissible, a n'est pas dans I ; la classe de a est donc bien dans Σ .
- Soit α une flèche de Q allant de a vers b , alors a et b sont des diviseurs de α . L'idéal I étant admissible, les flèches de Q ne sont pas dans I ; ainsi α est dans Σ . Comme il n'existe pas d'éléments strictement compris, pour la relation d'ordre divise, entre a et α (resp. entre b et α), il existe dans Q_Σ deux flèches α_a et α_b reliant respectivement les sommets a et b à la flèche α . On peut alors poser $\phi(\alpha) = \alpha_b^{-1}\alpha_a$.

$$\text{Dans } Q : \quad a \xrightarrow{f} b \quad \text{Dans } Q_\Sigma : \quad a \xrightarrow{\alpha_a} \alpha \xleftarrow{\alpha_b} b$$

- L'application ϕ est compatible avec la composition des chemins, ainsi si $\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade de $P(Q)$ alors

$$\phi(\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}) = \phi(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots \phi(\alpha_1)^{\varepsilon_1}$$

Soit X_0 le sommet base de Q choisi pour le calcul de $\Pi_1(Q, I)$, le point $\phi(X_0) = X_0$ sera également le sommet de Q_Σ choisi pour calculer $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$. Nous noterons également par ϕ le morphisme induit par ϕ de source le groupe des chemins de Q fermés en X_0 et de but $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$.

Montrons tout d'abord que l'application ϕ est surjective. Soit $p = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une promenade de Q_Σ passant successivement par les sommets $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$ avec $a_1 = a_{n+1} = X_0$; en d'autres termes $\overline{a_i}$ est l'origine de $\omega_i^{\varepsilon_i}$. Nous allons prouver que p est équivalent à un chemin p' traversant les sources $s_1 \dots s_{n+1}$ des classes de chemins $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$.

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, le sommet $\overline{s_i}$ divise $\overline{a_i}$ et donc il existe un chemin c_i de Q_Σ reliant $\overline{s_i}$ à $\overline{a_i}$. De plus, comme X_0 est également un sommet de Q , les chemins c_1 et c_{n+1} valent X_0 . La promenade p est alors équivalente à :

$$p = (c_{n+1}\alpha_n^{\varepsilon_n}c_n) \dots (c_3^{-1}\alpha_2^{\varepsilon_2}c_2)(c_2^{-1}\alpha_1^{\varepsilon_1}c_1)$$

La situation est résumée sur le schéma suivant :

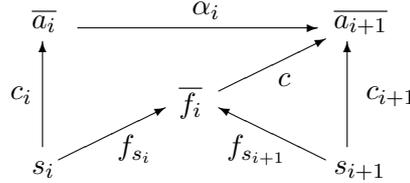
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \overline{x_0 = a_1} & \xrightarrow{\alpha_1^{\varepsilon_1}} & \overline{a_2} & \xrightarrow{\alpha_2^{\varepsilon_2}} & \overline{a_3} & \xrightarrow{\alpha_3^{\varepsilon_3}} & \overline{a_4} & \cdots & \overline{a_n} & \xrightarrow{\alpha_n^{\varepsilon_n}} & \overline{a_{n+1} = x_0} \\
 \uparrow c_1 & & \uparrow c_2 & & \uparrow c_3 & & \uparrow c_4 & & \uparrow c_n & & \uparrow c_{n+1} \\
 x_0 = s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 & & s_n & & s_{n+1} = x_0
 \end{array}$$

Soit i fixé dans $\{1, \dots, n\}$. Supposons de plus que $\overline{a_i/a_{i+1}}$, c'est-à-dire que $\varepsilon_i = 1$; l'autre cas se traitant de la même façon. Comme $\overline{a_i}$ est relié à $\overline{a_{i+1}}$ dans Q_Σ par α_i , il n'existe aucun

élément b strictement entre $\overline{a_i}$ et $\overline{a_{i+1}}$. Il existe donc une flèche f_i de Q tel que $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_i \cdot f_i}$ ou $\overline{a_{i+1}} = \overline{f_i \cdot a_i}$.

Dans le second cas $\overline{a_{i+1}} = \overline{f_i \cdot a_i}$, les chemins c_i et c_{i+1} ont une même origine s_i et donc les chemins $\alpha_i c_i$ et c_{i+1} sont parallèles et donc $\overline{c_{i+1}^{-1} \alpha_i c_i}$ est équivalent à s_i .

Considérons à présent le premier cas : $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_i \cdot f_i}$. La flèche f_i de Q a pour origine s_{i+1} et pour extrémité s_i , donc il existe des flèches f_{s_i} et $f_{s_{i+1}}$ de Q_Σ reliant respectivement s_i et s_{i+1} au sommet f_i ; ces flèches vérifiant $\phi(f_i) = f_{s_i}^{-1} f_{s_{i+1}}$. De plus f_i divise $\overline{a_{i+1}}$, ainsi il existe un chemin c de Q_Σ reliant f_i à $\overline{a_{i+1}}$.



Les chemins c_{i+1} et $c f_{s_{i+1}}$ d'une part et $\alpha_i c_i$ et $c f_{s_i}$ d'autre part sont parallèles, la promenade $\overline{c_{i+1}^{-1} \alpha_i c_i}$ est donc équivalente à $\overline{f_{s_{i+1}}^{-1} c^{-1} c f_{s_i}}$ puis à $\overline{f_{s_{i+1}}^{-1} f_{s_i}}$ qui est exactement l'image par ϕ de f_i^{-1} . Remarquons que si nous avions considéré $\overline{a_{i+1}/a_i}$, nous en aurions déduit que le chemin est équivalent à l'image de la flèche f_i .

Remarquons également pour la suite, en utilisant le même procédé que précédemment, que la promenade de Q_Σ d'origine a et d'extrémité b :

$$a \rightarrow f_1 \rightarrow \overline{f_2 f_1} \rightarrow \overline{f_3 f_2 f_1} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{f_n f_{n-1} \dots f_1} \rightarrow \overline{f_n \dots f_2} \rightarrow \overline{f_n \dots f_3} \rightarrow \dots \rightarrow b$$

est équivalente à $\phi(c)$ où $c = f_n f_{n-1} \dots f_1$.

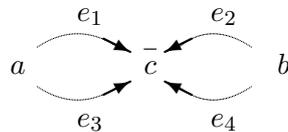
Montrons que ϕ est constant sur les classes d'équivalence de la relation \sim . Il induit donc ϕ_* . Vérifions tout d'abord que pour toute flèche f d'origine a et de but b , on a $\phi(f f^{-1}) \sim \phi(b)$ et $\phi(f^{-1} f) \sim \phi(a)$. En effet $\phi(f^{-1} f) = f_a^{-1} f_b f_b^{-1} f_a \sim a = \phi(a)$; la démonstration étant identique pour l'autre égalité.

Il suffit maintenant de vérifier que les images de deux chemins c_1 et c_2 de Q équivalents sont équivalentes. Supposons dans un premier temps que c_1 et c_2 ne sont pas dans I , ils sont donc représentés dans Σ .

Considérons $c_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ et $c_2 = \beta_m \dots \beta_1$ des chemins équivalents de Q et notons a et b respectivement l'origine et le but communs aux deux chemins c_1 et c_2 . Définissons, à présent, les chemins suivants :

- e_1 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $a, \alpha_1, \alpha_2 \alpha_1, \dots, c_1$
- e_2 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $b, \alpha_n, \alpha_n \alpha_{n-1}, \dots, c_1$
- e_3 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $a, \beta_1, \beta_2 \beta_1, \dots, c_2$
- e_4 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $b, \beta_m, \beta_m \beta_{m-1}, \dots, c_2$

Les chemins c_1 et c_2 étant équivalents, ils sont représentés dans Σ par le même sommet \bar{c} . La situation est résumée dans le schéma suivant, les flèches courbes représentant des chemins de Q_Σ :



D'après la remarque de la fin de la preuve de la surjectivité de ϕ , nous avons $e_2^{-1}e_1 \sim \phi(c_1)$ et $e_4^{-1}e_3 \sim \phi(c_2)$, donc $\phi(c_1)$ et $\phi(c_2)$ sont équivalents.

Intéressons nous à présent au cas où c_1 ou c_2 sont dans I . Comme c_1 et c_2 sont équivalents, il existe des promenades β_1, \dots, β_n vérifiant :

$$c_1 = \beta_1 \sim \beta_2 \sim \dots \sim \beta_n = c_2$$

et tels que pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, soit β_{i+1} est obtenu à partir de β_i en ajoutant ou en enlevant une promenade du type $f.f^{-1}$ ou $f^{-1}.f$ où f est une flèche, dans ce cas là nous avons déjà montré que $\phi(\beta_{i+1})$ et $\phi(\beta_i)$ sont équivalents ; soit il existe $\alpha_i, \alpha'_i, w_i, w'_i$ vérifiant : $\beta_i = w_i.\alpha_i.w'_i$, $\beta_{i+1} = w_i.\alpha'_i.w'_{i+1}$ et les chemins α_i et α'_i font parties d'une même relation minimale de I de la forme $\lambda_{i1}\alpha_i + \lambda_{i2}\alpha'_i + \dots$. Fixons i dans $\{1, \dots, n-1\}$. Remarquons tout d'abord que α_i ne peut être dans I car sinon α_i serait une relation minimale et $\lambda_{i1}\alpha_i + \lambda_{i2}\alpha_i + \dots$ n'en serait plus une. Comme α_i et α'_i sont équivalents et ne se trouvent pas dans I , en utilisant ce qui précède, leurs images par ϕ sont équivalentes, ainsi $\phi(\alpha_i) \sim \phi(\alpha'_i)$. L'application ϕ étant un morphisme et la relation \sim de $\Pi_1(\Sigma)$ étant compatible avec la multiplication, on obtient :

$$\phi(w'_i.\alpha_i.w_i) = \phi(w'_i).\phi(\alpha_i).\phi(w_i) \sim \phi(w'_{i+1}).\phi(\alpha_{i+1}).\phi(w_{i+1}) = \phi(w'_{i+1}.\alpha_{i+1}.w_{i+1})$$

Comme i est quelconque, les chemins $\phi(c_1)$ et $\phi(c_2)$ sont également équivalents. Nous obtenons donc une application ϕ_* surjective de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(Q_\Sigma)$. \square

Preuve de (Ch0: III.2.3). Nous allons à présent démontrer la propriété (Ch0: III.2.3) qui affirme qu'un carquois Q est connexe si et seulement si son poset d'incidence associé Σ est également connexe.

En effet, supposons que Q soit connexe. Considérons \bar{a} et \bar{b} deux sommets de Σ . Notons également \bar{s}_a et \bar{s}_b les sources de \bar{a} et \bar{b} . Comme \bar{s}_a/\bar{a} et \bar{s}_b/\bar{b} , il existe des chemins c_1 et c_2 de Σ reliant respectivement \bar{s}_a à \bar{a} et \bar{s}_b à \bar{b} . De plus, les sommets $s_a = \bar{s}_a$ et $s_b = \bar{s}_b$ de Σ sont également des sommets de Q . Ainsi, comme Q est connexe, il existe une promenade ω de Q reliant s_a et s_b . Enfin $c_2\phi(\omega)c_1^{-1}$ est une promenade reliant \bar{a} à \bar{b} . Le poset Σ est donc connexe.

Inversement, supposons que Σ soit connexe. Considérons x et y deux sommets quelconques de Q , ils sont également dans Σ . Comme Σ est connexe, il existe une promenade ω' de x à y dans Q . Puisque ϕ est surjective, il existe une promenade de Q reliant x à y et telle que $\phi(\omega) \sim \omega'$. Ainsi, Q est connexe.

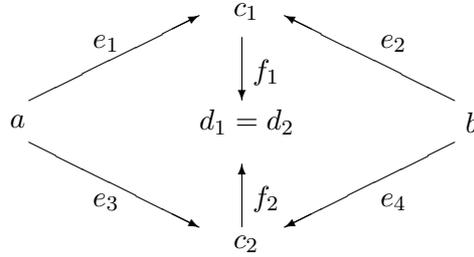
\square

b) Générateurs du noyau.

Soit (Q, I) une présentation d'algèbre vérifiant la propriété (P) . Notons \sim , la relation d'équivalence définie lors de la construction du groupe fondamental $\Pi(Q, I)$ (1.). On considère ensuite la relation d'équivalence R sur $P(Q)/\sim$, l'ensemble des classes de promenades de Q suivant la relation \sim , définie comme étant la plus petite relation d'équivalence compatible avec la multiplication et vérifiant la propriété suivante : si deux chemins parallèles c_1 et c_2 de Q divisent deux chemins équivalents par \sim ne se trouvant pas dans I , alors les classes c_1 et c_2 sont R -équivalentes.

Exemple IV.2.1. Considérons le carquois Q et l'idéal I de kQ suivant :

(Ch0: IV.1.1) pour les chemins e_1, e_2, e_3 et e_4 . Nous obtenons ainsi la situation suivante, les flèches de ce schéma représentant des chemins de Q_Σ :



En utilisant la remarque de la fin de la preuve de la surjectivité de ϕ , nous avons :

$$\phi(c_1) \sim e_2^{-1}e_1 \sim e_2^{-1}f_1^{-1}f_1e_1 \sim e_4^{-1}f_2^{-1}f_2e_3 \sim e_4^{-1}e_3 \sim \phi(c_2)$$

La construction de l'antécédent lors de la démonstration de la surjectivité définit une application ψ des promenades de Q_Σ dans le quotient des promenades de Q par les deux relations d'équivalence. Définissons ici plus précisément cette application. Considérons l'application ψ définie de $P(Q_\Sigma)$, l'ensemble des promenades de Q_Σ , dans $(P(Q)/\sim)/R$ engendrée par les relations suivantes :

1. $\psi(e) = s(e)$ pour tout sommet e de Q_Σ .
2. Si $\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade fermée en x_0 alors

$$\psi(\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}) = \psi(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots \psi(\alpha_1)^{\varepsilon_1}.$$

3. Si α est une flèche de Q_Σ reliant \bar{a} à \bar{b} alors il existe une flèche f de Q vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f}$. Si $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ alors $\psi(\alpha)$ est l'origine de \bar{a} sinon $\psi(\alpha)$ est égal à f^{-1} .

Soit x_0 le sommet pris comme point base pour calculer $\Pi_1(Q, I)$, le sommet $x_0 = \phi(x_0)$ sera également pris comme point base pour calculer $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$. Notons également par ψ , l'application ψ restreinte à l'ensemble des promenades fermés en x_0 . Remarquons que l'image de ψ est alors incluse dans $\Pi(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$.

Montrons tout d'abord que ψ est bien définie.

1. S'il existe f et g vérifiant $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f} = \bar{g}.\bar{a}$, alors $s(\bar{a}) = s(\bar{f}) = s(\bar{b})$, $t(\bar{f}) = s(\bar{a})$ et $t(\bar{a}) = s(\bar{g})$; les applications *source* et *terminus* étant toujours utilisés sur les classes de chemins de Q et non sur les sommets de Σ . Ainsi f est une boucle d'extrémité $s(\bar{a})$. Le sommet $s(\bar{a})$ de Q et la flèche f sont parallèles et divisent f , non nul car l'idéal I est admissible ce qui interdit aux sommets et aux flèches de Q d'être dans I , ils sont R -équivalents. Grâce à un raisonnement identique sur g nous en déduisons que les deux définitions dans ce cas coïncident.
2. S'il existe f et g vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a} = \bar{g}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f} = \bar{a}.\bar{g}$, alors f et g sont des flèches parallèles divisant b , non nul car b est dans Σ , ils sont donc R -équivalents.

Montrons ensuite que l'application ψ est constante sur les classes d'équivalence et induit donc une fonction ψ_* une application de $\Pi_1(Q_\Sigma)$ dans $\Pi_1(Q, I)/H$

Vérifions cela sur les générateurs de la relation d'équivalence. Soit α une flèche de Q_Σ reliant le sommet \bar{a} au sommet \bar{b} . Il existe alors f vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f}$. Dans le premier cas insérer $\alpha^{-1}\alpha$ dans une promenade de Q_Σ n'influe pas sur l'image puisque $\psi(\alpha)$ est un sommet. Dans le deuxième cas, cela revient à insérer $f.f^{-1}$, ce qui ne change pas sa classe d'équivalence. On raisonne de la même façon sur $\alpha\alpha^{-1}$.

Considérons à présent, deux chemins c et c' de Q_Σ parallèles. Montrons que remplacer $\psi(c)$ par $\psi(c')$ dans une promenade de Q ne change pas sa classe d'équivalence. Soit $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ et $\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_{n'}$ les sommets traversés par c et c' et posons $\bar{a} = \bar{a}_1 = \bar{a}'_1$. Pour tout i , le sommet \bar{a}_i est relié au sommet \bar{a}_{i+1} donc il existe une flèche f de Q telle que $\bar{a}_{i+1} = \bar{a}_i.\bar{f}$ ou $\bar{a}_{i+1} = \bar{f}.\bar{a}_i$. Ainsi,

$$\begin{array}{ll} \exists r, s \in \mathbb{N} & \exists f_1 \dots f_{r+s} \quad \text{tels que} \quad \bar{a}_n = \overline{f_{r+1} \dots f_{r+s}.\bar{a}_1} \dots \bar{f}_r \\ \exists r', s' \in \mathbb{N} & \exists f'_1 \dots f'_{r'+s'} \quad \text{tels que} \quad \bar{a}_{n'} = \overline{f'_{r'+1} \dots f'_{r'+s'}.\bar{a}'_1} \dots \bar{f}'_{r'} \end{array}$$

On a alors $\psi(c)^{-1} = f_1.f_2 \dots f_r$ et $\psi(c')^{-1} = f'_1.f'_2 \dots f'_{r'}$. Ces chemins sont parallèles et leurs classes selon la relation \sim divisent $\bar{a}_n = \bar{a}'_{n'}$, ils sont donc R -équivalents.

Vérifions enfin que les applications ψ_* et ϕ_{**} vérifient $\psi_* \circ \phi_{**} = Id$. Ainsi, ϕ_{**} sera injective. Comme ψ_* et ϕ_{**} sont des morphismes, il suffit de vérifier cela sur les sommets et les flèches de Q_Σ . Si a est un sommet de Q , alors $\psi_* \circ \phi_{**}(a) = a$. Si f est une flèche de Q allant de a à b alors

$$\psi_* \circ \phi_{**}(f) = \psi_*(f_b^{-1}.f_a) = \psi_*(f_b)^{-1}.\psi_*(f_a) = (f^{-1})^{-1}.a = f$$

□

Corollaire IV.3.2. Soit (Q, I) une présentation quelconque d'une algèbre, alors il existe un poset Σ tel que les groupes $\Pi_1(Q, I)/R$ et $\Pi_1(Q_\Sigma)$ sont isomorphes.

Preuve. D'après le théorème (), il suffit de démontrer le résultat pour toute algèbre vérifiant la propriété (P), ce qui est l'objet du théorème. □

Corollaire IV.3.3. En particulier, si A est une algèbre simplement connexe, toutes les algèbres d'incidence construites les présentations de A sont simplement connexes.

Remarque. Pour toute présentation (Q, I) vérifiant la propriété (Q, I), nous pouvons construire un idéal \bar{I} contenant I en ajoutant les relations $c_1 + c_2$ avec c_1 et c_2 R -équivalents, de telle sorte que :

$$\Pi_1(Q_\Sigma) = \Pi_1(Q, \bar{I})$$

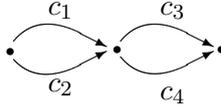
Cependant, l'idéal \bar{I} n'est pas admissible en général.

d) Cas où le morphisme est un isomorphisme.

Nous allons donner des conditions suffisantes afin d'avoir un isomorphisme entre les deux groupes fondamentaux décrits dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire pour avoir un sous-groupe H réduit à l'élément neutre.

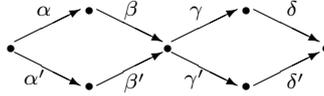
Proposition IV.4.1. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Q_Σ le carquois d'incidence associé. Alors si l'une des conditions suivantes est vérifiée, le sous-groupe H est trivial et ainsi $\Pi_1(Q_\Sigma) \simeq \Pi_1(Q, I)$.

1. L'idéal I est nul.
2. Si c_1 et c_2 sont parallèles et non équivalents alors les chemins $\omega.c_1.\omega'$ et $\omega.c_2.\omega'$ ne sont pas équivalents, pour tout chemins ω et ω' tel que les produits précédents aient un sens.
3. Si c_1 et c_2 sont parallèles alors les chemins $\omega_1.c_1.\omega_2$ et $\omega_3.c_2.\omega_4$ ne sont pas parallèles, pour tout chemin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 non tous triviaux et tels que les produits précédents aient un sens. Cette condition est indépendante de I .
4. Le couple (Q, I) est la présentation d'une algèbre incidence ou plus généralement une algèbre Schurian.
5. Le carquois Q ne contient pas de cycle et n'a pas de sous-carquois en forme de huit, c'est-à-dire de la forme :



où les flèches représentent en fait des chemins.

Remarque. Nous venons de voir que H est trivial dans le cas des algèbres Schurian. Cependant ceci n'est pas le cas dans le cadre des algèbres rétrécies. En effet, considérons le carquois Q suivant



et l'idéal $I = \langle \delta\gamma\beta\alpha - \delta'\gamma'\beta'\alpha' \rangle$. L'algèbre kQ/I est une algèbre rétrécie non Schurian et le sous-groupe H est isomorphe à \mathbb{Z} .

Preuve de la proposition.

1 : Dans le cas où $I = 0$, deux chemins équivalents par la relation \sim sont deux chemins identiques. Ainsi si c_1 et c_2 parallèles divisent un même chemin d , alors c_1 et c_2 sont identiques, et $\overline{c_1} = \overline{c_2}$ n'apporte aucun générateur à H .

2 : C'est une traduction de la définition.

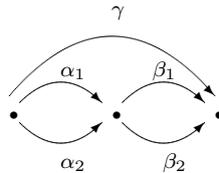
3 : Si les multiples des c_1 et c_2 ne sont jamais parallèles, ils ne peuvent être équivalents.

4 : soit c_1 et c_2 deux chemins parallèles divisant deux chemins d_1 et d_2 équivalents et non nuls. Ceci entraîne que c_1 et c_2 sont parallèles et non nuls. Comme l'algèbre est une algèbre Schurian, ces deux chemins sont équivalents.

5 : soit c_1 et c_2 deux chemins parallèles divisant deux chemins d_1 et d_2 équivalents. Comme ils n'existe pas de carquois en huit et de cycles alors il existe ω et ω' tels que $d_1 = \omega.c_1.\omega'$

et $d_2 = \omega.c_2.\omega'$. Alors comme d_1 et d_2 sont équivalents alors $\omega^{-1}.d_1.\omega'^{-1}$ et $\omega'^{-1}.d_2.\omega^{-1}$ sont équivalents et ainsi c_1 et c_2 . \square

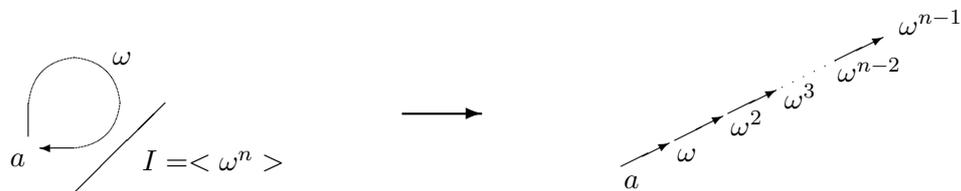
Remarque. Lorsque I est engendré par des relations minimales dont les chemins n'ont aucun sommet en commun autre que leurs extrémités, alors H n'est pas forcément trivial. En effet considérons le carquois suivant et l'idéal $I = \langle \beta_1\alpha_1 - \gamma, \beta_2\alpha_2 - \gamma \rangle$



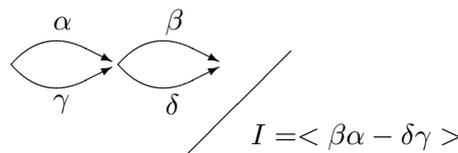
Le sous-groupe H est alors engendré par $\alpha_1\alpha_2^{-1} = \alpha_1\beta_2\beta_1^{-1}\alpha_1$ en prenant l'origine de α_1 comme point base pour calculer le groupe fondamental. Il est donc isomorphe à \mathbb{Z} .

5. Exemples et influence de la présentation.

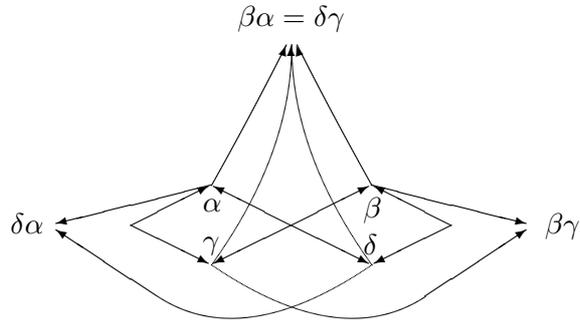
Exemple V.1. Ces premiers exemples ont pour but de montrer des cas très simples où le sous groupe H n'est pas trivial.



Dans cet exemple, le sommet a et la flèche ω divisent ω . Donc H est égal au groupe fondamental de (Q, I) . Sur la droite, nous trouvons le carquois d'incidence associé dont le groupe fondamental est trivial. Considérons à présent le carquois suivant :

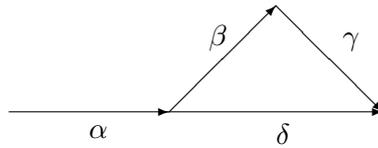


L'algèbre d'incidence associée a pour carquois :

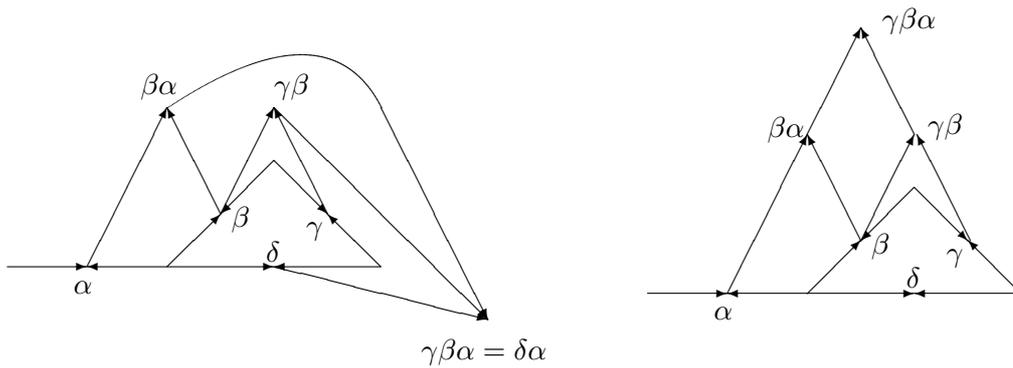


Dans ce cas les flèches α , γ et β , δ divisent $\beta\alpha = \delta\gamma$. La relation R est engendré par $\alpha R \gamma$ et $\beta R \delta$.

Exemple V.2. Reprenons l'exemple montrant que le groupe fondamental dépend de la présentation choisie pour décrire l'algèbre (cf.). Cet exemple montre que l'algèbre d'incidence associée dépend également de la présentation. En effet considérons le carquois Q :



et deux idéaux $I_1 = \langle \gamma\beta\alpha - \delta\alpha \rangle$ et $I_2 = \langle \delta\alpha \rangle$ de kQ . Les deux algèbres kQ/I_1 et kQ/I_2 sont isomorphes (cf.). Construisons à présent les carquois d'incidence $\Sigma_{(Q, I_1)}$ et $\Sigma_{(Q, I_2)}$ qui en découlent :

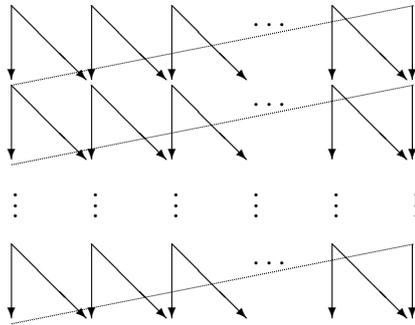


Pour la présentation (Q, I_1) , le groupe fondamental est trivial (voir), le carquois d'incidence associé a donc également un groupe fondamental réduit à 1 d'après le théorème (Ch0: IV.3.2). Quand au deuxième carquois d'incidence, son groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} . Pour voir cela, calculons le groupe H associé à $\Pi_1(Q, I_2)$. Seuls les chemins δ et $\gamma\beta$ sont parallèles et non équivalents. Le groupe H est donc engendré par la relation $\beta\alpha - \delta\gamma\alpha$ en prenant l'origine de α

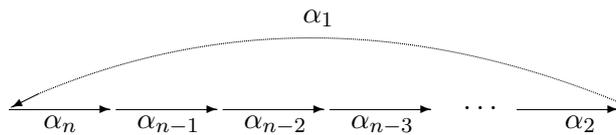
comme point base pour calculer le groupe fondamental. Cependant cette relation est triviale dans $\Pi_1(Q, I_2)$ et ainsi H est réduit à 1. Le groupe fondamental de $\Sigma_{(Q, I_2)}$ est donc isomorphe à $\Pi_1(Q, I_2)$ d'après le théorème (Ch0 : IV.3.2) qui lui-même est isomorphe à \mathbb{Z} d'après ().

Il existe donc deux présentations d'une même algèbre dont les carquois d'incidence donnent des groupes fondamentaux différents ; le groupe fondamental de l'algèbre d'incidence construit dépend donc également de la présentation de l'algèbre.

Exemple V.3. Dans cet exemple, on retrouve de façon élémentaire le groupe fondamental d'un type particulier d'algèbre d'incidence et donc de son premier groupe de cohomologie de Hochschild, ce sont les algèbres d'incidence dont le carquois associé est une couronne, c'est-à-dire un carquois du type :



Elles ont été considérées dans [GS] et le calcul a été effectué dans [GR]. Pour cela, considérons le carquois cyclique Q_n suivant :



Soient p et q des entiers naturels tels que $q < n$. Considérons l'idéal I_{pq} de kQ_n engendré par tous les chemins de Q_n de longueur $p \times n + q$. Alors le carquois d'incidence associé à (Q_n, I_{pq}) est la couronne précédemment décrite avec n sommets sur l'horizontale et $n \times p + q$ sommets sur la verticale. Les sommets de la première ligne représentent les sommets de Q_n , les sommets de la seconde les flèches de Q_n , ceux de la troisième les chemins de longueur 2 de Q_n , etc.

Il suffit donc de trouver le groupe fondamental de Q_n et le groupe H . En ce qui concerne le groupe fondamental, il ne varie pas en fonction de I_{pq} car I_{pq} ne contient que des relations minimales à un terme. Il est donc isomorphe à \mathbb{Z} . Pour le sous groupe H , deux cas se présentent. Si $p = 0$, il n'existe pas de chemins non nuls parallèles donc H est nul et $\Pi_1(Q_c, I_{pq})$ est isomorphe à \mathbb{Z} . Si $p \neq 0$, le chemin $\alpha_1 \dots \alpha_n$ et l'origine de α_1 divisent tous les deux $\alpha_1 \dots \alpha_n$, le sous-groupe H contient un générateur de $\Pi_1(Q_c, I_{pq})$, donc $\Pi_1(Q_c, I_{pq})/H$ est trivial.

Ainsi, le groupe fondamental d'une couronne $C_{n,p,q}$ à n colonnes et à $pn + q$ lignes est :

$$\Pi_1(C_{n,p,q}, I_{C_{n,p,q}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Pour une autre démonstration, voir [GR].

De plus comme $\text{Hom}(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq \text{HH}^1(kQ/I)$ dans le cas d'un algèbre d'incidence, on peut en déduire que le premier groupe de Hochschild de l'algèbre d'incidence de la couronne vaut k si $p = 0$ et 0 sinon.

6. Bibliographie

- [AP] I. ASSEM et J.A. DE LA PEÑA, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra, 24(1), p.187-208 (1996).
- [Ber] M. BERGER, *Géométrie*, Nathan (1990).
- [Bus] J.C. BUSTAMANTE, *On the fundamental group of a schurian algebra*, preprint, 2001.
- [BG] K. BONGARTZ et P. GABRIEL, *Covering Spaces in representation-Theory*, Invent. Math. 65, p.331-378 (1982).
- [BM] M.J. BARDZELL et E.N. MARCOS, *H^1 and presentations of finite dimensional algebras*, préprint 2001.
- [Ci1] C. CIBILS, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complex*, J. Pure Appl. Algebra 56 p.221-232 (1989).
- [Ci2] C. CIBILS, *Complexes simpliciaux et carquois*, C.R. Acad. Sci. Paris t.307, Serie I, p.929-934 (1988).
- [Ci3] C. CIBILS, *On the Hochschild cohomologie of finite dimensional algebras*, Comm. in Algebra, 16, p645-649 (1988), p.647.
- [CLS] C. CIBILS, F. LARRION et L. SALMERON, *Méthodes diagrammatiques en représentation d'algèbres de dimensions finie*, publications internes de la section de mathématiques de l'université de Genève.
- [DK] Yu.A. DROZD, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, (1980).
- [Gab] P. GABRIEL, *Indecomposable representation II*, Symposia Mathematica II (Istituto Nazionale di alta Matematica), Roma, p.81-104 (1973).
- [GRo] P. GABRIEL et A.V. ROITER *Representations of finite-dimensional Algebras*, Springer, 1997.
- [GR] M. A. GATICA et M. J. REDONDO, *Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras*, à paraître dans Comm. Algebra.
- [GS] M. GERSTENHABER et S.P. SCHACK, *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 30 p.143-156 (1983).
- [Gre] E.L. GREEN, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 297-310.
- [Hap] D. HAPPEL, *Hochschild Cohomologie of finite dimensional algebras*, p.108-126. Number 1404 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1989.
- [HS] P.J. HILTON et U. STAMMBACH, *A course in Homological Algebra*, Springer (1996).
- [HW] P.J. HILTON et S. WYLIE, *An introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University press (1967).

- [Mas] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology : an Introduction*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin (1989).
- [MP] R. MARTINEZ-VILLA et J.A. DE LA PEÑA, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra 30, p.277-292 (1983).
- [PS] J.A. DE LA PEÑA et M. SAORIN, *The first Hochschild cohomology group of an algebra*, preprint.
- [Pe] J.A. DE LA PEÑA, *On the abelian Galois covering of an algebra*, J. Algebra 102(1) p.129-134 (1986).
- [Red] M.J. REDONDO, *Cohomología de Hochschild de álgebras de Artin*, preprint.
- [Rey] E. REYNAUD, *Algebraic fundamental group and simplicial complexes*, à paraître dans J. Pure Appl. Algebra.
- [Rot] J. ROTMAN, *An introduction to Homological Algebra*, Academic press, inc. (1979).
- [Sko] A. SKOWRONSKI, *Simply connected algebras and Hochschild cohomologie*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. 14 (1993), 431-447.
- [Wei] C. WEIBEL, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge Univerty Press, (1997).