



**HAL**  
open science

## Isomotifs de dimension inférieure ou égale à un

Fabrice Orgogozo

► **To cite this version:**

Fabrice Orgogozo. Isomotifs de dimension inférieure ou égale à un. *Manuscripta mathematica*, 2004, 115 (3), pp.339-360. 10.1007/s00229-004-0495-4 . hal-00196655

**HAL Id: hal-00196655**

**<https://hal.science/hal-00196655>**

Submitted on 13 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# ISOMOTIFS DE DIMENSION INFÉRIEURE OU ÉGALE À UN

par

Fabrice Orgogozo

---

**Résumé.** — Après avoir rappelé certains résultats établis par V. Voevodsky dans [Voe00], on démontre l'équivalence de catégories, annoncée dans *loc. cit.* § 3.4 (p. 218), entre la catégorie dérivée des 1-isomotifs de P. Deligne sur un corps parfait et la catégorie triangulée des motifs géométriques effectifs de dimension au plus 1.

## Introduction

Dans [Voe00], Vladimir Voevodsky définit, pour tout corps  $k$ , deux catégories triangulées, notées  $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)$  et  $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$ . Il construit un foncteur  $[\cdot]$  de la catégorie des  $k$ -schémas algébriques lisses vers  $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)$  et, pour  $k$  parfait, un foncteur pleinement fidèle  $i : DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k) \hookrightarrow DM_{-}^{\text{eff}}(k)$ . On pourrait espérer munir  $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)$  d'une  $t$ -structure dont le coeur serait la catégorie des *motifs mixtes* sur  $k$ , dont l'existence avait été conjecturée par Alexandre Grothendieck. Cela n'est en général pas possible à moins peut-être de se restreindre aux coefficients rationnels (*cf. loc. cit.* 4.3.8). D'un autre côté, Pierre Deligne définit dans [Del74], § 10 la catégorie additive des 1-motifs sur un corps. Après tensorisation par  $\mathbf{Q}$ , elle devient abélienne et est appelée catégorie des 1-isomotifs sur  $k$ ; on la note  $1 - \text{isomot}(k)$ . L'objet de ces notes est de construire (pour  $k$  parfait) un foncteur

$$D^b(1 - \text{isomot}(k)) \rightarrow DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k) \otimes \mathbf{Q},$$

de montrer qu'il induit une équivalence de catégories entre  $D^b(1 - \text{isomot}(k))$  et la sous-catégorie épaisse strictement pleine de  $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k) \otimes \mathbf{Q}$  engendrée par les motifs  $[X]$ , où  $X$  est un  $k$ -schéma algébrique lisse de dimension au plus 1 (sous-catégorie que l'on note  $d_1 DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)_{\mathbf{Q}}$ ). Ce résultat est annoncé sans démonstration par V. Voevodsky dans [Voe00], §3.4 (p. 218) et énoncé dans une lettre à Alexander Beilinson datant de décembre 1992. Il semble depuis bien connu des spécialistes. L'objectif de ces notes est donc de combler ce vide dans la littérature, tout en rappelant au lecteur certains des résultats essentiels d'Andreï Suslin et V. Voevodsky.

Le plan est le suivant : on commence par définir les catégories triangulées  $d_n DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)$  (resp.  $d_n DM_{-}^{\text{eff}}(k)$ ) pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$  ainsi que le foncteur  $i$ , faisant intervenir un complexe dit de Suslin. Dans la partie suivante, on montre que la catégorie dérivée des motifs d'Artin à coefficients rationnels est canoniquement équivalente à  $d_0 DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)_{\mathbf{Q}}$ . L'analogue à coefficients entiers ainsi qu'une description de  $d_0 DM_{-}^{\text{eff}}(k)$  seront également considérés. Enfin on démontre dans une dernière partie l'équivalence annoncée, après avoir rappelé le calcul de l'homologie du complexe des chaînes singulières, dû à A. Suslin et V. Voevodsky [SV96].

Cet article est une version largement remaniée d'un exposé fait au CIRM en janvier 2000; lors de la préparation de cet exposé j'avais bénéficié des explications de Fabien Morel, qui m'avait introduit alors à la théorie de V. Voevodsky. Je lui en suis très reconnaissant.

C'est également avec grand plaisir que je remercie Luc Illusie, Bruno Kahn, Joël Riou et Tamás Szamuely pour leurs commentaires sur ce texte. Enfin, je remercie le rapporteur pour sa relecture patiente et minutieuse ainsi que pour ses demandes d'éclaircissements et commentaires qui profiteront sans aucun doute au lecteur.

### 1. Rappels sur la catégorie triangulée des motifs géométriques

Soient  $k$  un corps commutatif,  $\eta = \text{Spec}(k)$  et  $\mathcal{L}(\eta)$  la catégorie des  $\eta$ -schémas quasi-projectifs lisses. L'hypothèse de quasi-projectivité n'est utilisée qu'à partir du numéro 3.1.2. (Ce n'est pas la convention faite dans [Voe00], cependant elle conduit à des catégories triangulées équivalentes.) Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets de cette catégorie, on note  $c(X, Y)$  le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X \times_{\eta} Y$  qui sont finis sur  $X$  et surjectifs sur une des composantes connexes. De telles correspondances se composent (cf. [Voe00], 2.1) ce qui nous permet de définir une catégorie additive  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  ayant pour objets les mêmes que ceux de  $\mathcal{L}(\eta)$  et pour morphismes entre  $X$  et  $Y$  les correspondances précédentes. En particulier, on a un foncteur covariant

$$[\cdot] : \mathcal{L}(\eta) \rightarrow \mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$$

donné sur les morphismes par le graphe. (Dans sa construction de motifs de Chow, A. Grothendieck prend la convention opposée et obtient un foncteur *contravariant* de la catégorie des  $\eta$ -schémas projectifs et lisses vers  $\text{Chow}^{\text{Gro}}(\eta)$ .) La somme directe dans  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  est donnée sur les objets par la somme disjointe des schémas.

La catégorie des *motifs géométriques effectifs*

$$\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$$

s'obtient à partir de la catégorie additive  $\text{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))$  par localisation puis passage à l'enveloppe pseudo-abélienne (ou *Karoubienne*). La localisation s'effectue en divisant par la sous-catégorie *épaisse* (cf. [Nee01], 2.1.6)  $\mathcal{S}$  engendrée par les complexes  $[\mathbf{A}_X^1] \rightarrow [X]$  et les  $[U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V] \rightarrow [X]$  pour  $X$  la réunion des ouverts  $U$  et  $V$ . Après passage à l'enveloppe pseudo-abélienne (de sorte que tout projecteur correspond à une décomposition en somme directe), c'est encore naturellement une catégorie triangulée, cf. [BS01] 1.5.

Il est commode d'introduire la catégorie  $\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$  des *complexes motiviques effectifs*; elle a entre autres avantages celui de posséder certains *Hom* internes<sup>(i)</sup>. Un préfaisceau (abélien) *avec transferts* est un foncteur additif contravariant sur  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  à valeur dans la catégorie des groupes abéliens. Il est dit de *Nisnevich* si c'est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Rappelons que si  $X$  est un schéma hensélien, le topos  $X_{\text{Nis}}$  associé est local. Les préfaisceaux représentables sur  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  sont des faisceaux de Nisnevich et tautologiquement munis de transferts. Un préfaisceau avec transferts  $\mathcal{F}$  est dit *invariant par homotopie* si pour tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$ , le morphisme  $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{A}_X^1)$  induit par la projection est un isomorphisme. Notons  $\text{NisTrans}(\eta)$  la catégorie abélienne des faisceaux de Nisnevich avec transferts. La catégorie

$$\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$$

est la sous-catégorie pleine de  $\text{D}^{-}(\text{NisTrans}(\eta))$  constituée des complexes à cohomologie invariante par homotopie.

Rappelons maintenant la définition, due à A. Suslin, du complexe des chaînes singulières associé à un faisceau de Nisnevich avec transferts  $\mathcal{F}$ . Soit  $\Delta^{\bullet}$  l'objet cosimplicial standard dans  $\mathcal{L}(\eta)$  et notons  $C_{\bullet}(\mathcal{F})$  le complexe de faisceaux abéliens associé à l'objet simplicial  $T \mapsto C_n(\mathcal{F})(T) := \mathcal{F}(T \times_{\eta} \Delta^n)$ , avec la convention classique  $C_i = C^{-i}$ . On note  $h_i(\mathcal{F})$  le faisceau de Nisnevich avec transferts  $H^{-i}(C_{\bullet}(\mathcal{F}))$ ; il est automatiquement invariant par homotopie (cf. [Voe00] 3.2.1). Par composition avec le foncteur *complexe simple associé*, on en déduit un foncteur  $\text{K}^{-}(\text{NisTrans}(\eta)) \xrightarrow{\text{sc}} \text{D}^{-}(\text{NisTrans}(\eta))$ , qui se factorise en  $\text{K}^{-}(\text{NisTrans}(\eta)) \xrightarrow{\text{C}} \text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta) \hookrightarrow \text{D}^{-}(\text{NisTrans}(\eta))$ . De plus,

<sup>(i)</sup>Nous renvoyons le lecteur à [Voe00], § 3.2 pour la définition de la structure tensorielle sur  $\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$ .

la catégorie triangulée  $K^-(\text{NisTrans}(\eta))$  reçoit naturellement la catégorie  $K^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))$  en associant à un complexe d'objets de  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$ , le complexe de faisceaux de Nisnevich avec transferts qu'ils représentent :

$$(\cdots \rightarrow X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \cdots) \mapsto (\cdots \rightarrow c(-, X_{i-1}) \rightarrow c(-, X_i) \rightarrow c(-, X_{i+1}) \rightarrow \cdots).$$

Finalement, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)) & \longrightarrow & K^-(\text{NisTrans}(\eta)) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \mathbf{c} \\ \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta) & \xrightarrow{i} & \text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta) \end{array}$$

Si  $k$  est parfait, on montre (*loc. cit.* 3.2.6) que la flèche diagonale se factorise par un foncteur  $i$  qui est pleinement fidèle. De plus,  $i$  est d'image *dense*, en ce sens que la catégorie *localisante* (*cf.* [Nee01], 3.2.6) engendrée par l'image est  $\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$  tout entier.

**Convention :** dorénavant,  $\eta$  est le spectre d'un corps parfait.

Soit  $i \in \mathbf{N}$  un entier. Notons  $\mathcal{L}\text{Corr}_i(\eta)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  dont les objets sont les  $\eta$ -schémas quasi-projectifs lisses de dimension inférieure à  $i$ . On note  $d_i\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  (resp.  $d_i\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$ ) la sous-catégorie épaisse (resp. localisante) strictement pleine de  $\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  (resp.  $\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$ ) engendrée par les objets  $[X]$  (resp. les complexes  $C_{\bullet}([X]) := C_{\bullet}(c(-, X))$ ), où  $X \in \text{Ob } \mathcal{L}\text{Corr}_i(\eta)$ .

## 2. Motifs de dimension nulle

On reprend dans cette partie, en donnant des démonstrations détaillées, les premiers résultats de [Voe00], § 3.4.

Notons  $\bar{\eta}$  le spectre d'une clôture séparable quelconque de  $\kappa(\eta)$  et  $\pi$  le groupe de Galois  $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ . Rappelons ([SGA<sub>4</sub> VIII 2.1]) que le foncteur  $X \rightsquigarrow X(\bar{\eta})$ , de la catégorie des  $\eta$ -schémas étales vers la catégorie des ensembles discrets sur lesquels  $\pi$  agit continûment est une équivalence de catégories. Une quasi-inverse est donné par  $E \rightsquigarrow \text{Spec Hom}_{\pi\text{-ens}}(E, \kappa(\bar{\eta}))$ . Le schéma  $X$  est connexe si et seulement si l'action de  $\pi$  sur l'ensemble  $X(\bar{\eta})$  est transitive. Notons  $\text{Perm}_{\mathbf{Z}}(\eta)$ , ou bien  $\text{Perm}(\eta)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\mathbf{Z}[\pi])$  dont les objets sont les  $\mathbf{Z}[\pi]$ -modules de permutation, c'est-à-dire les modules de la forme  $\mathbf{Z}[E]$ , où  $E$  est un  $\pi$ -ensemble fini continu. Il résulte du rappel précédent que le foncteur naturel des  $\eta$ -schémas étales de type fini vers  $\text{Perm}(\eta)$  est fidèle. Montrons qu'il s'étend en un foncteur  $\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta) \rightarrow \text{Perm}(\eta)$ . Soient  $X$  et  $X'$  deux  $\eta$ -schémas étales finis. Une correspondance intègre  $Z \in c(X, X')$  est un sous-schéma intègre de  $X \times_{\eta} X'$ ; il est nécessairement étale sur  $\eta$  et s'identifie à une composante connexe de  $X \times_{\eta} X'$  c'est-à-dire, par la théorie de Galois, à une  $\pi$ -orbite de  $X(\bar{\eta}) \times X'(\bar{\eta})$ . À  $Z$  on associe donc une application  $\pi$ -équivariante  $\chi_Z : X(\bar{\eta}) \times X'(\bar{\eta}) \rightarrow \mathbf{Z}$ , sa fonction caractéristique, dont on déduit un morphisme de  $\mathbf{Z}[\pi]$ -modules  $\varphi_Z : \mathbf{Z}[X(\bar{\eta})] \rightarrow \mathbf{Z}[X'(\bar{\eta})]$ . Si  $Z$  n'est plus supposé connexe mais s'écrit  $Z = \sum n_i Z_i$ , avec  $Z_i$  intègre pour tout  $i$ , on pose  $\varphi_Z = \sum n_i \varphi_{Z_i}$ . Réciproquement, tout tel morphisme dans  $\text{Perm}(\eta)$  s'obtient ainsi; on a donc démontré la proposition :

**2.1 Proposition.** — *Le foncteur additif  $\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta) \rightarrow \text{Perm}(\eta)$  ainsi construit est une équivalence de catégories.*

L'inclusion  $\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta) \hookrightarrow \mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  induit un foncteur  $K^b(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta)) \rightarrow K^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))_{\mathcal{I}, \mathcal{F}}$ , qui se factorise à travers  $d_0 K^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))_{\mathcal{I}, \mathcal{F}}$ , définie de manière analogue à  $d_0 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  mais sans passage à l'enveloppe pseudo-abélienne.

**2.2 Proposition.** — *Le foncteur  $K^b(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta)) \rightarrow d_0 K^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))_{\mathcal{I}, \mathcal{F}}$  est une équivalence de catégories triangulées.*

Par passage à l'enveloppe pseudo-abélienne, notée avec un indice  $(\ )_{\text{psab}}$ , il résulte de **2.1** et **2.2** que l'on a une équivalence de catégories :

$$\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta))_{\text{psab}} \rightarrow d_0\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta).$$

*Démonstration du théorème 2.2.* — Il s'agit de montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux complexes de  $\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))$ , constitués de schémas de dimension 0, le morphisme  $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))_{\mathcal{T}}}(A, B)$  est un isomorphisme. Par définition des morphismes dans une catégorie localisée, et puisqu'on a calcul des fractions, on a :

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))_{\mathcal{T}}}(A, B) = \text{colim} \text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))}(A', B),$$

où la colimite est relative aux flèches  $A' \rightarrow A$  dont le cône est dans  $\mathcal{T}$ . Par dévissage, on peut supposer que  $B$  est concentré en un seul degré :  $B = [\eta'] [i]$ , où  $\eta'/\eta$  est fini étale et  $i \in \mathbf{Z}$ . On se ramène donc à prouver le lemme suivant :

**2.3 Lemme.** — *Pour tout objet  $T \in \text{Ob } \mathcal{T}$ , tout  $\eta$ -schéma fini étale  $\eta'$  et tout entier  $i \in \mathbf{Z}$ , on a  $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}(\eta))}(T, [\eta'] [i]) = 0$ .*

*Démonstration de 2.3.* — Par dévissage, on peut supposer que  $T$  est de la forme  $[\mathbf{A}_X^1] \rightarrow [X]$  (cas a.) (resp.  $[U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V] \rightarrow [X]$  (cas b.) avec  $[\mathbf{A}_X^1]$  (resp.  $[U] \oplus [V]$ ) placé en degré 0 et  $X$  un  $\eta$ -schéma algébrique lisse.

Cas a. Traitons d'abord le cas où  $i = 0$ . Il faut montrer que si  $f : \mathbf{A}_X^1 \rightarrow \eta'$  est un morphisme de  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$ , il existe un morphisme  $g : X \rightarrow \eta'$  tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & [\mathbf{A}_X^1] & \longrightarrow & [X] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow f & \swarrow g & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & [\eta'] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

soit commutatif, de sorte que le morphisme de complexes  $T \rightarrow [\eta'] [0]$  soit homotope au morphisme nul. Le schéma  $\eta'$  est de dimension 0 donc pour tout  $\eta$ -schéma algébrique lisse  $Y$ ,

$$\mathbf{H}^0(Y_{\eta'}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} c(Y, \eta').$$

Il s'agit donc de montrer que le morphisme canonique  $\mathbf{H}^0(X_{\eta'}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathbf{A}_{X_{\eta'}}^1, \mathbf{Z})$  est surjectif. C'est même un isomorphisme, compte tenu de l'invariance par homotopie de  $\pi_0$ , qui traduit le fait élémentaire que si  $A$  est un anneau sans idempotent non trivial, il en est de même de  $A[x]$ , où  $x$  est une indéterminée. Le cas où  $i = 1$  se traite de même ; les autres cas sont triviaux.

Cas b. Soit  $U, V$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Traitons d'abord le cas  $i = 0$ . On doit montrer que pour tout morphisme  $f : [U \amalg V] = [U] \oplus [V] \rightarrow [\eta']$  dans  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$ , il existe un morphisme  $g : [X] \rightarrow [\eta']$  qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & [U \cap V] & \longrightarrow & [U] \oplus [V] & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & \swarrow g & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & [\eta'] & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cela revient à montrer que l'injection naturelle

$$\text{Im}(\mathbf{Z}(X_{\eta'}) \rightarrow \mathbf{Z}(U_{\eta'} \amalg V_{\eta'})) \hookrightarrow \text{Ker}(\mathbf{Z}(U_{\eta'} \amalg V_{\eta'}) \rightarrow \mathbf{Z}(U_{\eta'} \cap V_{\eta'}))$$

est un isomorphisme. Cela résulte du fait que le diagramme  $\mathbf{Z}(X_{\eta'}) \rightarrow \mathbf{Z}(X'_{\eta'}) \rightrightarrows \mathbf{Z}(X'_{\eta'} \times_{X_{\eta'}} X'_{\eta'})$  est exact, où l'on a posé  $X' = U \amalg V$ , compte tenu du fait que  $X' \times_X X' \xrightarrow{\sim} X' \amalg (U \cap V)$  (de même après changement de base à  $\eta'$ ). Les cas  $i \in \{-1, 1\}$  ne présentent guère plus de difficulté tandis que pour  $|i| > 1$ , le résultat est évident. Cela conclut la démonstration du lemme et du théorème.  $\square$

$\square$

Voyons maintenant une variante à coefficients rationnels. Soit  $\text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi)$  la catégorie des  $\mathbf{Q}[\pi]$ -modules continus de dimension finie sur  $\mathbf{Q}$ . Il résulte du lemme de Maschke qu'elle est abélienne semi-simple. En particulier, les foncteurs

$$\mathbf{K}^b(\text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi))_{\text{psab}} \leftarrow \mathbf{K}^b(\text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi))$$

sont des équivalences de catégories. Ces catégories sont aussi équivalentes à la catégorie  $\mathbf{Q}[\pi]$ -mod.- $\mathbf{Z}$ -gradués des  $\mathbf{Q}[\pi]$ -modules continus de dimension finie,  $\mathbf{Z}$ -gradués. Notons  $\text{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi)$  la catégorie des représentations de permutation à coefficients rationnels.

**2.4 Lemme.** — *Le foncteur*

$$\mathbf{K}^b(\text{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi))_{\text{psab}} \rightarrow \mathbf{K}^b(\text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi))_{\text{psab}} \simeq \mathbf{Q}[\pi]\text{-mod.-}\mathbf{Z}\text{-gradués}$$

déduit du foncteur pleinement fidèle  $\text{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\text{cont}}(\pi)$  est une équivalence de catégories.

On retrouve donc les motifs d'Artin, définis par A. Grothendieck.

*Démonstration.* — La pleine fidélité du foncteur est évidente. Soit  $M$  une représentation (continue, de dimension finie) quelconque de  $\pi$  et montrons qu'elle est dans l'image essentielle de ce foncteur. On peut supposer  $M$  irréductible. Soit  $G$  un quotient fini à travers lequel l'action de  $\pi$  sur  $M$  se factorise. Il est bien connu qu'en caractéristique 0, toute représentation irréductible d'un groupe fini est facteur direct de la représentation régulière. La représentation  $M$  coïncide donc avec l'image d'un idempotent  $p : \mathbf{Q}[G] \rightarrow \mathbf{Q}[G]$  de  $\text{Perm}_{\mathbf{Q}}(\eta)$ . Le résultat en découle puisque, par définition,  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi))_{\text{psab}}$  est pseudo-abélienne.  $\square$

Rappelons qu'il est nécessaire de se restreindre aux représentations de dimension finie *continues* de  $\pi$ . En effet, il est facile de construire, par exemple, des morphismes non continus  $\mathbf{Z}_p \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{Q})$  pour tout  $n > 1$ . De même la semi-simplicité deviendrait fautive si l'on considérait les représentations  $\ell$ -adiques de dimension finie continues.

Le lemme précédent s'interprète plus suggestivement comme un isomorphisme :

$$d_0\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{Q}[\pi]\text{-mod.-}\mathbf{Z}\text{-gradués.}$$

Avant d'énoncer le théorème de comparaison pour  $d_0\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)$ , commençons par un lemme :

**2.5 Lemme.** — *Pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  invariant par homotopie, le morphisme  $C_0(\mathcal{F}) \rightarrow C_{\bullet}(\mathcal{F})$  est un quasi-isomorphisme. En particulier, si  $p : X \rightarrow \eta$  est un  $\eta$ -schéma algébrique étale, le morphisme de complexes  $C_{\bullet}([X]) \leftarrow C_0([X]) \simeq p_*\mathbf{Z} =: \mathbf{Z}^{X/\eta}$  est un quasi-isomorphisme.*

*Démonstration.* — Comme  $\mathcal{F}$  est invariant par homotopie, le complexe  $C_{\bullet}(\mathcal{F})$  est isomorphe au complexe :

$$(\dots \mathcal{F} \xrightarrow{0} \mathcal{F} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{F} \xrightarrow{0} \mathcal{F} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots),$$

où le dernier  $\mathcal{F}$  est placé en degré 0. Le résultat annoncé en découle. Le cas particulier résulte de l'invariance par homotopie de  $c(-, X) = \mathbf{Z}^{X/\eta}$ .  $\square$

En particulier, pour deux  $\eta$ -schémas étales finis  $X$  et  $Y$ , le morphisme induit par le foncteur  $H^0$ ,

$$\text{Hom}_{\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)}(C_{\bullet}([X]), C_{\bullet}([Y])) \leftarrow \text{Hom}_{\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{Z}^{X/\eta}, \mathbf{Z}^{Y/\eta}) \stackrel{2.1}{\simeq} c(X, Y)$$

est un isomorphisme.

Pour toute catégorie additive  $C$ , notons  $\mathcal{F}(C)$  la catégorie des foncteurs additifs contravariants de  $C$  dans la catégorie des groupes abéliens. Le foncteur  $\text{Perm}(\eta) \rightarrow \mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))$ , qui à  $X$  associe  $h_X = \text{Hom}(-, X)$ , est pleinement fidèle et tautologiquement à valeurs dans la sous-catégorie pleine  $\mathbf{P}$  des objets projectifs de  $\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))$ . Ainsi, son extension en un foncteur  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  est encore pleinement fidèle.

**2.6 Lemme.** — *L'image du foncteur composé  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta)) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  est dense.*

Rappelons que cela signifie que la sous-catégorie localisante engendrée par l'image est la catégorie  $\mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  toute entière.

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que la catégorie  $\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))$  a suffisamment d'objets projectifs. En effet tout faisceau  $\mathcal{G}$  est canoniquement quotient de  $\bigoplus_{(X,x)} h_X \rightarrow \mathcal{G}$ , où  $X$  décrit les objets de  $\text{Perm}(\eta)$  et  $x \in \mathcal{G}(X) = \text{Hom}(h_X, \mathcal{G})$ . De plus toute somme directe d'objets projectifs est un objet projectif. Ainsi, le foncteur canonique  $\mathbf{K}^-(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  — où  $\mathbf{P}$  désigne à nouveau la catégorie des objets projectifs de  $\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))$  — est une équivalence. Le foncteur  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta)) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^-(\mathbf{P})$  se factorise à travers  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta)) \rightarrow \mathbf{K}^b(\mathbf{P})$ , trivialement d'image dense. Il reste donc à montrer que la sous-catégorie  $\mathbf{K}^b(\mathbf{P})$  de  $\mathbf{K}^-(\mathbf{P})$  est dense, ce qui est un fait général. Soit  $K$  un objet de  $\mathbf{K}^-(\mathbf{P})$  et notons, pour chaque  $i \in \mathbf{Z}$ ,  $\sigma_{\geq i} K$  le tronqué naïf :  $(\sigma_{\geq i} K)^\alpha = K^\alpha$  si  $\alpha \geq i$  et 0 sinon. Les morphismes canoniques  $\sigma_{\geq i} K \rightarrow K$  s'additionnent pour donner un morphisme

$$K' := \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \sigma_{\geq i} K \rightarrow K.$$

Pour chaque  $\alpha \in \mathbf{Z}$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K'^\alpha = \bigoplus_{i \leq \alpha} K^\alpha & \xrightarrow{\text{somme}} & K^\alpha \\ \downarrow \bigoplus_{i \leq \alpha} d_\alpha \oplus 0 & & \downarrow d_\alpha \\ K'^{\alpha+1} = \bigoplus_{i \leq \alpha+1} K^{\alpha+1} & \xrightarrow{\text{somme}} & K^{\alpha+1} \end{array}$$

Pour chaque  $i \in \mathbf{Z}$ , on a un morphisme canonique  $\sigma_{\geq i+1} K \rightarrow \sigma_{\geq i} K$ . Cependant, définissons un autre morphisme  $f : K'' := \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \sigma_{\geq i+1} K \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \sigma_{\geq i} K = K'$ . En degré  $\alpha$ ,

$$f^\alpha : K''^\alpha = \bigoplus_{i \leq \alpha-1} K^\alpha \rightarrow \bigoplus_{i \leq \alpha} K^\alpha = K'^\alpha,$$

est donné par

$$f^\alpha((\dots, x_{\alpha-1})) = (\dots, x_{\alpha-1}, - \sum_{i \leq \alpha-1} x_i).$$

On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow K'' \xrightarrow{f} K' \rightarrow K \rightarrow 0,$$

scindée degré à degré. Comme  $K''$  et  $K'$  appartiennent à l'adhérence de l'image de  $\mathbf{K}^b(\mathbf{P})$  dans  $\mathbf{K}^-(\mathbf{P})$ , cela achève la démonstration du lemme.  $\square$

Le foncteur de restriction  $r_* : \text{NisTrans}(\eta) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta)) \simeq \mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))$  admet un adjoint à gauche  $r^*$  : tout objet de  $\mathcal{F}(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta))$  est canoniquement colimite de préfaisceaux représentables ; cette colimite, vue dans  $\text{NisTrans}(\eta)$ , donne l'adjoint cherché. Son image est constituée de faisceaux invariants par homotopie. Cet adjoint à gauche permet donc de définir un foncteur :  $\mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))) \rightarrow \text{DM}_-^{\text{eff}}(\eta)$ , qui se factorise par  $d_0 \text{DM}_-^{\text{eff}}(\eta)$ .

**2.7 Proposition.** — *Le foncteur  $\beta : \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta))) \rightarrow d_0 \text{DM}_-^{\text{eff}}(\eta)$  ainsi construit est une équivalence de catégories triangulées.*

*Démonstration.* — Compte-tenu de [Lev98], II.2.4.8.1 et 2.4.9, la catégorie triangulée  $\mathbf{D}^b(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  est pseudo-abélienne. (Cela résulte de l'existence de coproduits dénombrables d'un même objet, cf. loc. cit.) Ainsi, le foncteur pleinement fidèle  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta)) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\text{Perm}(\eta)))$  se factorise à travers  $\mathbf{K}^b(\text{Perm}(\eta))_{\text{psab}}$ . Le foncteur  $\beta$  s'inscrit dans un diagramme essentiellement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta))_{\text{psab}} & \longrightarrow & \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta))) \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ d_0 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta) & \xrightarrow{d_0 i} & d_0 \text{DM}_-^{\text{eff}}(\eta), \end{array}$$

où l'on a identifié  $\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta)$  et  $\text{Perm}(\eta)$ . La commutativité du diagramme résulte de 2.5. En effet, pour tout  $\eta$ -schéma fini étale  $X$ , le complexe  $[X] \in \text{Ob } \mathbf{K}^b(\mathcal{L}\text{Corr}_0(\eta))_{\text{psab}}$  est envoyé sur  $c(-, X)[0] \simeq \mathbf{Z}^{X/\eta}$  par le triangle supérieur tandis qu'il est envoyé sur  $C_\bullet([X])$  par le triangle inférieur. Il résulte de 2.2 que la première flèche verticale est une équivalence. Comme les foncteurs horizontaux sont d'image dense (cf. §1 et 2.6),  $\beta$  est aussi une équivalence de catégories.  $\square$

Cela permet de munir  $d_0\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)$  d'une  $t$ -structure non dégénérée, de coeur  $\mathcal{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ .

### 3. Motifs de dimension $\leq 1$

On reprend dans cette partie les résultats de [SV96] (voir aussi [Voe00], 3.4.1) dont nous aurons besoin par la suite.

**3.1. Calcul de l'homologie du complexe des chaînes singulières de  $\mathbf{G}_m$  et des courbes propres.** — Commençons par deux lemmes bien connus.

**3.1.1 Lemme.** — *Soit  $X$  un schéma noethérien régulier. Les morphismes  $\mathbf{G}_m(X) \rightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_X^1)$  et  $\mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{A}_X^1)$  associés à la projection  $p : \mathbf{A}_X^1 \rightarrow X$  sont des isomorphismes.*

*Démonstration.* — Pour tout anneau  $A$  réduit, l'inclusion  $A^\times \rightarrow (A[x])^\times$  est un isomorphisme; l'invariance par homotopie de  $\mathbf{G}_m$  restreint aux schémas réguliers en résulte. La suite spectrale de Leray pour le morphisme  $p$  (pour la topologie étale par exemple), ainsi que l'isomorphisme  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{\sim} p_*\mathbf{G}_m$ , nous ramènent à montrer que  $R_{\mathrm{ét}}^1 p_*\mathbf{G}_m = \{1\}$  est trivial. Le morphisme  $p$  étant cohérent, il s'agit par passage aux fibres, de vérifier que si  $X'$  est local régulier, donc factoriel (cf. [Gro69] IV 21.11.1),  $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}_{X'}^1) = 0$ . Cela résulte du fait que  $\mathbf{A}_{X'}^1$  est lui aussi factoriel et que le groupe de Picard d'un tel schéma est trivial (*loc. cit.* 21.6.10).  $\square$

De plus ces faisceaux  $\mathbf{G}_m$  et  $\mathrm{Pic}$  (pour la topologie de Nisnevich) sont canoniquement munis de transferts :

**3.1.2 Lemme.** — *Soit  $G$  un  $\eta$ -schéma en groupes abéliens. Le faisceau Nisnevich qu'il représente sur  $\mathcal{L}(\eta)$  peut être muni de transferts, de façon fonctorielle en  $G$ .*

*Démonstration.* — Soient  $X, Y \in \mathrm{Ob} \mathcal{L}(\eta)$  et  $Z \hookrightarrow X \times_\eta Y$  une correspondance. Par additivité, on peut supposer ces schémas connexes; notons  $d$  le degré de  $Z$  sur  $X$ . Ce sous-schéma induit (cf. [SV96], § 6) un morphisme  $f_Z : X \rightarrow Y^{(d)}$ , où  $Y^{(d)}$  est la puissance symétrique  $d$ -ième, représentable car  $Y$  est quasi-projectif. Soit maintenant  $x \in G(Y)$ ; la flèche en pointillés du diagramme suivant est l'élément de  $G(X)$  recherché.

$$\begin{array}{ccc}
 & & G \\
 & & \uparrow \text{somme} \\
 G & \longrightarrow & G^{(d)} \\
 \uparrow x & & \uparrow x^{(d)} \\
 Y & \longrightarrow & Y^{(d)} \\
 & & \uparrow f_Z \\
 & & X
 \end{array}$$

(une flèche en pointillés relie  $x$  à  $G$ )

On vérifie facilement que les transferts ainsi définis sont compatibles à la structure de groupe abélien ainsi qu'à la composition des correspondances finies.  $\square$

**3.1.3.** L'homologie de  $\mathbf{G}_m$ . Par functorialité, le morphisme de  $\eta$ -schémas  $\mathbf{G}_m \rightarrow \eta$  induit un morphisme de faisceaux représentables :  $c(-, \mathbf{G}_m) \rightarrow c(-, \eta) = \mathbf{Z}$ . Construisons un morphisme  $c(-, \mathbf{G}_m) \rightarrow \mathbf{G}_m$ . Soit  $T$  un  $\eta$ -schéma algébrique lisse et  $Z \in c(T, \mathbf{G}_m)$ ; on veut définir un élément de  $\mathbf{G}_m(T)$ . En composant  $Z \hookrightarrow T \times_\eta \mathbf{G}_m$  avec la projection sur  $\mathbf{G}_m$ , on définit un élément  $f \in \mathbf{G}_m(Z)$ . Sa norme par le morphisme fini  $Z \rightarrow T$  est un élément de  $\mathcal{K}_T^\times$  (l'anneau total des fractions); comme le schéma  $T$  est normal, c'est même un élément de  $\mathbf{G}_m(T)$ . (C'est aussi l'image de la section unité par le morphisme  $\mathbf{G}_m(\mathbf{G}_m) \xrightarrow{Z} \mathbf{G}_m(T)$  construit plus haut.) On a construit un morphisme de faisceaux Nisnevich avec transferts  $c(-, \mathbf{G}_m) \rightarrow \mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z}$ . Comme  $\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z}$  est



invariant par homotopie,  $\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z} \rightarrow C_\bullet(\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z})$  est un quasi-isomorphisme. Finalement, par application du foncteur  $C_\bullet$ , on obtient un morphisme de  $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)$  :

$$\varphi : C_\bullet([\mathbf{G}_m]) \rightarrow (\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z})[0].$$

On a le résultat fondamental suivant :

**3.1.4 Proposition** (cf. [SV96], 3.1). — *Le morphisme  $\varphi$  est un quasi-isomorphisme.*

(Plus exactement, dans *op. cit.*, on étudie l'homomorphisme inverse.)

La section unité  $\eta \xrightarrow{1} \mathbf{G}_m$  induit un morphisme  $C_\bullet([\mathbf{G}_m]) \rightarrow C_\bullet([\eta])$ ; notons  $\mathbf{Z}(1)$  son noyau, c'est-à-dire un cône décalé de  $-1$ . D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbf{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m[-1].$$

**3.1.5.** Soit  $f : X \rightarrow \eta$  une courbe propre et lisse. D'après [Voe00] 4.3.2, on dispose, sous réserve de la résolution des singularités, d'un isomorphisme canonique  $C_\bullet([X]) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)}(C_\bullet([X]), \mathbf{Z}(1)[2])$ .

Cet énoncé est en fait valable inconditionnellement, comme l'a indiqué Joël Riou à l'auteur. Soit  $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)$  la catégorie des motifs (purs) de Chow effectifs (à coefficients entiers). On prend la convention homologique de Voevodsky (et non celle initialement choisie par Grothendieck) : si  $X$  et  $Y$  sont deux  $\eta$ -schémas projectifs et lisses, avec  $X$  connexe de dimension  $d_X$ ,  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)}(X, Y) = A_{d_X}(X \times_\eta Y)$ , le groupe des cycles de dimension  $d_X$  modulo équivalence rationnelle. On a un foncteur naturel (cf. *loc. cit.*, 2.1.4)  $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta)$  envoyant le motif  $h(X)$  d'une variété projective lisse  $X$  sur  $[\eta]$  et le motif de Lefschetz  $\mathbf{L}$  (cf. [Sch94]) sur  $\mathbf{Z}(1)[2]$ . Soit  $\mathrm{Chow}(\eta)$  la catégorie obtenue à partir de  $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)$  en inversant formellement le motif de Lefschetz<sup>(ii)</sup> et  $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$  la catégorie triangulée obtenue en inversant le motif de Tate  $\mathbf{Z}(1)$  (cf. [Voe00], 2.1.3). Ces deux catégories sont encore des catégories tensorielles (cf. *loc. cit.*, 2.1.5 pour  $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ ) et le foncteur  $\mathrm{Chow}(\eta) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$  déduit de  $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta)$  préserve le produit tensoriel. Soit  $X$  une courbe projective et lisse purement de dimension 1 sur  $\eta$  comme précédemment. Posons  $h(X)^\vee := h(X) \otimes \mathbf{L}^{-1}$ , le motif de Chow (non effectif) dual de  $h(X)$ . Il existe des flèches  $h(X) \otimes h(X)^\vee \rightarrow \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} \rightarrow h(X) \otimes h(X)^\vee$  satisfaisant les hypothèses de [LMSM86], III.1.6. Le fait remarquable est que, *réciroquement*, pour tout objet  $A$ , l'existence d'un objet  $B$ , et de flèches  $A \otimes B \rightarrow \mathbf{1}$  et  $\mathbf{1} \rightarrow A \otimes B$  satisfaisant ces relations implique que  $B \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbf{1})$  (et  $A$  est dit *fortement dualisable*). En particulier, l'existence du foncteur  $\mathrm{Chow}(\eta) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$  force l'isomorphisme  $[X] \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X] \otimes (\mathbf{Z}(1)[2])^{-1}, \mathbf{Z}(1))$  (cf. *loc. cit.*, III.1.9). Finalement, on a la formule  $[X] \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X], \mathbf{Z}(1)[2])$ . Il résulte de la pleine fidélité du foncteur  $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ , démontrée inconditionnellement dans [Voe], que le Hom-interne  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X], \mathbf{Z}(1)[2])$  coïncide avec celui dans  $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta)$ . De plus, il est tautologique que le Hom-interne dans  $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta)$  coïncide avec celui dans  $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)$  quand il existe. En conclusion, il existe bien un isomorphisme canonique  $C_\bullet([X]) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)}(C_\bullet([X]), \mathbf{Z}(1)[2])$ .

D'après [Voe00] 3.2.8, l'objet  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)}(C_\bullet([X]), \mathbf{Z}(1)[2])$  est isomorphe au complexe  $\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}f_*\mathbf{Z}(1)[2]$  (et donc à  $\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}f_*\mathbf{G}_m[1]$ ). Comme  $X$  est de dimension 1, il résulte de *loc. cit.* 3.2.9 que le morphisme canonique  $\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}f_*\mathbf{G}_m[1]) \rightarrow \mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}f_*\mathbf{G}_m[1]$  est un isomorphisme. De plus, d'après Hilbert Satz 90,

$$\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}f_*\mathbf{G}_m[1]) \rightarrow \tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{fppf}}f_*\mathbf{G}_m[1])$$

est un isomorphisme. D'où le

**3.1.6 Corollaire.** — *Soit  $f : X \rightarrow \eta$  une courbe propre et lisse, on a un isomorphisme canonique :*

$$C_\bullet([X]) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{fppf}}f_*\mathbf{G}_m[1]).$$

Ce résultat est un peu plus précis que [Voe00] 3.4.2, où l'on calcule seulement la cohomologie de ce complexe.

<sup>(ii)</sup> Il se trouve que le produit tensoriel avec ce motif est pleinement fidèle.

**3.1.7 Remarques.** —

1. Ce résultat est à rapprocher de la formule des coefficients universels de P. Deligne [SGA<sub>4</sub> XVIII 1.5] faisant intervenir le champ de Picard (pour le gros site fppf sur  $\eta$ ) :

$$\text{PIC}(X/\eta) := f_*\text{ch}(\mathbf{G}_m[1]) \simeq \text{ch}(\tau_{\leq 0}(\mathbf{R}f_*\mathbf{G}_m[1])).$$

2. Soit  $X$  une courbe affine et lisse sur  $\eta$  et  $\bar{X}$  une compactification lisse de  $X$ , obtenue en rajoutant le fermé réduit  $X_\infty$ . D'après 2.5, on a un isomorphisme  $C_\bullet(X_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^{X_\infty/\eta}$ . Le triangle de Gysin ([Voe00] 3.5.4) dans  $\text{DM}_-^{\text{eff}}(\eta)$  se réécrit ici :

$$\mathbf{G}_m^{X_\infty} \rightarrow C_\bullet([X]) \rightarrow \tau_{\leq 0}(\mathbf{R}_{\text{fppf}}f_*\mathbf{G}_m[1]) \rightarrow .$$

On en déduit que  $C_\bullet([X])$  est concentré en degré 0 et isomorphe au faisceau  $\underline{\text{Pic}}_{(\bar{X}, X_\infty)}$  des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles trivialisés à l'infini. Cela généralise 3.1.4 car on a un isomorphisme  $\underline{\text{Pic}}_{(\mathbf{P}_\eta^1, \{0, \infty\})} \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{G}_m$ .

**3.2. Rappels sur les 1-motifs de P. Deligne ([Del74], § 10).** — Soit  $S$  un schéma. Nous appellerons ici  $S$ -schéma semi-abélien tout  $S$ -schéma en groupe  $J$  commutatif, extension (pour la topologie fppf sur  $S$ ) d'un schéma abélien  $A$  par un tore  $T$ . À isomorphisme unique près,  $A$  et  $T$  sont bien déterminés.

**3.2.1 Définition ([Ray94]).** — La catégorie  $1\text{-Mot}(S)$  des 1-motifs sur  $S$  est la sous-catégorie pleine de  $C^{[-1, 0]}(S_{\text{fppf}})$  dont les objets sont les complexes de  $S$ -schémas en groupes commutatifs de longueur 1 :

$$M = [X \rightarrow J],$$

où  $X$ , placé en degré  $-1$ , est localement isomorphe pour la topologie étale à un groupe abélien libre de type fini et  $J$  est un schéma semi-abélien.

Ce n'est pas une catégorie abélienne. Si  $S = \eta$  est le spectre d'un corps de point générique géométrique  $\bar{\eta}$ , la donnée de  $M = [X \rightarrow J]$  est équivalente à la donnée d'un  $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ -module continu  $\mathbf{Z}^r$ , d'un  $\eta$ -schéma semi-abélien  $J$  et d'un morphisme équivariant de groupes  $\mathbf{Z}^r \rightarrow J(\bar{\eta})$ .

Chaque 1-motif  $M = [X \rightarrow J]$ , où  $J$  est extension de  $A$  par  $T$ , est muni d'une *filtration par le poids*  $W$ , croissante, indexée par  $\mathbf{Z}$ , définie par

$$W_n(M) = 0 \text{ si } n < -2, W_{-2}(M) = [0 \rightarrow T], W_{-1}(M) = [0 \rightarrow J] \text{ et } W_m(M) = M \text{ si } m \geq 0.$$

On montre sans difficulté que tout morphisme de 1-motifs respecte la filtration par le poids et induit donc un morphisme sur les quotients successifs, que sont : la partie torique  $T$  (poids  $-2$ ), la partie abélienne  $A$  (poids  $-1$ ) et la partie étale  $X[1]$  (poids  $0$ ).

Supposons dorénavant que  $S = \eta$  est le spectre d'un corps.

À toute catégorie additive  $C$ , on peut associer une catégorie  $\mathbf{Q}$ -linéaire  $\text{iso } C$ , universelle pour les foncteurs de  $C$  vers une catégorie  $\mathbf{Q}$ -linéaire. Elle peut se définir en conservant les mêmes objets mais en changeant l'ensemble des flèches en  $\text{Hom}_{\text{iso } C}(-, -) := \text{Hom}_C(-, -) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ . Procédant ainsi pour la catégorie des 1-motifs sur  $\eta$ , on définit la catégorie des 1-motifs à *isogénie près*, ou 1-isomotifs. Les morphismes de  $1\text{-Mot}(\eta)$  qui deviennent des isomorphismes dans  $1\text{-Isomot}(\eta)$ , les *isogénies*, sont ceux pour lesquels le morphisme sous-jacent en poids 0 est injectif de conoyau fini, tandis que le morphisme sous-jacent entre les parties semi-abéliennes est surjectif de noyau fini. La filtration par le poids s'étend automatiquement en une filtration dans  $1\text{-Isomot}(\eta)$ .

**3.2.2 Lemme.** — Pour chaque entier  $i \in \{0, -1, -2\}$ , la sous-catégorie des 1-isomotifs purs de poids  $i$  est abélienne semi-simple et épaisse. De plus, la catégorie  $1\text{-Isomot}(\eta)$  est abélienne.

*Démonstration.* — Pour  $i = -1$  c'est un corollaire du théorème de complète irréductibilité de Poincaré. En poids 0, c'est le lemme de Maschke. Le cas du poids  $-2$  s'en déduit, par dualité de Cartier.

Construisons le noyau d'un morphisme de 1-isomotifs sur  $\eta$ , laissant le cas des conoyaux au lecteur. Soit  $f : [X \rightarrow J] \rightarrow [X' \rightarrow J']$  un tel morphisme, que l'on peut supposer être un *vrai* morphisme de 1-motifs. Soit  $\tilde{X}_0$  le faisceau noyau du morphisme de faisceaux étales  $X \rightarrow X'$

induit par  $f$ ; il n'est peut-être pas représentable par un 1-motif pur de poids 0, mais  $X_0 := \tilde{X}_0/(\tilde{X}_0)_{\text{tor}}$  l'est et lui est isogène (comme faisceau). De même, considérons le faisceau  $\tilde{J}_0 := \text{Ker}(J \rightarrow J')$ . Il est représentable par un groupe algébrique sur  $\eta$ , dont la composante connexe est lisse et nécessairement semi-stable sur  $\eta$ . Notons la  $J_0$ ; le morphisme  $J_0 \rightarrow \tilde{J}_0$  est une isogénie et le morphisme composé  $\tilde{X}_0 \rightarrow X \rightarrow J$ , se factorise à travers  $\tilde{J}_0$  en un morphisme de faisceaux  $\varphi : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{J}_0$ . Comme  $\tilde{J}_0/J_0$  et  $(\tilde{X}_0)_{\text{tor}}$  sont finis, il existe un entier  $n \geq 1$  et un morphisme  $\psi$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{n \cdot \varphi} & \tilde{J}_0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ X_0 & \xrightarrow{\psi} & J_0 \end{array}$$

On vérifie aisément que le 1-motif  $X_0 \rightarrow J_0$ , qui s'envoie non canoniquement dans le 1-isomotif  $X \rightarrow J$ , est un noyau de  $f$ . □

**3.2.3 Remarque.** — Il est intéressant de remarquer que si  $\eta$  est le spectre d'un corps fini  $\mathbf{F}_q$ , cette catégorie est même semi-simple. Par exemple, si la classe  $J$  est extension d'une variété abélienne  $A$  par le tore  $\mathbf{G}_m$ , sa classe dans  $\text{Ext}^1(A, \mathbf{G}_m) = A^\vee(\mathbf{F}_q)$  (fini) est de torsion. De même,

$$\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\mathbf{F}_q)}^1([Z \rightarrow 0], [0 \rightarrow \mathbf{G}_m]) \simeq \mathbf{F}_q^\times \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0.$$

Sans hypothèse sur  $\eta$ , on a le résultat suivant.

**3.2.4 Proposition.** — *La catégorie  $1\text{-Isomot}(\eta)$  est de dimension cohomologique  $\leq 1$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que pour tout couple de 1-motifs purs  $M$  et  $M'$ , on a

$$\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^2(M, M') = 0.$$

Pour cela on commence par vérifier que le groupe des extensions de  $M$  par  $M'$ , supposés purs, est nul si le poids de  $M'$  est supérieur (ou égal) au poids de  $M$  : cela résulte de calculs simples. (Si  $M$  et  $M'$  sont de même poids, c'est **3.2.2**.) Il résulte formellement de ce résultat que si  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^2(M, M') \neq 0$ , avec  $M$  et  $M'$  purs, on doit avoir  $M = X[1]$  pur de poids 0 et  $M' = T'$  pur de poids  $-2$ . Soit  $e \in \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^2(X[1], T')$ ; il existe un 1-motif  $Z$ , et deux classes  $e_1 \in \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^1(X[1], Z)$ ,  $e_2 \in \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^1(Z, T')$  telles que  $e = e_2 \cdot e_1$ . Notons  $J_Z$  (resp.  $X_Z[1], A_Z$ ) la partie semi-abélienne (resp. étale, abélienne) de  $Z$ ; compte tenu de la nullité de  $\text{Ext}^1(X[1], X_Z[1])$ , la classe  $e_1$  se relève (non canoniquement) dans  $\text{Ext}^1(X[1], J_Z)$ , pour donner la classe  $e$  après multiplication par l'image de  $e_2$  dans  $\text{Ext}^1(J_Z, T')$ . On peut donc supposer  $Z$  de poids  $\leq -1$ . De la même façon,  $e_2$  se factorise à travers  $\text{Ext}^1(A_Z, T')$  si bien que l'on peut supposer que  $Z$  est une variété abélienne. Quitte à multiplier  $e_1$  et  $e_2$  par des entiers non nuls et remplacer les groupes intervenant par des groupes isogènes, on peut supposer qu'elles correspondent à des morphismes dans  $1\text{-Mot}(\eta)$ . Finalement  $e_1$  correspond à une extension dans  $1\text{-Mot}(\eta) : 0 \rightarrow T' \rightarrow J' \rightarrow A \rightarrow 0$  et  $e_2$  à  $0 \rightarrow A \rightarrow \tilde{M}_0 \rightarrow X[1] \rightarrow 0$ . Dans  $1\text{-Mot}(\eta)$ , on ne peut pas toujours relever le morphisme  $X \rightarrow A$  défini par  $\tilde{M}_0$  en  $X \rightarrow J'$ , mais quitte à changer  $X$  en un groupe isogène c'est possible (car  $J' \rightarrow A$  est un épimorphisme dans  $1\text{-Isomot}(\eta)$ ). On peut donc supposer qu'il existe un 1-motif  $\tilde{M}$  de gradué  $(X[1], A, T')$  réalisant ces extensions en ce sens que  $e_1$  correspond à  $W_{-2}(\tilde{M}) = T' \rightarrow W_{-1}(\tilde{M}) = J' \rightarrow \text{gr}_{-1}(\tilde{M}) = A$  et  $e_2$  à  $\text{gr}_{-1}(\tilde{M}) = A \rightarrow \tilde{M}/W_{-2}(\tilde{M}) \rightarrow \text{gr}_0(\tilde{M}) = X[1]$ . Il résulte du lemme suivant que le morphisme composé correspondant,  $e = e_2 e_1 : \text{gr}_0(\tilde{M}) \rightarrow W_{-2}(\tilde{M})[2]$  (dans la catégorie dérivée), est nul. □

**3.2.5 Lemme.** — *Soit  $M$  un objet d'une catégorie abélienne, et  $0 \subset M_{-2} \subset M_{-1} \subset M$  une filtration à deux crans de  $M$ . Soit  $e_1$  la classe de l'extension  $0 \rightarrow M_{-1}/M_{-2} \rightarrow M/M_{-2} \rightarrow M/M_{-1} \rightarrow 0$  et  $e_2$  la classe de l'extension  $0 \rightarrow M_{-2} \rightarrow M_{-1} \rightarrow M_{-1}/M_{-2} \rightarrow 0$ . Alors, la classe de  $e_2 \cdot e_1$  dans  $\text{Ext}^2(M/M_{-1}, M_{-2})$  est nulle.*

*Démonstration.* — Il suffit de constater que  $e_1$  correspond au morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & M_{-1} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{-2} & \longrightarrow & M_{-1} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

tandis que  $e_2$  correspond au morphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{-2} & \longrightarrow & M_{-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{-2} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le produit, correspondant à la composition dans la catégorie dérivée, est donc nul.  $\square$

### 3.3. Comparaison avec la théorie de V. Voevodsky. —

**3.3.1 Lemme.** — Soit  $X$  (resp.  $T$ ,  $A$ ) un  $\eta$ -schéma localement isomorphe (pour la topologie étale) à un  $\mathbf{Z}$ -module libre de type fini (resp. un tore, une variété abélienne sur  $\eta$ ). Le faisceau de Nisnevich représenté par  $X$  (resp.  $T$ ,  $A$ ) est invariant par homotopie.

*Démonstration.* — Par descente, on peut supposer  $X$  (resp.  $T$ ) constant (resp. déployé). Dans ce cas, cela résulte de l'invariance par homotopie de  $\pi_0$  (resp. de **3.1.1**).

Soit  $S \in \text{Ob } \mathcal{L}(\eta)$ ; il nous reste à montrer que le morphisme  $A(S) \rightarrow A(\mathbf{A}_S^1)$  induit par la projection  $p : \mathbf{A}_S^1 \rightarrow S$  est un isomorphisme. Si  $S$  est un corps c'est classique. De l'existence de sections au morphisme  $p$  on déduit l'injectivité du morphisme  $A(S) \rightarrow A(\mathbf{A}_S^1)$ . Notons  $s : S \rightarrow \mathbf{A}_S^1$  la section nulle. Soit  $f : \mathbf{A}_S^1 \rightarrow A$ ; montrons que si  $g = fs : S \rightarrow A$  et  $\tilde{f} := gp$ , on a  $f = \tilde{f}$ , c'est-à-dire  $\varphi := f - \tilde{f} = 0$ . Pour tout point  $s$  de  $S$ , le morphisme composé  $\mathbf{A}_s^1 \hookrightarrow \mathbf{A}_S^1 \xrightarrow{\varphi} A$  est trivial. Ainsi, le morphisme  $\varphi$  est topologiquement constant. Comme  $\mathbf{A}_S^1$  est intègre, on a bien  $\varphi = 0$  d'où la surjectivité de  $A(S) \rightarrow A(\mathbf{A}_S^1)$ . L'injectivité résulte du fait que la projection  $p$  a une section.  $\square$

**3.3.2.** Notons  $\text{ÉtTrans}(\eta)$  la catégorie abélienne des préfaisceaux abéliens sur  $\mathcal{L}\text{Corr}(\eta)$  dont la restriction à  $\mathcal{L}(\eta)$  est un faisceau pour la topologie étale et  $\text{DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{D}^-(\text{ÉtTrans}(\eta))$  constituée des complexes à cohomologie invariante par homotopie. De même,  $\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta)$  désigne la catégorie des faisceaux abéliens sur le site étale des  $\eta$ -schémas quasi-projectifs lisses.

Compte-tenu de **3.1.2**, le foncteur canonique  $1\text{-Mot}(\eta) \rightarrow \mathbf{C}^{[-1,0]}(\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta))$ , se factorise de manière canonique à travers la catégorie abélienne  $\mathbf{C}^{[-1,0]}(\text{ÉtTrans}(\eta))$ . Tensorisant avec  $\mathbf{Q}$ , il induit un foncteur additif  $1\text{-Isomot}(\eta) \rightarrow \mathbf{C}^{[-1,0]}(\text{ÉtTrans}(\eta)_{\mathbf{Q}})$ . Ce foncteur est même exact, pour les raisons qui suivent<sup>(iii)</sup>. Le foncteur  $1\text{-Isomot}(\eta) \rightarrow \mathbf{C}^{[-1,0]}(\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta)_{\mathbf{Q}})$  est exact car les noyaux et conoyaux de morphismes de 1-motifs calculent, à isogénie près, au niveau des faisceaux (cf. fin de la démonstration de **3.2.2**). Les (co)noyaux obtenus dans  $\mathbf{C}^{[-1,0]}(\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta)_{\mathbf{Q}})$  sont équipés de transferts d'une part en tant que (complexes de) faisceaux associés à des préfaisceaux (étales) avec transferts (cf. [Voe00], 3.1.6 pour la topologie de Nisnevich et la remarque 2 suivant *loc. cit.*, 3.1.3 pour traiter le cas étale) et d'autre part d'après **3.1.2** puisqu'il s'agit de complexes associés à des 1-isomotifs. Ces deux structures de transferts sur les (co)noyaux coïncident puisque il en est tautologiquement ainsi au niveau des préfaisceaux et que l'on a unicité dans *loc. cit.* 3.1.6; l'exactitude du foncteur en découle.

Celui-ci induit donc, en passant à la catégorie dérivée bornée, un foncteur triangulé

$$\text{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \text{D}^b(\mathbf{C}^{[-1,0]}(\text{ÉtTrans}(\eta)_{\mathbf{Q}})).$$

<sup>(iii)</sup>L'auteur remercie le rapporteur pour ses remarques à ce sujet.

Comme le foncteur « complexe simple associé » transforme quasi-isomorphisme de  $\mathbf{C}^\bullet(C^{[-1,0]}(\text{ÉtTrans}(\eta)_{\mathbf{Q}}))$  en quasi-isomorphisme de  $\mathbf{C}^\bullet(\text{ÉtTrans}(\eta)_{\mathbf{Q}})$  (fait général résultant de la suite spectrale  $H_{\text{hor}}H_{\text{vert}} \Rightarrow H^*$ ), il se dérive trivialement et, par composition, on obtient un foncteur triangulé :

$$D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow D^b(\text{ÉtTrans}(\eta)_{\mathbf{Q}}) \xleftarrow{\sim} \text{iso } D^b(\text{ÉtTrans}(\eta)).$$

Que ce foncteur triangulé se factorise à travers  $\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  résulte du lemme précédent (3.3.1).

Nous avons donc défini un foncteur triangulé

$$D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta).$$

**3.3.3 Proposition.** — *Le foncteur précédent est pleinement fidèle.*

**3.3.4 Remarque.** — D'après [Voe00], 3.3.2, le foncteur canonique  $\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta) \rightarrow \text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  est une équivalence de catégories. La topologie étale étant sans doute mieux connue du lecteur, nous l'avons préférée ici.

Prendre garde au fait que le foncteur d'oubli des transferts  $\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta) \rightarrow \text{iso } D^-(\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta))$  n'est pas pleinement fidèle. De même, il faut garder à l'esprit que si  $\text{iso } D^b(\mathbf{Z}\text{-mod}) \rightarrow D^b(\text{iso } \mathbf{Z}\text{-mod})$  est bien une équivalence (et c'est là un fait général), il n'en va pas de même de  $D^b(\text{iso } \mathbf{Z}\text{-mod}) \rightarrow D^b(\mathbf{Q}\text{-ev})$ . (Ce phénomène disparaît lorsque l'on se restreint aux objets « constructibles ».)

Pour tout objet  $\mathcal{K} \in \text{Ob } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$ , nous noterons  $\mathcal{K}_{\mathbf{Q}}$  son image dans  $\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$ . De même, pour tout groupe abélien  $H$ , on pose  $H_{\mathbf{Q}} := H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ .

*Démonstration de la proposition 3.3.3.* — Il suffit de montrer le fait suivant :

pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  et tout couple de 1-motifs,  $M$  et  $M'$ , le morphisme

$$(\star) \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^i(M, M') \rightarrow \text{Hom}_{\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(M_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) (= \text{Hom}_{D^-(\text{ÉtTrans}(\eta))}(M, M'[i]_{\mathbf{Q}}))$$

est un isomorphisme.

Par dévissage, on peut supposer  $M$  et  $M'$  purs. De plus, par semi-simplicité, si  $M$  (resp.  $M'$ ) est pur de poids 0 (resp.  $-2$ ), on peut supposer que  $M$  (resp.  $M'$ ) est isomorphe à un tore  $\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta} := p_*(\mathbf{G}_m/\tilde{\eta})$  (resp.  $\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}$ ), où  $p = \tilde{\eta} \rightarrow \eta$  est fini étale.

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante :

**3.3.5 Proposition** ([Voe00], 3.1.9 et 3.1.12). — *Soient  $X$  un  $\eta$ -schéma algébrique lisse et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien étale avec transferts, invariant par homotopie. Alors, pour tout entier  $i \in \mathbf{Z}$ , on a un isomorphisme canonique :*

$$\text{Hom}_{\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(C_\bullet([X])_{\mathbf{Q}}, \mathcal{F}_{\mathbf{Q}}[i]) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{F})_{\mathbf{Q}}$$

**3.3.6.** Démonstration de  $(\star)$  avec  $M = \mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}[1]$  pur de poids 0.

On a vu en 2.5 que  $M \xrightarrow{\sim} C_\bullet(\tilde{\eta})[1]$ ; d'après 3.3.5, on a donc, pour tout 1-motif pur  $M'$ ,

$$\text{Hom}_{\text{iso } DM_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(M_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \simeq H_{\text{Zar}}^{i-1}(\tilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}}.$$

Si  $M' = X'[1]$  est pur de poids 0, on a  $H_{\text{Zar}}^{i-1}(\tilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}} = H_{\text{Zar}}^0(\tilde{\eta}, X')_{\mathbf{Q}}$  si  $i = 0$  et 0 sinon. Ces groupes coïncident bien avec  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^i(\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}[1], X'[1])$ , isomorphe à  $\text{Hom}_{1\text{-Mot}(\eta)}(\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}, X')_{\mathbf{Q}}$  pour  $i = 0$ . Si  $M' = J'$  est une variété semi-abélienne pure (i.e. un tore ou une variété abélienne),  $H_{\text{Zar}}^{i-1}(\tilde{\eta}, J')_{\mathbf{Q}}$  est nul sauf éventuellement pour  $i = 1$ , auquel cas il s'agit de  $J'(\tilde{\eta})_{\mathbf{Q}}$ . D'un autre côté,  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^i(\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}[1], J')$  est nul sauf éventuellement pour  $i = 1$ . Dans ce cas, une extension représentant un élément de  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^1(\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}[1], J')$  correspond à un isomotif  $[\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta} \xrightarrow{f} J']$ , uniquement défini par la flèche  $f \in J'(\tilde{\eta})_{\mathbf{Q}}$ .

**3.3.7.** Démonstration de  $(\star)$  avec  $M = \mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}$  pur de poids  $-2$ .

Il résulte de **3.1.6** et de l'isomorphisme  $\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^{\mathbf{P}_\eta^1/\eta}$  que  $h_{-1}(\mathbf{P}_\eta^1)$  est isomorphe à  $M$ . D'après *loc. cit.*, le groupe  $h_0(\mathbf{P}_\eta^1)$  est isomorphe à  $\underline{\text{Pic}}_{\mathbf{P}_\eta^1/\eta}$ , donc à  $\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta}$ . Soient  $M'$  un 1-isomotif pur et  $i \in \mathbf{Z}$ . Appliquons le foncteur  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(-, M'_\mathbf{Q}[i])$  au triangle distingué canonique :

$$h_0(\mathbf{P}_\eta^1)_\mathbf{Q}[-2] \rightarrow h_{-1}(\mathbf{P}_\eta^1)_\mathbf{Q} \rightarrow C_\bullet([\mathbf{P}_\eta^1])_\mathbf{Q}[-1] \rightarrow .$$

Compte-tenu de **3.3.5**, **3.3.6** et des calculs précédents, on obtient un triangle distingué :

$$\mathbf{H}_{\text{Zar}}^{i+1}(\mathbf{P}_\eta^1, M')_\mathbf{Q} \rightarrow \text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, M'_\mathbf{Q}[i]) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{Zar}}^{i+2}(\tilde{\eta}, M')_\mathbf{Q} \rightarrow .$$

Compte-tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet([\mathbf{P}_\eta^1]) & \longrightarrow & h_0(\mathbf{P}_\eta^1) \\ \downarrow & & \downarrow \text{isom.} \\ C_\bullet([\tilde{\eta}]) & \xrightarrow{\text{isom.}} & h_0(\tilde{\eta}), \end{array}$$

la suite exacte longue précédente fait de  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(-, M'_\mathbf{Q}[i])$  le  $(i+1)$ -ième groupe de cohomologie d'un cône  $\mathcal{C}$  du morphisme :

$$\text{R}\Gamma_{\text{Zar}}(\tilde{\eta}, M')_\mathbf{Q} \rightarrow \text{R}\Gamma_{\text{Zar}}(\mathbf{P}_\eta^1, M')_\mathbf{Q}$$

associé à la projection  $\mathbf{P}_\eta^1 \rightarrow \tilde{\eta}$ .

Si  $M'$  est placé en degré 0, ce cône n'a de cohomologie qu'en degré  $[0, 1]$  car  $\mathbf{P}_\eta^1$  est de dimension 1. Si  $M' = X'[1]$  est placé en degré  $-1$ , c'est un objet de  $\text{D}^{[-1, 0]}$  pour la même raison. Compte-tenu de l'isomorphisme  $\mathbf{H}_{\text{Zar}}^0(\tilde{\eta}, X') \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_{\text{Zar}}^0(\mathbf{P}_\eta^1, X')$ , ce cône n'a pas de cohomologie en degré  $-1$ . Ainsi, on a montré que dans tous les cas,  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, M'_\mathbf{Q}[i])$  est nul pour  $i \notin \{-1, 0\}$ . Si  $i \in \{-1, 0\}$ , il est peut-être plus simple de démontrer  $(\star)$  sans utiliser l'interprétation précédente (voir aussi **3.3.8**).

Traisons d'abord le cas  $i = -1$ . Si  $M'$  est pur de poids  $< 0$ ,  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, M'_\mathbf{Q}[-1])$  est trivialement nul, car  $M'_\mathbf{Q}$  est placé en degré 0. La nullité de  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^{-1}(M, M')$  est également évidente. Si  $M' = X'[1]$ ,  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, X'_\mathbf{Q}[1][-1]) = \text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, X'_\mathbf{Q}) = 0$ . Pour  $i = 0$ , si  $M'$  est une variété abélienne  $A'$ , on a

$$\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}_\mathbf{Q}, A') = \text{Hom}_{\text{SchGrp}/\eta}(\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}, A') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0.$$

Les autres cas,  $M' = T'[0]$  et  $M' = X'[1]$ , tout aussi faciles, sont laissés au lecteur.

**3.3.8 Remarque.** — On retrouve le fait élémentaire que si  $A'$  est une variété abélienne,  $\mathbf{H}_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_\eta^1, A')_\mathbf{Q}$  est nul (prendre  $M' = A'$ ,  $i = 0$  et regarder le  $\mathbf{H}^1$  de  $\mathcal{C}$ , dont on vient de montrer la nullité par d'autres moyens). Cela résulte aussi du fait que le faisceau représenté par  $A'$  est localement constant pour la topologie de Zariski — sur la catégorie des schémas *lisses* sur  $\eta$  — (c'est un corollaire du théorème de Weil sur les applications rationnelles vers un groupe algébrique), donc flasque. Utilisant les résultats de [Voe00], 3.1.12 et **3.3.4** on voit que c'est aussi vrai pour la topologie étale. Ce résultat est bien connu (*cf. e.g.* [Mil86], II.5.1).

**3.3.9.** Démonstration de  $(\star)$  avec  $M$  pur de poids  $-1$ .

Il résulte de [Kat99], theorem 11, et **3.2.2** que l'on peut supposer  $M = A$  facteur direct de la jacobienne  $\text{Jac}$  d'une  $\eta$ -courbe  $C$  propre, lisse, géométriquement connexe, et possédant un point rationnel. Dans la catégorie des motifs de Chow effectifs  $\text{Chow}^{\text{eff}}(\eta)$  (*cf.* **3.1.5**) ce point rationnel induit une décomposition  $h(C) = \mathbf{Z} \oplus h_1(C) \oplus \mathbf{L}$ , (*cf.* [Sch94], pages 167–172, mais avec une convention contravariante). L'existence d'un foncteur covariant  $\text{Chow}^{\text{eff}}(\eta) \rightarrow \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$ , envoyant  $\mathbf{L}$  sur  $\mathbf{Z}(1)[2]$ , appliqué à cette décomposition, montre que le triangle distingué de  $\text{DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$ ,  $h_1(C)[1] \rightarrow C_\bullet([C]) \rightarrow h_0(C) \rightarrow$ , est scindé. Le faisceau  $h_0(C)$  est isomorphe à  $\underline{\text{Pic}}_{C/\eta}$ , extension

de  $\mathbf{Z}$  par Jac. (Chaque point rationnel induit une section.) Finalement, on a (non canoniquement) un isomorphisme :

$$C_\bullet([C]) \simeq \mathbf{Z} \oplus \text{Jac} \oplus \mathbf{G}_m[1].$$

Soient  $M'$  un 1-isomotif pur et  $i \in \mathbf{Z}$  un entier. Le groupe  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\text{Jac}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$  est donc isomorphe au noyau d'un morphisme (non canonique)

$$\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(C_\bullet([C])_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \rightarrow \text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{Q}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \oplus \text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\mathbf{G}_m_{\mathbf{Q}}[1], M'_{\mathbf{Q}}[i]).$$

(Le but de cette flèche se réécrit, compte tenu de ce qui précède,  $H^i(\eta, M')_{\mathbf{Q}} \oplus \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^{i-1}(\mathbf{G}_m, M')$ . Nous n'aurons pas besoin de ce résultat ; voir cependant **3.3.10** pour une interprétation.)

En particulier,  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(\text{Jac}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$  s'injecte dans  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(C_\bullet([C])_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Zar}}^i(C, M')_{\mathbf{Q}}$ . Comme la variété abélienne  $A$  qui nous intéresse est facteur direct de Jac dans  $1\text{-Isomot}(\eta)$ , le groupe  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$  s'injecte aussi dans  $H_{\text{Zar}}^i(C, M')_{\mathbf{Q}}$ . En particulier, il est nul pour  $i \geq 2$  ou  $i < -1$ . Il en est de même du groupe des homomorphismes calculé dans  $1\text{-Isomot}(\eta)$ . Traitons les différents cas restants,  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , un par un.

1.  $i = -1$ . Le groupe  $\text{Hom}_{\text{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta))}(A, M'[-1])$  est nul, pour tout  $M'$ . Si  $M'$  est de poids  $\leq -1$ ,  $M'_{\mathbf{Q}}$  est concentré en degré 0, donc  $H_{\text{Zar}}^{-1}(C, M')_{\mathbf{Q}}$  est nul aussi. Si  $M' = X'[1]$ ,  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[-1]) = \text{Hom}_{\text{ÉtTrans}(\eta)}(A, X')_{\mathbf{Q}} = 0$  car tout morphisme de schémas en groupes de  $A$  vers  $\mathbf{Z}$  est constant.
2.  $i = 0$ . On veut montrer que le morphisme  $\text{Hom}_{1\text{-Isomot}(\eta)}(A, M') \rightarrow \text{Hom}_{\text{ÉtTrans}(\eta)}(A, M')_{\mathbf{Q}}$  est un isomorphisme. Si  $M'$  est concentré en degré 0, c'est évident. Si  $M' = X'[1]$ , le terme de gauche est nul ; la nullité du terme de droite résulte par exemple du fait que le groupe  $H_{\text{Zar}}^1(C, X')_{\mathbf{Q}}$ , dans lequel il s'injecte, est nul ( $X'$  est flasque).
3.  $i = 1$ . Si  $M' = X'[1]$ , le groupe  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^1(A, X')$  est nul, pour des raisons de poids, tandis que  $\text{Hom}_{\text{iso DM}_{-,\text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[1]) \hookrightarrow H_{\text{Zar}}^2(C, X')_{\mathbf{Q}} = 0$ . Supposons enfin  $M' = J'$  pur de poids  $< 0$  (i.e. pur et semi-abélien). On veut montrer que le morphisme  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^1(A, J') \rightarrow \text{Ext}_{\text{ÉtTrans}(\eta)}^1(A, J')_{\mathbf{Q}}$  est un isomorphisme. Cela résulte du lemme **3.3.11**, qui achève la démonstration de la proposition **3.3.3**. □

**3.3.10 Remarque.** — Supposons un instant que  $M = J = \text{Jac}(C)$ . On a vu que le groupe  $\text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^i(J, M')$  est (non canoniquement) isomorphe au noyau d'un morphisme

$$H_{\text{Zar}}^i(C, M') \rightarrow H_{\text{Zar}}^i(\eta, M')_{\mathbf{Q}} \oplus \text{Ext}_{1\text{-Isomot}(\eta)}^{i-1}(\mathbf{G}_m, M').$$

Si  $i = 1$  et  $M' = \mathbf{G}_m$ , on retrouve l'autodualité de la jacobienne :  $\text{Pic}_{C/\eta}^0 \vee(\eta)_{\mathbf{Q}} \simeq \text{Pic}_{C/\eta}^0(\eta)_{\mathbf{Q}} = \text{Ker}(H_{\text{Zar}}^1(C, \mathbf{G}_m)_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m)_{\mathbf{Q}})$ . Voir aussi la remarque **3.4.4**.

Si  $i = 0$  et  $M' = A'$ , on retrouve l'interprétation de la jacobienne comme variété d'Albanese (dans le cas des courbes).

**3.3.11 Lemme.** — Soient  $G$  et  $G'$  deux  $\eta$ -schémas en groupes commutatifs lisses, supposés de type fini sur  $\eta$  ou localement pour la topologie étale isomorphes à un groupe abélien libre de type fini. Soit  $E$  un faisceau sur  $\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta)$ , extension de  $G$  par  $G'$ . Alors  $E$  est représentable par un  $\eta$ -schéma en groupes lisse. De plus, si  $G$  et  $G'$  sont invariants par homotopie, il en est de même de  $E$ . Si l'on munit  $G$  et  $G'$  des transferts canoniques comme en **3.1.2**, la structure de transferts canonique sur  $E$  est la seule qui soit compatible avec celles de  $G$  et  $G'$ .

*Démonstration d'après M. Raynaud.* — Seule la représentabilité est à démontrer : la stabilité par extension de l'invariance par homotopie ainsi que l'unicité des transferts sont évidents. Supposons pour commencer  $k = \kappa(\eta)$  séparablement clos. Le  $G'$ -torseur  $E$  sur  $G$  (pour la topologie étale) est représentable au-dessus du point générique  $\eta_G$  de  $G$  (essentiellement lisse sur  $\eta$ ) : cela résulte du fait que la  $\kappa(\eta_G)$ -forme correspondante de  $G'_{\eta_G^{\text{sép}}}$  s'obtient en quotientant le schéma  $G'_{\eta_G}$ , pour une extension finie étale  $\eta'_G/\eta_G$ , par un groupe fini. La représentabilité du quotient vient du fait que

$G'_{\eta'_G}$  est quasi-projectif ou bien affine si  $G'$  n'est pas de type fini sur  $\eta$ . La représentabilité de  $E$  au-dessus de  $\eta_G$  entraîne le même résultat au-dessus d'un ouvert non vide  $U$  de  $G$ . Le schéma  $G$  étant recouvert par la réunion des  $g \cdot U$  où  $g$  est un point  $\eta$ -rationnel de  $G$ , on peut représenter  $E$  au-dessus de  $\coprod_{i=1, \dots, n} g_i U \rightarrow G$  et finalement recoller les morceaux pour obtenir un  $\eta$ -schéma  $\mathcal{E}$  représentant  $E$  sur le gros site  $\mathcal{L}(G)_{\text{ét}}$ . En fait, le faisceau  $E$  sur  $\mathcal{L}_{\text{ét}}(\eta)$  est aussi représenté par  $\mathcal{E}$ . En effet,  $E$  est automatiquement un faisceau pour la topologie fppf et  $G \rightarrow \eta$  est couvrant pour cette topologie : si  $X \in \text{Ob } \mathcal{L}(\eta)$ , on a  $E(X) = \text{Ker } E(G_X) \rightrightarrows E((G \times_{\eta} G)_X) = \mathcal{E}(X)$ . Enfin, le passage du cas  $k$  séparablement clos au cas général se fait par descente finie étale, comme plus haut.  $\square$

**3.4. Factorisation par les motifs géométriques.** — Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que le foncteur  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  est pleinement fidèle ; le théorème suivant décrit l'image essentielle de ce foncteur.

**3.4.1 Théorème.** — *Le foncteur triangulé pleinement fidèle  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  se factorise à travers  $\text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta) \hookrightarrow \text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  et induit une équivalence de catégories triangulées :*

$$D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \xrightarrow{\sim} \text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta).$$

C'est le résultat annoncé par V. Voevodsky dans [Voe00], 3.4 p. 218.

La mise en garde (3.3.4) ne s'applique pas ici : la catégorie  $\text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  est équivalente à  $d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta, \mathbf{Q})$ , où  $\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta, \mathbf{Q})$  est l'analogue de  $\text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  construit avec des coefficients rationnels.

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que la catégorie triangulée  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta))$  est engendrée par les isomotifs purs : c'est la plus petite sous-catégorie épaisse triangulée qui les contient. Comme, par définition, la sous-catégorie pleine  $\text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  de  $\text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  est épaisse, il s'ensuit que le foncteur  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  se factorise à travers  $\text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$  si et seulement si l'image dans  $\text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$  des isomotifs purs est dans  $\text{iso } d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(\eta)$ . Vérifions ce fait. Que les motifs purs de poids 0 soient dans l'image résulte de 2.5. Les tores de la forme  $\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}$  sont donc également obtenus car  $C_{\bullet}([\mathbf{P}_{\tilde{\eta}}^1])$  est extension de  $\mathbf{Z}^{\tilde{\eta}/\eta} = \text{Pic}_{\mathbf{P}_{\tilde{\eta}}^1/\eta}$  (déjà dans l'image par ce qui précède), par  $\mathbf{G}_m^{\tilde{\eta}/\eta}[1]$ . On en déduit que tous les tores sont dans l'image. En poids  $-1$ , il suffit (cf. 3.3.9) de montrer que les jacobiniennes de courbes propres et lisses géométriquement connexe possédant un point rationnel sont dans l'image, car  $d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k, \mathbf{Q})$  est stable par facteur direct. Compte tenu de la présence des tores et des 1-motifs étales sur  $\eta$ , cela résulte de la décomposition donnée dans *loc. cit.*

Il nous reste à montrer que le foncteur triangulé

$$D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k, \mathbf{Q})$$

ainsi construit est essentiellement surjectif. Compte-tenu du fait que  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta))$  est pseudo-abélienne ([BS01], 2.10), l'image essentielle est stable par facteur direct (le foncteur étant pleinement fidèle) : il nous suffit donc de montrer que des générateurs de  $d_1 \text{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k, \mathbf{Q})$  (en tant que sous-catégorie épaisse de  $\text{iso DM}_{-, \text{ét}}^{\text{eff}}(\eta)$ ) sont dans l'image essentielle. Un choix naturel de générateurs consiste en les  $\eta$ -schémas projectifs et lisses de dimension 0 ou 1. Qu'il s'agisse bien de générateurs se vérifie ainsi : si  $X$  une  $\eta$ -courbe affine lisse connexe,  $\overline{X}$  sa complétion projective lisse et  $X_{\infty} := \overline{X} - X$  les points à l'infini, on a un triangle de Gysin (3.1.7, 2) :

$$\mathbf{G}_m^{X_{\infty}} \rightarrow C_{\bullet}([X]) \rightarrow C_{\bullet}([\overline{X}]) \rightarrow .$$

D'après les calculs du paragraphe précédent, le premier terme,  $\mathbf{G}_m^{X_{\infty}}$ , appartient à la sous-catégorie épaisse engendrée par les motifs de  $\eta$ -schémas projectifs de dimension  $\leq 1$ . (C'est au décalage près un facteur direct du motif de  $\mathbf{P}_{X_{\infty}}^1$ .) Ainsi,  $C_{\bullet}([X])$  appartient bien à la sous-catégorie engendrée par les motifs de  $\eta$ -schémas projectifs de dimension  $\leq 1$ .

Vérifions maintenant que les  $\eta$ -schémas projectifs et lisses de dimension 0 ou 1 appartiennent à l'image essentielle. Que ceux de dimension 0 appartiennent à l'image essentielle est évident :



$C_\bullet([\eta']) \simeq \mathbf{Z}^{\eta'/\eta}$  est l'image d'un 1-motif pur (au décalage près). Si maintenant  $X$  est une courbe projective lisse sur  $\eta$ ,  $C_\bullet([X])$  est d'après **3.1.6** un complexe à cohomologie concentrée en degré  $-1$  et  $0$ , admettant une filtration en trois crans dont les quotients successifs sont

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/\eta}/\underline{\mathrm{Pic}}_{X/\eta}^0, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/\eta}^0, \mathbf{G}_m^{X/\eta}[1].$$

Les deux derniers quotients sont dans l'image essentielle de  $D^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \rightarrow \mathrm{iso}\mathrm{DM}_{-\mathrm{ét}}^{\mathrm{eff}}(\eta)$ . Il reste donc à montrer que le quotient  $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/\eta}/\underline{\mathrm{Pic}}_{X/\eta}^0$  est également dans l'image. Si le corps résiduel  $\kappa(\eta)$  est algébriquement clos, ce groupe est un groupe abélien libre de rang fini (c'est le groupe de Néron-Severi) et la conclusion en résulte. Dans le cas général, on sait (cf. e.g. [SGA<sub>4</sub> XVIII 1.5.5]) que ce quotient s'identifie au dual (à valeurs dans  $\mathbf{G}_m$ ) du faisceau  $\mathbf{G}_m^{X/\eta}$ . Un tel dual est isomorphe à une forme tordue de  $\mathbf{Z}^r$  (pour un  $r \geq 0$ ), c'est-à-dire un 1-motif pur de poids  $0$  (décalé).  $\square$

**3.4.2 Corollaire.** — *La catégorie triangulée  $d_1\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta, \mathbf{Q})$  peut être munie d'une  $t$ -structure non dégénérée, de coeur  $1\text{-Isomot}(\eta)$ .*

**3.4.3 Remarque (du rapporteur).** — On a même démontré que  $d_1\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta, \mathbf{Q})$  est la catégorie dérivée de son « coeur motivique », ce que l'on espère en général de la  $t$ -structure motivique. Dans notre cas, cela résulte aussi du fait que la catégorie abélienne des 1-isomotifs sur  $\eta$  est de dimension cohomologique au plus  $1$  (**3.2.4**), d'après un résultat de Beilinson sur les  $t$ -structures (cf. e.g. [GM99]).

**3.4.4 Remarque.** — On peut montrer que la dualité de Cartier des 1-isomotifs de Deligne ([Del74], 10.2.11) coïncide avec la dualité donnée par le foncteur  $D = \underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbf{Z}(1)[2])$  dans la catégorie de Voevodsky.

## Références

- [BS01] P. BALMER et M. SCHLICHTING – « Idempotent completion of triangulated categories », *J. Algebra* **236** (2001), no. 2, p. 819–834.
- [Del73] P. DELIGNE – « La formule de dualité globale », 1973, exposé XVIII dans [Gro73].
- [Del74] P. DELIGNE – « Théorie de Hodge. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 44, p. 5–77.
- [GM99] S. I. GELFAND et Y. I. MANIN – *Homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Gro69] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique*, 1960–1969.
- [Gro73] A. GROTHENDIECK – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Verlag, 1972–1973, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269–270 & 305.
- [Kat99] N. M. KATZ – « Space filling curves over finite fields », *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 5–6, p. 613–624.
- [Lev98] M. LEVINE – *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [LMSM86] L. G. LEWIS, JR., J. P. MAY, M. STEINBERGER et J. E. MCCLURE – *Equivariant stable homotopy theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1213, Springer-Verlag, Berlin, 1986, With contributions by J. E. McClure.
- [Mil86] J. S. MILNE – *Arithmetic duality theorems*, Academic Press Inc., Boston, Mass., 1986.
- [Nee01] A. NEEMAN – *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Ray94] M. RAYNAUD – « 1-motifs et monodromie géométrique », no. 223, p. 295–319, 1994, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [Sch94] A. J. SCHOLL – « Classical motives », *Motives* (Seattle, WA, 1991), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 163–187.
- [SV96] A. SUSLIN et V. VOEVODSKY – « Singular homology of abstract algebraic varieties », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.
- [Voe] V. VOEVODSKY – « Cancellation theorem », <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/>.

- [Voe00] V. VOEVODSKY – « Triangulated categories of motives over a field », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

---

FABRICE ORGOGOZO, Princeton University, Mathematics Department, Fine Hall, Washington Road, Princeton, NJ 8544—1000 É.-U.A. • *E-mail* : [orgogozo@math.princeton.edu](mailto:orgogozo@math.princeton.edu)