



**HAL**  
open science

# Le théorème de spécialisation du groupe fondamental

Fabrice Orgogozo, Isabelle Vidal

► **To cite this version:**

Fabrice Orgogozo, Isabelle Vidal. Le théorème de spécialisation du groupe fondamental. Jean-Benoît Bost, François Loeser, Micher Raynaud (éditeurs). Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Birkhäuser, pp.169–184, 2000, Collection : Progress in Mathematics, Vol. 187. hal-00196612

**HAL Id: hal-00196612**

**<https://hal.science/hal-00196612>**

Submitted on 13 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# LE THORME DE SPECIALISATION DU GROUPE FONDAMENTAL

par

Fabrice Orgogozo & Isabelle Vidal

---

**Résumé.** — Soit  $X$  une courbe propre et lisse au-dessus d'un trait strictement hensilien complet  $S$  d'exposant caractéristique  $p$ . On définit une flèche de spécialisation du groupe fondamental de la fibre générique géométrique  $X_{\bar{\eta}}$  dans le groupe fondamental de la fibre spéciale  $X_s$ . On prouve que cette flèche est surjective et induit un isomorphisme sur les plus grands quotients d'ordre premier  $p$ . On généralise ensuite ce résultat au cas d'une courbe propre et lisse privée d'un diviseur  $D$  en se restreignant aux revêtements modérés le long de  $D$ . Tous ces thèmes sont dus à A. Grothendieck et sont démontrés dans un cadre plus général dans SGA 1.

**Abstract.** — Let  $X$  be a smooth proper curve over the spectrum of a strictly Henselian complete discrete valuation ring whose characteristic exponent is  $p$ . A specialization homomorphism is defined from the fundamental group of the geometric generic fibre  $X_{\bar{\eta}}$  to the fundamental group of the special fibre  $X_s$ . It is proved that this homomorphism is surjective, and induces an isomorphism of the greatest quotient groups of order prime to  $p$ . This result is then generalized to the case of a smooth proper curve with a tame divisor  $D$  removed, where only tamely ramified coverings relative to  $D$  are considered. All of these results are due to A. Grothendieck and are proved in greater generality in SGA 1.

## PARTIE I LE CAS PROPRE

### 1. La flèche de spécialisation

Dans cette partie,  $X$  désignera une courbe propre et lisse sur un trait <sup>(i)</sup>  $S = \text{Spec } R$ , où  $R$  est un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$  algébriquement clos, d'exposant caractéristique  $p \geq 1$ . Notons  $\eta$  le point générique de  $S$ , et  $s$  son point fermé ; on suppose en outre  $X_s$  connexe. Notre but tant d'obtenir des résultats sur le  $\pi_1$  des courbes en caractéristique  $p > 0$ , ces hypothèses se justifient car toute courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , est la fibre spéciale d'un schéma propre et lisse sur l'anneau des vecteurs de Witt  $W(k)$ . On a en effet le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** — Soit  $A$  un anneau local noethérien complet de corps résiduel  $k$ . Si  $X_0$  est un schéma projectif et lisse sur  $k$  tel que

$$H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = H^2(X_0, \Omega_{X_0/k}^\vee) = 0,$$

alors il existe un  $A$ -schéma projectif et lisse  $X$  tel que  $X \otimes_A k \simeq X_0$ .

*Démonstration.* Voir SGA 1, III, 7.3. □

Commençons par montrer que, sous les hypothèses du premier paragraphe,  $X$  est connexe.

**Lemme 1.2.** — Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre vers un trait. Alors tout ouvert  $U$  contenant la fibre spéciale est  $X$  tout entier.

*Démonstration.* C'est trivial car l'application  $f$  est fermée. □

**Corollaire 1.3.** — Sous les hypothèses précédentes,  $X$  est connexe.

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert-fermé non vide de  $X$ . On peut supposer qu'il rencontre  $X_s$ , qui est connexe, donc qu'il la contient. D'où  $U = X$ . □

**Remarque 1.4.** —  $X_{\bar{\eta}}$  est non vide car  $X$  se surjecte sur  $S$  (par lissité), puisque l'image contient le point fermé.

**Théorème 1.5.** — Sous les hypothèses précédentes, le morphisme canonique  $\pi_1(X_s) \rightarrow \pi_1(X)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Pour tablir la surjectivité, il s'agit de montrer que pour tout revêtement tale connexe  $Y \rightarrow X$ ,  $Y_s = Y \times_X X_s$  est connexe. On peut factoriser (EGA III, 4.3.1) le morphisme  $Y \xrightarrow{f} S$  en  $Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f'} S$ , avec  $Y' = \mathbf{Spec} f_*(\mathcal{O}_Y)$  fini (thorme de finitude), propre sur  $S$  et  $g$  fibres non vides, gomtriquement connexes. L'anneau  $R$  tant henslien, on a  $Y' = \coprod_{i=1}^n Y'_i$ , o les  $Y'_i$  sont des spectres d'algbres locales finies sur  $R$ ; mais comme  $Y'$  est l'image continue d'un connexe,  $n = 1$ . Puisque la factorisation de Stein donne une bijection entre les composantes connexes de  $Y_s$  et celles de la fibre  $Y'_s$  qui est connexe par ce qui prcde,  $Y_s$  est aussi connexe.

L'injectivité est plus dlicate. On part d'un revêtement tale connexe  $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  et on cherche montrer qu'il provient d'un revêtement tale sur  $X$  i.e. qu'il existe  $Y \rightarrow X$  fini tale tel que  $\bar{Y} \simeq Y \otimes_R k$ . Notant  $(\pi)$  l'idal maximal de  $R$ , posons  $X_n = X \times_R R/\pi^{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ . On sait (EGA IV, 18.1.2) que le foncteur  $Z_n \rightsquigarrow \bar{Z} = Z_n \times_{X_n} \bar{X}$  est une quivalence de catgories entre les  $X_n$ -schmas tales et les  $\bar{X}$ -schmas tales. Pour tout  $n$ , il existe donc  $Y_n$  tale sur  $X_n$  de rduction  $\bar{Y}$  modulo  $\pi$ . De plus,  $Y_n$  est fini sur  $X_n$  car il est propre et quasi-fini (cette dernire propriét est topologique donc se lit sur la fibre spciale). Notons  $\mathcal{M}_n$  la  $\mathcal{O}_{X_n}$ -algre cohrente telle que  $Y_n = \mathbf{Spec} \mathcal{M}_n$ . La pleine fidlité dans l'équivalence de catgories nous donne de plus des isomorphismes  $Y_{n+1} \times_{X_{n+1}} X_n \simeq Y_n$  et des relations analogues en termes d' $\mathcal{O}_{X_n}$ -algres cohrentes. On obtient ainsi un systme projectif qui dñit un faisceau cohrent formel  $\widehat{\mathcal{M}}$  sur le complt formel  $\widehat{X}$  de  $X$  le long de la fibre ferme. Comme  $X$  est propre sur  $R$  local noethrien, on a (1.6) une quivalence de catgories entre les  $\mathcal{O}_X$ -modules cohrents et les  $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ -modules formels cohrents. En particulier,  $\widehat{\mathcal{M}}$  est *algrisable*, i.e. il existe un  $\mathcal{O}_X$ -module cohrent  $\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_n} \simeq \mathcal{M}_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Ce  $\mathcal{O}_X$ -module est en fait muni d'une structure d' $\mathcal{O}_X$ -algre, vrifiant  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0} \simeq \mathcal{M}_0$  (en tant qu' $\mathcal{O}_{X_0}$ -algres). Reste montrer que  $Y = \mathbf{Spec} \mathcal{M}$ , qui est bien fini sur  $X$ , est aussi tale. Grce au (1.2), il nous suffit de le vrifier au-dessus de  $X_s$ , le lieu tale tant ouvert. Comme la nettet se lit sur les fibres, et comme  $Y_s \simeq \bar{Y}$  est tale sur  $\bar{X} = X_s$ ,  $Y$  est bien net au-dessus de  $X_s$ . D'autre part, la platitude rsulte du thorme (1.6).  $\square$

**Théorème 1.6 (d'algrisation).** — *Soit  $R$  un anneau local noethrien, d'idal maximal  $s$ . On pose  $Y = \mathbf{Spec}(R)$ . On considre galement un morphisme propre  $f : X \rightarrow Y$ ; on dsigne par  $\widehat{Y}$  (resp.  $\widehat{X}$ ) le complt formel de  $Y$  (resp. de  $X$ ) le long de  $Y_s$  (resp.  $X_s$ ), et on note  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  le prolongement de  $f$  aux complts. Le foncteur  $\widehat{\phantom{x}} : \mathcal{M} \mapsto \widehat{\mathcal{M}}$  est une quivalence de la catgorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohrents dans celle des  $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ -modules cohrents. De plus,  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre sur  $X_s$  ssi  $\mathcal{M}_n$  est un  $\mathcal{O}_{X_n}$ -module localement libre pour tout  $n$ .*

*Démonstration.* Voir EGA III,5.1.4.  $\square$

Pour tablir l'existence d'une flche de spcialisation, nous avons besoin de la

**Proposition 1.7.** — *Sous les hypotheses prcdentes, le morphisme canonique  $\pi_1(X_{\bar{\eta}}) \rightarrow \pi_1(X)$  est surjectif.*

On veut montrer que si  $Y \rightarrow X$  est un revêtement tale connexe, il en est de mme de  $Y_{\bar{\eta}} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ . crivons  $\bar{\eta}$  comme limite inductive de ses sous-extensions finies  $\eta'$  sur  $\eta$ ; par suite,  $Y_{\bar{\eta}} = \varprojlim Y_{\eta'}$ . Si  $Y_{\bar{\eta}}$  n'est pas connexe, ce schma contient un idempotent non trivial, et il en est de mme de  $Y_{\eta'}$  pour une extension  $\eta'$  suffisamment grande. Il suffit donc de montrer que  $Y_{\eta'}$  est connexe pour toute extension finie  $\eta'/\eta$ . Notons  $R'$  le normalis de  $R$  dans  $\eta' : Y_{\eta'}$  est la fibre gnrique de  $Y_{R'} = Y \times_R R'$ . Or ce dernier schma, qui est propre au-dessus de l'anneau  $R'$ , a une fibre spciale connexe isomorphe  $Y_s$ ; d'après (1.3) il est donc connexe. tant normal, il est mme irréductible. Ainsi  $Y_{\eta'}$ , qui est un ouvert de  $Y_{R'}$ , est galement irréductible, donc connexe.

**Théorème 1.8.** — *Soit  $X$  une courbe propre et lisse sur un anneau de valuation discrte complet de corps rsiduel algbriquement clos, dont on note  $\eta$  et  $s$  les points gnrique et ferm. Si on suppose  $X_s$  connexe, il en est de mme de  $X_{\bar{\eta}} = X_{\eta} \times_{\kappa(\eta)} \overline{\kappa(\eta)}$ , et il existe une flche canonique surjective, dite de spcialisation :*

$$\pi_1(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\text{sp}} \pi_1(X_s).$$

*Démonstration.* En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{\bar{\eta}}) & \xrightarrow{\text{sp}} & \pi_1(X_s) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \simeq \\ \pi_1(X_{\eta}) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{array}$$

Le morphisme de spcialisation est obtenu en inversant l'isomorphisme  $\pi_1(X_s) \rightarrow \pi_1(X)$ .  $\square$

Ce rsultat, joint ceux admis en introduction, nous permet de raliser le groupe fondamental d'une courbe propre et lisse sur un corps algbriquement clos de caractéristique  $p > 0$  comme quotient du “ $\pi_1$  analogue” en caractéristique nulle que l'on connaît par voie transcendante. En particulier, il est topologiquement de type fini, et engendr par  $2g$  lments,  $g$  dsignant le genre de  $X_{\bar{\eta}}$ . Or  $X_s$  et  $X_{\bar{\eta}}$  ont mme genre : en effet, l'application  $X \rightarrow S$  est plate donc la caractéristique d'Euler-Poincar du faisceau structural des fibres ne change pas et les  $H^0$  sont de dimension 1, puisque les courbes sont intgres sur des corps algbriquement clos. Voici l'nonc prcis :

**Corollaire 1.9.** — *Soit  $X_0$  une courbe de genre  $g$  propre, lisse et connexe sur un corps algbriquement clos. Alors le groupe profini  $\pi_1(X_0)$  admet un systme de  $2g$  gnrateurs topologiques  $s_i, t_i$ , lis par la relation*

## 2. Le cas des revêtements d'ordre premier $p$

Dans toute la suite, on notera  $p \geq 1$  l'exposant caractéristique de  $k$ . Si  $G$  est un groupe profini, on définit  $G^{(p')}$  comme le plus grand quotient de  $G$  d'ordre premier  $p$ , c'est-à-dire  $G$  divisé par le sous-groupe (normal) fermé engendré par les  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$ . On a donc  $G^{(p')} = \varprojlim G/N$ , les sous-groupes  $N$  tant fermés normaux d'indice fini premier  $p$ . Ainsi,  $\pi_1(X)^{(p')}$ , aussi noté  $\pi_1^{(p')}(X)$ , classifie les revêtements finis talaes galoisiens de  $X$  d'ordre premier  $p$ . De la surjection canonique  $G \rightarrow G^{(p')}$ , on déduit par fonctorialité le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{\bar{\eta}}) & \xrightarrow{\text{sp}} & \pi_1(X_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_{\bar{\eta}})^{(p')} & \longrightarrow & \pi_1(X_s)^{(p')} \end{array}$$

Il est clair que le morphisme du bas, qu'on note encore  $\text{sp}$  est une surjection.

**Théorème 2.1.** — *Le morphisme canonique  $\pi_1(X_{\bar{\eta}})^{(p')} \rightarrow \pi_1(X_s)^{(p')}$  est un isomorphisme.*

Pour montrer qu'il est injectif, il s'agit de prouver que tout revêtement talaal connexe  $Y_{\bar{\eta}} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$  de groupe de Galois  $G$  d'ordre premier  $p$  provient d'un revêtement talaal de  $X$ . Comme  $\kappa(\bar{\eta}) = \bar{K}$  est limite filtrante de ses sous-extensions finies, il existe (EGA IV<sub>1</sub>, 8) une extension finie  $K' \subset \bar{K}$  de  $K$  et un schéma  $Y_{K'}$  fini talaal sur  $X_{K'}$  tel que  $Y_{\bar{\eta}} \simeq Y_{K'} \otimes_{K'} \bar{K}$ . De même,  $Y_{\bar{\eta}}$  provient d'un revêtement  $Y \rightarrow X$  ssi il existe une extension  $K''$  de  $K'$  telle que  $Y_{K''} = Y_{K'} \otimes_{K'} K''$  soit isomorphe à  $Y \otimes_{K'} K''$ . Soit maintenant  $R'$  le normalisé de  $R$  dans  $K'$ ; c'est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et de corps des fractions  $K'$ . La projection  $X_{R'} \rightarrow X_R$  induit un isomorphisme sur les  $\pi_1$  (ils sont tous deux isomorphes à  $\pi_1(X_s)$  (1.5)). Ainsi, tout revêtement talaal de  $X_{R'}$  provient d'un revêtement sur  $X_R$ , si bien qu'il nous suffit de montrer l'existence d'un  $Y'$  sur  $X_{R'}$  induisant  $Y_{\bar{K}}$ .

On omettra donc les ' dans la suite (i.e. on suppose que l'on part d'un revêtement défini sur  $K$ ) et par extension de  $K$  on entendra sous-extension de  $\bar{K}$  contenant  $K$ . Comme nous l'avons vu, nous sommes ramens à montrer qu'il existe une extension finie  $K'$  de  $K$  (ancien  $K'$ ) telle que  $Y_{K'} = Y_K \otimes_K K'$  soit induit par un revêtement talaal de  $X_{R'}$ .

Partant de  $Y_K$ ,  $X_K$  et  $X$ , on peut (EGA II, 6.3) construire le normalisé  $\tilde{Y}$  de  $X$  dans le corps  $\mathcal{K}(Y_K)$  extension galoisienne finie de  $\mathcal{K}(X_K)$ . En effet, les schémas considérés sont normaux et intgros. La normalisation commutant à la localisation, la fibre générique de  $\tilde{Y}$  est isomorphe à  $Y_K$  et le morphisme  $\tilde{Y} \rightarrow X$  est fini (fait général quand on normalise dans une extension séparable), de dimension 2 par Cohen-Seidenberg. Cependant la normalisation peut avoir lieu de la ramification.

Au-dessus de l'ouvert  $X_K$ ,  $\tilde{Y}$  est talaal. Soit  $\xi$  le point générique de la fibre spéciale  $X_s$ . L'anneau  $\mathcal{O}_{X,\xi}$  est local régulier de dimension 1, i.e. un anneau de valuation discrète, d'uniformisante  $\pi$  (celle de  $R$ ) car  $\mathcal{O}_{X_s,\xi} = \mathcal{O}_{X_R,\xi}/(\pi)$  est un corps ( $\xi$  est le point générique, et  $\mathcal{O}_{X_s,\xi}$  est local régulier, donc intgre). Pour toute extension  $K'$  de  $K$ , on a  $\mathcal{K}(Y_{K'}) = \mathcal{K}(Y_K) \otimes_K K' = \mathcal{K}(Y_K) \otimes_{\mathcal{K}(X_K)} \mathcal{K}(X_{K'})$ , que l'on peut voir comme des extensions composées puisque  $Y_K$  est géométriquement intgre. Nous recherchons une extension finie  $K'$  de  $K$  telle que la fermeture intégrale  $\tilde{Y}'$  de  $X_{R'}$  dans  $\mathcal{K}(Y_{K'})$  soit non ramifiée au-dessus de  $\xi'$ , point générique de la fibre spéciale de  $X_{R'}$ ; nous pouvons alors conclure à l'aide du thème suivant :

**Théorème 2.2 (de pures de Zariski-Nagata).** — *Soient  $X$  un schéma régulier localement noethrien, et  $U \subset X$  le complémentaire d'un fermé de codimension  $\geq 2$ . Le foncteur  $X' \rightsquigarrow X' \times_X U : \text{Fet}_X^{(ii)} \rightarrow \text{Fet}_U$  est une équivalence de catégories d'inverse le foncteur normalisation.*

*Démonstration.* Ce résultat est difficile en général (cf. SGA 2,X). □

Lorsque  $\dim X \leq 2$ , on peut en donner une démonstration élémentaire.

**Corollaire 2.3.** — *Soit  $X$  un schéma régulier noethrien de dimension 2, et  $Y$  le normalisé de  $X$  dans une extension finie séparable de  $\mathcal{K}(X)$ . Si  $Y \rightarrow X$  est talaal en codimension 1, il est talaal partout.*

*Démonstration.* Prenons  $X = \text{Spec } A$ , où  $A$  est un anneau régulier de dimension 2. Le fait d'être talaal tant une propriété locale, on peut supposer  $A$  local. Soit  $M$  le normalisé de  $A$  dans l'extension considérée. C'est un  $A$ -module de type fini. Vu que  $M$  est un  $A$ -module réflexif,  $\text{prof}_A(M) \geq 2$  ([1], 1, §10, prop.16), et l'égalité  $\text{dp}_A(M) + \text{prof}_A(M) = \dim(A) = 2$  (loc. cit., 4, §1, prop.3) montre que  $M$  est un  $A$ -module libre. Or, le lieu de ramification d'une  $A$ -algèbre finie libre est défini par l'annulation de l'idéal discriminant  $(\delta)$ , où  $\delta = \text{Tr}(e_i e_j)$  pour une base  $(e_i)_{1 \dots n}$  de  $M$  sur  $A$ . Mais cet idéal, qui est principal, ne contient par hypothèse aucun idéal premier de hauteur 1. Le Hauptsatz entraîne que  $\delta$  est inversible, c'est-à-dire que  $M$  est talaal sur  $A$ . □

À présent, montrons l'existence de l'extension  $K'/K$  cherchée. On sait que l'inertie de l'extension  $\mathcal{K}(Y_K)/\mathcal{K}(X_K)$  en  $\xi$  est d'ordre  $n$  divisant  $|G|$ , qui est premier  $p$  : celle-ci est donc modérément ramifiée au-dessus de  $\mathcal{O}_{X,\xi}$ . Posons  $K' = K[T]/(T^n - \pi)$ ; c'est une extension galoisienne de  $K$  (contenant les racines de  $n$ -ièmes de l'unité, par le lemme de Hensel) totalement ramifiée de degré  $n$ . Il nous faut montrer que si  $\zeta'$  est un point de  $\tilde{Y}'$  au-dessus de  $\xi'$ ,  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}',\zeta'}$  est non ramifié au-dessus de  $\mathcal{O}_{X_{R'},\xi'}$ . Le lemme (2.4),

appliqué au diagramme suivant, fournit le résultat.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{K}(Y_{K'}), \mathcal{O}_{\tilde{Y}', \zeta'} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 \mathcal{K}(Y_K), \mathcal{O}_{\tilde{Y}, \zeta} & & \mathcal{K}(X_{K'}) = \mathcal{K}(X_K)(\sqrt[n]{\pi}), \mathcal{O}_{X_{R'}, \xi'} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{K}(X_K), \mathcal{O}_{X, \xi} &
 \end{array}$$

$n.r.$  (sur la flèche de droite vers le haut)  
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (sur la flèche de droite vers le bas)  
 $tame, n$  (sur la flèche de gauche vers le bas)

**Lemme 2.4.** — Soient  $V$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $K$ ,  $L$  et  $K'$  deux extensions finies galoisiennes de  $K$  modérément ramifiées au-dessus de  $V$ . On suppose que l'ordre de l'inertie de  $L/K$  divise celui de  $K'/K$ . Alors  $L' = LK'$  est une extension de  $K'$  non ramifiée sur les localisés de la clôture normale de  $V$  dans  $K'$ . En d'autres termes, la ramification "tue" la ramification.

Nous donnerons une démonstration en (3.4).

### 3. Rappels sur la ramification modère, application

**3.1. Cas d'un anneau de valuation discrète.** — Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $K$ , de corps résiduel  $k$  et de caractéristique résiduelle  $p$ . Soit  $L$  une  $K$ -algèbre locale (i.e. une extension finie séparable de  $K$ ). On dit que  $L$  est *modérément ramifiée* sur  $A$  si une clôture normale  $L'$  de  $L$  l'est, autrement dit si tout groupe d'inertie  $I$  de  $L'/K$  est d'ordre premier  $p$  (les groupes d'inertie tant tous conjugués, il suffit que cela soit vrai pour l'un d'entre eux).

Désignant par  $B$  un localisé de la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$ , et par  $I$  le groupe d'inertie correspondant, on sait que  $I$  est extension d'un groupe cyclique d'ordre premier  $p$  par un  $p$ -groupe : en effet, l'application  $\phi : I \rightarrow k^*$  définie par  $\phi(\sigma) = \sigma(u)/u \pmod{\mathfrak{m}_B}$  ( $u$  désignant une uniformisante de  $B$ ) est un morphisme de groupes, dont le noyau  $P$  est un  $p$ -groupe. De plus,  $\phi$  induit un isomorphisme de  $I/P$  dans un sous-groupe fini de  $k^*$ , qui est nécessairement cyclique, formé de racines de l'unité d'ordre premier  $p$ . On en déduit que  $P$  est le  $p$ -sylog de  $I$ , lequel s'insère dans une suite exacte :

$$1 \longrightarrow P = I^w \longrightarrow I \longrightarrow I^t \longrightarrow 1$$

où  $I^t$  est un groupe cyclique d'ordre premier  $p$ . Cette définition s'étend naturellement au cas où  $L$  est un produit fini d'extensions séparables de  $K$ .

**3.2. Cas d'un anneau de valuation discrète strictement local.** — On a la caractérisation simple suivante :  $L$  est *modérément ramifiée* sur  $A$  si et seulement si le degré de l'extension  $[L : K]$  est un entier premier  $p$ . En effet, désignons par  $L^{nor}$  une clôture normale et par  $B'$  le normalisé correspondant. Comme  $B'$  est intègre, il est local. Par ailleurs, puisque l'extension résiduelle est triviale, on a  $\text{Gal}(L^{nor}/K) = I$ . D'autre part, si  $L$  est modérément ramifiée sur  $K$ , alors  $I$  est d'ordre premier  $p$ , donc les degrés  $[L^{nor} : K] = |\text{Gal}(L^{nor}/K)|$  et  $[L : K]$  aussi. Inversement, si  $[L/K]$  est premier  $p$ , notant  $H = \text{Gal}(L^{nor}/L)$ , on voit que  $|G|/|H| = [L : K]$  est premier  $p$ . Par suite,  $P \subset H$ , ce qui prouve que  $H$  est distingué dans  $I$ , puisque  $P$  l'est et que le quotient est cyclique (cf. suite exacte ci-dessus). On en déduit que  $L = L^{nor}$  est une extension galoisienne de  $K$ , dont l'inertie  $I = \text{Gal}(L/K)$  est d'ordre premier  $p$ . On peut même décrire complètement les extensions modères de  $A$  (toujours dans le cas strictement local) : soit  $L/K$  une extension modère (donc galoisienne et cyclique, d'ordre  $n$  premier  $p$ ). Désignons par  $B$  le normalisé de  $A$  dans  $L$  : c'est un anneau de valuation discrète d'uniformisante  $x = \pi^n u$ , où  $u \in B^*$  et  $\pi$  est une uniformisante de  $A$ . Mais puisque  $B$  est strictement henslien, on peut trouver  $v \in B^*$ , tel que  $v^n = u$ . Remplaçant  $x$  par  $v^{-1}x$ , on en déduit facilement que  $B \cong A[x]/(x^n - \pi)$ . On appelle *extension modère standard* toute extension d'anneaux de valuation discrète strictement hensliens de cette forme,  $n$  tant supposé premier la caractéristique résiduelle de  $A$ .

**3.3. Lien avec l'henslisation.** — Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de caractéristique discrète  $p$ , de corps des fractions  $K$  et  $L$  une extension séparable de  $K$ . On note  $A^{hs}$  l'henslisation stricte de  $A$ ,  $K^{hs}$  son corps des fractions, et  $L^{hs} = K^{hs} \otimes_K L$ . L'extension  $L$  est modérément ramifiée au-dessus de  $A$  si et seulement si  $L^{hs}$  est modérément ramifiée au-dessus de  $A^{hs}$ . Autrement dit, le fait d'être modérément ramifié est une question locale pour la topologie étale (cf. SGA 1, XIII, 2.0.2).

**3.4. Démonstration du lemme (2.4).** — Grâce aux techniques d'henslisation, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme (2.4).

Puisque le problème est local pour la topologie étale, on peut remplacer les anneaux par leurs henslisations strictes, notés  $A, B$  (le normalisé de  $A$  dans  $L^{hs} = L \otimes_K K^{hs}$ ), et  $A'$  (celui dans  $K'^{hs}$ ). Soit  $\pi$  une uniformisante de  $A$ . D'après (3.2), tout revêtement modère de  $A$  est de forme standard, donc  $B = A[t]/(t^n - \pi)$  et  $A' = A[x]/(x^m - \pi)$ , où  $n$  et  $m$  sont des entiers premiers la caractéristique résiduelle de  $A$ , tels que  $n|m$ . Notant  $B'$  le normalisé de  $A' \otimes_A B$ , on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B'
 \end{array}$$

Dans ce cas,  $A'$  domine  $B$ , et on dispose de  $n$  applications naturelles  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  de  $B$  dans  $A'$  définies par  $\sigma_i(t) = \zeta^i \frac{m}{n} x$ . Les

est bijectif sur les corps de fractions (les deux anneaux sont normaux, et  $j$  est fini). Par suite,  $B'$  est une somme de  $n$  copies de  $A'$ , donc le morphisme  $A' \rightarrow B'$  est bien tale.

## PARTIE II RAMIFICATION MODRE AU-DESSUS D'UN DIVISEUR TALE

### 4. Dfnitions et nonc du thorme

**Définition 4.1.** — Soient  $X$  un schma,  $D$  un diviseur de Cartier<sup>(iii)</sup> sur  $X$  (i.e. un sous-schma ferm, localement dfni par un lment non diviseur de 0), et  $U = X - D$ . On dit qu'un revtement fini  $Y \rightarrow X$  tale au-dessus de  $U$  est modrment ramifi le long de  $D$  si, pour tout  $x \in D$ , les composantes locales du schma  $Y \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}^{h,s}$  sont du type "standard" :  $\mathcal{O}_{X,x}^{h,s}[T]/(T^m - a)$ , o  $m$  est premier car  $\kappa(x)$  et  $a$  est une quation locale du diviseur tir sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}^{h,s}$ .

La dfinition donne ne dpend pas de l'quation  $a$  choisie car deux quations  $a$  et  $a'$  de  $D$  diffrent par une unit  $u$  de  $\mathcal{O}_{X,x}^{h,s}$ , qui est une puissance  $m$ -ime puisque  $(m, \text{exp. car } \kappa(x)) = 1$ . De plus,  $Y$  est ncessairement plat sur  $X$ . Dans le cas rgulier, on a le

**Lemme 4.2.** — *Si  $X$  est un schma rgulier et  $D$  un diviseur rgulier (i.e. localement dfni par un paramtre rgulier), alors  $Y$  est rgulier.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $y \in Y$  au-dessus de  $x \in D$ , l'anneau local strictement henslien  $\mathcal{O}_{\bar{y}}$  est rgulier. Par hypothse sur  $X$ , l'idal maximal de  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$  est engendr par  $n$  lments  $(x_1, \dots, x_n)$ , o  $x_1 = d$  est une quation de  $D$  et  $n$  dsigne la dimension de  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ . Puisque  $\mathcal{O}_{\bar{y}}$  est fini sur  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ , cet anneau est aussi de dimension  $n$ , et son idal maximal est engendr par le systme  $(t, x_2, \dots, x_n)$  (o  $t^n = d$ ).  $\mathcal{O}_{\bar{y}}$  est donc rgulier, et  $\mathcal{O}_y$  aussi d'aprs (EGA IV<sub>4</sub>, 18.6.10).  $\square$

Soit  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme de schmas, o  $X$  satisfait (4.2). On note  $U'$  (resp.  $D'$ ) l'image rciproque de  $U$  (resp.  $D$ ) dans  $X'$ . Si  $g : Y \rightarrow X$  est un revtement modr de  $X$  le long de  $D$ , alors le morphisme  $g' : Y' = Y \times_X X' \rightarrow X'$  est un revtement de  $X'$  modr le long de  $D'$ . En d'autres termes, *les extensions modrment ramifiées sont stables par changement de base*. De plus, la catgorie des revtements de  $U$  dont les normaliss sont modrs le long de  $D$  est une catgorie galoisienne, ce qui permet de dfnir un nouvel objet  $\pi_1^t(U)$  faisant intervenir  $X$  (l'algbriation n'tant possible a priori que sur un schma propre) qui va nous servir de pont. Nous avons donc deux flches naturelles :  $\pi_1^t(U_s) \longrightarrow \pi_1^t(U_{\bar{\eta}})$  et  $\pi_1^t(U_{\bar{\eta}}) \longrightarrow \pi_1^t(U)$ .

**Remarque 4.3.** — Notre dfinition de la ramification modre n'est raisonnable que dans le cas des courbes relatives. En dimension suprieure, il y a lieu d'introduire de la ramification modre le long d'un diviseur croisements normaux (cf. [5]).

**Théorème 4.4.** — *Soient  $X$  une courbe propre et lisse fibres gomtriquement connexes sur un trait strictement henslien  $S$ , et  $D$  un diviseur de  $X$  tale sur  $S^{(iv)}$ . On note  $U$  le complémentaire de  $D$  dans  $X$ . Sous ces hypothses, il existe un morphisme canonique surjectif*

$$\text{sp} : \pi_1^t(U_{\bar{\eta}}) \longrightarrow \pi_1^t(U_s),$$

qui induit un isomorphisme

$$\text{sp} : \pi_1^{(p')}(U_{\bar{\eta}}) \longrightarrow \pi_1^{(p')}(U_s).$$

Notons que  $D$  est ncessairement dfni par un paramtre rgulier. Soit en effet  $x \in D_s$ , et  $d \in \mathcal{O}_{X,x}$  une quation de  $D$ . Puisque  $D$  est tale sur le schma strictement henslien  $S$ , le compos  $R \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}/d = \mathcal{O}_{D,x}$  est un isomorphisme. La suite  $(d, \pi)$  ( $\pi$  dsignant une uniformisante de  $R$ ) est donc un systme de paramtres rguliers de  $\mathcal{O}_{X,x}$  (car cet anneau est de dimension deux), ce qui prouve que  $D$  est rgulier. Par conséquent, on peut appliquer le lemme (4.2).

### 5. Dmonstration

Comme dans le cas propre, on commence par tablir la

**Proposition 5.1.** — *Sous les hypothses prcdentes,  $\pi_1^t(U_s) \xrightarrow{\sim} \pi_1^t(U)$ .*

La subjectivit se dmontre comme dans le cas propre, puisqu'ici encore connexe quivaut irrductible, car les schmas considrs sont rguliers.

L'injectivit est nouveau plus dlicate. Il s'agit de montrer que si  $Y_s \rightarrow U_s$  est fini tale, et tel que son normalis  $\widetilde{Y}_s$  soit modrment ramifi le long de  $D_s$ , il existe un revtement  $\widetilde{Y} \rightarrow X$ , tale sur  $U$  et modrment ramifi le au-dessus de  $D$ , tel que  $\widetilde{Y} \times_X U_s \simeq Y_s$ . On peut supposer que  $D$  est irrductible, et on note  $x \in D_s$  son point ferm et  $\tau \in D_{\bar{\eta}}$  son point gnrique.

On commence par montrer l'existence et l'unicit, isomorphisme unique prs, d'un tel schma  $\widetilde{Y}_n$  sur  $X_n = X \times_R R/\pi^{n+1}$ . On introduit de mme  $U_n$  et  $D_n$ . Sur  $U_n$  l'existence et l'unicit rsulte comme prcdemment de l'quivalence de catgories entre  $\text{FET}|_{U_s}$  et  $\text{FET}|_{U_n}$ . Soit  $x_n \in D_n$ . Notons  $\mathcal{O}_n$  l'anneau  $\mathcal{O}_{X_n, x_n}$ , ou encore son spectre et  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$  son henslis (ncessairement strict); de mme on pose  $\widetilde{U}_n = U_n \times_{\mathcal{O}_n} \widetilde{\mathcal{O}}_n$ ,  $\widetilde{D}_n = D_n \times_{\mathcal{O}_n} \widetilde{\mathcal{O}}_n$ . Il est facile de construire un revtement  $\widetilde{Y}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{O}}_n$  modr en  $x_n$ , tel que  $\widetilde{Y}_n \times_{\widetilde{\mathcal{O}}_n} \widetilde{\mathcal{O}}_0 \cong \widetilde{Y}_s$ . Pour cela, on choisit une quation  $\widetilde{a}_n = 0$  de  $\widetilde{D}_n$ , dfnie modulo une unit de  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$ . Sur  $\widetilde{\mathcal{O}}_0$ , chaque composant

local est alors donn par une quation  $\bar{b}^m = \bar{a}$ , o  $\bar{a}$  dsigne la rduction  $\text{mod } \pi$  de  $\widetilde{a}_n$ . On pose alors  $\widetilde{Y}_n = \text{Spec } \widetilde{\mathcal{O}}[T]/(T^m - \widetilde{a}_n)$ , qui est bien modr. On prouve en outre qu'un tel revtement sur  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$  est unique isomorphisme unique prs; compte tenu de l'unicit sur  $\widetilde{U}_n$ , cela dcoule du lemme suivant.

**Lemme 5.2.** — *Sous les hypotheses prcdentes, considrons deux revtements de  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$ ,  $\widetilde{Y}_n$  et  $\widetilde{Y}'_n$  modrs le long de  $\widetilde{D}_n$ . Tout  $\widetilde{U}_n$ -isomorphisme  $\varphi : \widetilde{Y}_n|_{\widetilde{U}_n} \xrightarrow{\sim} \widetilde{Y}'_n|_{\widetilde{U}_n}$  se prolonge de manire unique en un  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$ -isomorphisme  $\widetilde{Y}_n \xrightarrow{\sim} \widetilde{Y}'_n$ .*

*Démonstration.* Les revtements tant finis au-dessus de  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$ , on a  $\widetilde{Y}_n = \coprod \widetilde{Y}^i$  o chaque  $\widetilde{Y}^i$  est local. Puisque le revtement est modr,  $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}^i}$  est de plus  $\widetilde{\mathcal{O}}_n$ -isomorphe un composant standard  $\widetilde{\mathcal{O}}_n[T]/(T^m - \widetilde{a}_n)$  avec  $m$  premier la caractéristique rsiduelle. La partie de chaque composant local situe au-dessus de  $\widetilde{U}_n$  est irréductible donc connexe; on est ainsi ramen au cas d'un seul composant local. On suppose  $\widetilde{Y}_n \cong \widetilde{\mathcal{O}}_n[T]/(T^m - \widetilde{a}_n)$  et  $\widetilde{Y}'_n \cong \widetilde{\mathcal{O}}_n[T]/(T^{m'} - \widetilde{a}_n)$ . Ncessairement,  $m = m'$  car c'est le degr du revtement tale  $\widetilde{Y}_n|_{\widetilde{U}_n} \rightarrow \widetilde{U}_n$ . De plus, comme  $T^m = \widetilde{a}_n$ , on a  $\varphi(T)^m = \widetilde{a}_n = T^m$  dans  $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}'_n|_{\widetilde{U}_n}}$ . Puisque  $\widetilde{Y}'_n|_{\widetilde{U}_n}$  est irréductible ( $\widetilde{Y}'_0$  l'est car il est rgulier), il existe une unique racine  $m$ -ime de l'unit  $\zeta \in \widetilde{\mathcal{O}}_n$  telle  $\varphi(T) = \zeta T$  sur  $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}'_n|_{\widetilde{U}_n}}$ , d'o l'existence du prolongement et son unicit.  $\square$

**Remarque 5.3.** — Ce lemme nous permettrait de faire de la descente galoisienne de l'henslis strict l'henslis si l'on n'avait pas suppos  $k$  algbriquement clos.

**Lemme 5.4.** — *Soient  $\mathcal{O}$  un anneau local,  $F$  le point ferm de  $S = \text{Spec } \mathcal{O}$ ,  $U$  son complmentaire. Notons  $\tilde{\mathcal{O}}$  l'henslis de  $\mathcal{O}$  et  $\tilde{U}, \tilde{F}$  les images inverses dans  $\tilde{S} = \text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}$ . On a une quivalence de catgories entre les schmas  $Z$  finis sur  $S$ , tales sur  $U$  et les triplets  $(\tilde{Z}, Z|_U, \varphi)$ , o :  $\tilde{Z}$  est fini sur  $\tilde{S}$  et tale sur  $\tilde{U}$ , et  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\tilde{U}$ -schmas entre  $\tilde{Z}|_{\tilde{U}}$  et  $(f|_{\tilde{U}})^*(Z|_U)$ , les flches tant dfinies de façon naturelle.*

*Démonstration.* On considre le diagramme de schmas affines suivant :

$$S \xleftarrow{f} \tilde{S} \xrightleftharpoons[p_1]{p_2} \tilde{S} \times_S \tilde{S}$$

On prouve d'abord que le schma  $\tilde{Z}$  est muni d'une donne de descente relativement  $f$ . Pour cela, on remarque que  $\tilde{S} \times_S \tilde{S} \cong \tilde{S} \amalg T$ , o  $p_1(T)$  et  $p_2(T)$  sont inclus dans  $\tilde{U}$  (en effet, le morphisme diagonal  $\tilde{S} \xrightarrow{\Delta} \tilde{S} \times_S \tilde{S}$  est une immersion ouverte et ferme, et la fibre de ce morphisme en  $F$  est un isomorphisme). Comme  $\tilde{Z}|_{\tilde{U}}$  provient d'un  $U$ -schma, il existe un isomorphisme  $(p_1^* \tilde{Z})|_T \rightarrow (p_2^* \tilde{Z})|_T$  satisfaisant la condition de cocycle. En le prolongeant par l'identit au-dessus de  $\Delta(\tilde{S})$ , on obtient une donne de descente. On conclut ensuite par descente fidèlement plate.  $\square$

On doit maintenant montrer qu'il existe un revtement  $Y_n \rightarrow X_n$ , unique isomorphisme unique prs, modr le long de  $D_n$  et se rduisant en  $Y_s$ . En crivant  $\text{Spec } \mathcal{O}_n$  comme limite projective des voisinages de Zariski de  $x_n$  dans  $X_n$ , on montre que le schma  $Z_n$  obtenu par le lemme prcdent provient d'un revtement convenable au-dessus d'un ouvert  $V \ni x_n$  (EGA IV,8). Il se recolle avec celui au-dessus de  $U_n$  par unicit du revtement sur  $U_n \cap V$ . On prouve mme que le revtement ainsi obtenu est unique isomorphisme unique prs.

Nous construisons ainsi un systme projectif de  $\mathcal{O}_{X_n}$ -algbres cohrentes, que l'on algbrise. Comme dans la partie prcdente, il s'agit bien d'une  $\mathcal{O}_X$ -algre  $\mathcal{M}$  de type fini. On pose  $Y = \mathbf{Spec}(\mathcal{M})$ . Par hypothse,  $\mathbf{Spec}(\mathcal{M} \otimes_R R/\pi^{n+1})$  est un revtement tale sur  $U_n$ , modrment ramifi le long de  $D_n = D \times_X X_n$ , et  $\mathbf{Spec}(\mathcal{M} \otimes_R R/\pi) \simeq Y_s$ . Il reste montrer que  $Y$  est fini, tale sur  $U$  (cf. cas propre), et modrment ramifi le long de  $D$ .

Montrons que  $Y$  est modrment ramifi au-dessus de  $D$ , ce qui assurera que  $Y$  est un revtement fini de  $X$ , tale sur  $U$  et modr le long de  $D$ . Soit donc  $y \in Y$  au-dessus de  $x \in D_s$ . On veut montrer que l'application  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  induit un revtement modr standard aprs henslisation stricte. On sait dj qu'il en est ainsi aprs compltion  $\pi$ -adique car  $\mathcal{O}_{X_n,x}^{hs} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_n,y}^{hs}$  est standard pour tout  $n \geq 0$ , donc  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{hs} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}^{hs}$  aussi. Comme  $(\hat{A})^{hs} = \hat{A}$  si  $A$  est strictement henslien (EGA IV, 18.6.6), il nous reste montrer le lemme suivant :

**Lemme 5.5.** — *Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme fini local entre deux anneaux strictement locaux rguliers de dimension 2. On suppose que  $(\pi, d)$  est une suite de paramtres rguliers de  $A$ . On note  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  les complts de  $A$  et  $B$  pour la topologie  $\pi$ -adique. Si  $\hat{A} \rightarrow \hat{B} \simeq \hat{A}[T]/(T^m - d)$ , avec  $m$  premier la caractéristique rsiduelle de  $A$ , alors  $B \simeq A[T]/(T^m - d)$ .*

*Démonstration.* On remarque d'abord que  $B$  est un  $A$ -module libre de rang fini  $m$ . Il est de la forme  $A[T]/J$ , o  $J$  est idal de  $A[T]$ . En effet, fixant une suite de paramtres  $(x, \pi)$  de  $B$ , l'application  $A[T] \rightarrow B$  qui envoie  $T$  sur  $x$  est surjective. D'apr Cayley-Hamilton,  $J$  est engendr par un polynme unitaire  $P$  de degr  $m$ . Notons  $\bar{A} = A/d$  et  $\bar{P}$  l'image de  $P$  dans  $\bar{A}[T]$ . Par hypothse,  $\bar{P}$  a une racine d'ordre  $m$  dans  $\hat{\bar{A}}$ , donc dans  $\bar{A}$  car  $m$  est premier  $p$ . Dans  $B$  qui est factoriel, l'equation  $d = 0$  dfini un multiple  $m$ -ime d'un diviseur d'equation  $f = 0$ , i.e.  $f^m = du$  o  $u$  est une unit de  $B$ . L'lement  $u$  possdant une racine  $m$ -ime dans  $B$ , on a  $d = f^m$  et le polynme minimal de  $f'$  est  $T^m - d$ .  $\square$

**Proposition 5.6.** — *Sous les hypotheses prcdentes, la flche canonique  $\pi_1^{\dagger}(U_{\bar{n}}) \rightarrow \pi_1^{\dagger}(U_s)$  est surjective.*

*Démonstration.* La démonstration est semblable celle donne dans le cas propre.  $\square$

**Proposition 5.7.** — *Sous les hypothèses précédentes, l'homomorphisme de spécialisation  $\pi_1^t(U_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\text{sp}} \pi_1^t(U_s)$  induit un isomorphisme :*

$$\pi_1^{(p')} (U_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{(p')} (U_s).$$

*Démonstration.* Seule l'injectivité est à prouver. On doit donc montrer que tout revêtement  $Y_{\bar{\eta}} \rightarrow U_{\bar{\eta}}$ , galoisien de groupe  $G$ , modérément ramifié le long de  $D_{\bar{\eta}}$  (i.e. tel que l'inertie en un point  $t$  de  $D_{\bar{\eta}}$  soit de degré  $m$  divisant  $|G|$ , et premier  $\text{car.}\kappa(\bar{\eta})$ ), provient d'un revêtement sur  $X$  modérément ramifié le long de  $D$ . Comme précédemment, on peut supposer que l'on a un revêtement défini sur  $\kappa(\eta)$  : en effet, si  $R \rightarrow R'$  est une extension finie d'anneaux de valuations discrètes, on a encore  $\pi_1^t(X_{R'}) = \pi_1^t(X_s)$  car  $\kappa(s)$  est algébriquement clos.

On tend  $Y_{\bar{\eta}} \rightarrow X_{\bar{\eta}} \rightarrow Y \rightarrow X$  par normalisation. Ce morphisme est fini mais peut-être ramifié en le point générique  $\xi$  de la fibre spéciale. Comme  $(|G|, p) = 1$ , la ramification est au pire ordre et disparaît donc par une extension modère de  $R$ , comme dans le cas propre. D'après le théorème de pureté (2.2), on peut donc supposer  $Y \rightarrow X$  tôle sur  $U$  tout entier.

Il résulte alors du lemme suivant que la ramification est automatiquement modère le long de  $D$ , avec le même indice  $m$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Lemme 5.8 (d'Abhyankar).** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma régulier de dimension 2,  $D \subset X$  un diviseur régulier. Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme fini, tôle sur  $U = X - D$ , et ramifié le long de  $D$ . On suppose que le revêtement  $f$  est modère au-dessus des points génériques de  $D$  et d'ordre  $m$  premier  $p$ . Alors  $f$  est modérément ramifié le long de  $D$ .*

*Démonstration.* Le fait d'être modérément ramifié tant au point générique que localement pour la topologie tôle, on peut supposer  $X$  strictement hensélien. Notons  $a$  une équation de  $D$ . Au-dessus de  $X$ ,  $Y$  est décomposé en composantes locales ; prenons-en une et montrons qu'il est du "type"  $y^m = a$ . Notant  $m$  le degré de l'inertie au point générique de  $a = 0$ , posons  $X' = X[T]/(T^m - a) \rightarrow X$ . C'est un revêtement modère standard et  $X'$  est régulier par le lemme (4.2). Soit  $\widetilde{Y}'$  le pull-back normalisé. On a le diagramme commutatif suivant (non nécessairement cartésien) :

$$\begin{array}{ccc} X' & \longleftarrow & \widetilde{Y}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & Y \end{array}$$

Au-dessus de  $U'$ , l'extension  $\widetilde{Y}' \rightarrow X'$  reste tôle. De plus, la ramification modère a disparu au-dessus de tout point  $t' \in D'_{\eta}$  (2.4), si bien que  $\widetilde{Y}'$  est tôle en codimension 1, donc partout par le théorème de pureté, puisque  $X'$  est régulier. Mais  $X'$  est strictement hensélien (car fini sur  $X$ ), donc  $\widetilde{Y}'$  est totalement décomposé sur  $X'$ . On a alors une section  $\sigma$  de  $\widetilde{Y}' \rightarrow X'$ , qui donne par composition un morphisme  $\psi : X' \rightarrow Y$ . La situation est résumée dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftrightarrow{\quad} & \widetilde{Y}' \\ \downarrow & \searrow^{\sigma} & \downarrow \\ X & \xleftrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

Il reste à montrer que  $\psi$  est un isomorphisme. Or cela résulte du fait que  $[\mathcal{K}(X') : \mathcal{K}(X)] = m$ ,  $[\mathcal{K}(Y) : \mathcal{K}(X)] = |G| \geq m$ , et de la propriété suivante : si  $A \hookrightarrow B$  est une injection entre anneaux intgralement clos vérifiant  $\text{Frac}(A) = \text{Frac}(B)$ , avec  $B$  fini sur  $A$ , alors  $A = B$ . On applique ceci à  $X'$  et  $Y$ , qui sont normaux connexes, après avoir remarqué que  $\psi$  est fini et dominant.  $\square$

**Remarque 5.9.** — Considérons maintenant une courbe  $X$  propre sur  $R$ , semi-stable (cf. [6]), fibre générique lisse. Soit  $D$  un diviseur tôle sur  $X$ , fini sur  $R$  et contenu dans le lieu lisse de  $X$  et notons  $U$  l'ouvert  $X - D$ . Alors on a encore une notion de revêtement modère de  $U$  et de  $U_s$  qui tient compte des points doubles de  $X_s$ . Il y a toutefois une différence essentielle avec le cas lisse, que l'on vient de traiter : un revêtement fini modère de  $U_s$  se relève en un revêtement modère de  $U$  seulement après une extension modère de  $R$  (cf [7] et [8]).

## 6. Application

Voici une application (non immédiate) du théorème de spécialisation.

**Théorème 6.1.** — *Soit  $X$  une courbe propre et lisse au-dessus d'un corps  $k$  séparablement clos,  $D$  un diviseur régulier tôle sur  $k$ , et  $U = X - D$ . Soit  $k'$  une extension algébriquement close de  $k$ . On désigne par  $X'$  (resp.  $D'$ , resp.  $U'$ ) les schémas déduits de  $X$  (resp.  $D$ , resp.  $U$ ) par le changement de base  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ . La flèche canonique  $\pi_1(U') \rightarrow \pi_1(U)$  induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux modères :*

$$\pi_1^t(U') \xrightarrow{\sim} \pi_1^t(U).$$

**Corollaire 6.2.** — *Soit  $X_{\bar{\mathbb{Q}}}$  une courbe propre et lisse au-dessus de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ , et notons  $X_{\mathbb{C}}$  la courbe déduite par le changement de base  $\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \bar{\mathbb{Q}}$ . Alors  $\pi_1(X_{\bar{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_{\mathbb{C}})$ .*



## 7. Bibliographie

- [1] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique, Algèbre commutative, chapitre X*. Masson, 1998.
- [2] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique*. Publication mathématiques de l'I.H.E.S.
- [3] A. Grothendieck. *Relevements étales et groupe fondamental*. Springer-Verlag, LNM **224**.
- [4] A. Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et thormes de Lefschetz locaux et globaux*. Advanced Studies in Pure Mathematics, North-Holland.
- [5] A. Grothendieck et J. Murre. *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*. Springer-Verlag, LNM **208**.
- [6] D. Mauger. *Module des courbes stables*. Ce volume.
- [7] M. Saidi. *Relevements modrs et groupe fondamental de graphes de groupes*. Compositio Math. **107**, (1997).
- [8] K. Stevenson *Galois groups of unramified covers of projective curves in characteristic  $p$* . Journal of Algebra **182**, (1996).

---

FABRICE ORGOGOZO, cole normale suprieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cedex 05, France • Courriel : [fabrice.orgogozo@ens.fr](mailto:fabrice.orgogozo@ens.fr)  
ISABELLE VIDAL, cole normale suprieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cedex 05, France • Courriel : [ividal@ens.fr](mailto:ividal@ens.fr)