HAL open science

Sur le centralisateur d'une involution de 2E6(2)

Marguerite Virotte-Ducharme

To cite this version:

Marguerite Virotte-Ducharme. Sur le centralisateur d'une involution de 2E6(2). 2007. hal-00195855

HAL Id: hal-00195855

https://hal.science/hal-00195855v1

Submitted on 11 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00195855, version 1 - 11 Dec 2007

Sur le centralisateur d'une involution de ${}^2E_6(2)$.

Marguerite-Marie Virotte-Ducharme
Équipe des groupes finis, UMR 7586; Institut de Mathématiques
175, rue du Chevaleret; 75013 Paris France.

11 décembre 2007

Résumé

On établit que le groupe $2^{20+1}.U_6(2)$, centralisateur dans ${}^2E_6(2)$ d'une involution de la classe $2A$, est un quotient du groupe de Coxeter défini via le diagramme Q_{222}. Cela répond à un problème laissé ouvert dans la détermination des Q-groupes.

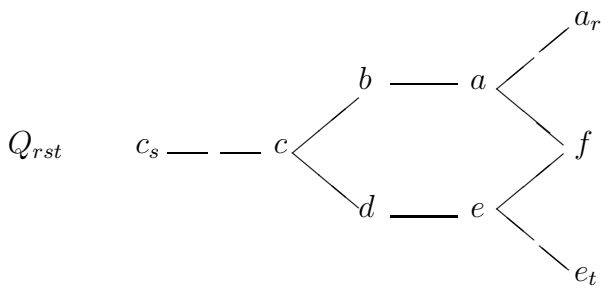
Abstract

In this paper we prove that $2^{20+1}.U_6(2)$, known as the centralizer of an involution in the group ${}^2E_6(2)$ is a quotient of a Coxeter group. We obtain a presentation of $2^{20+1}.U_6(2)$ as a Q_{222}-group, which now resolve a long pending question.

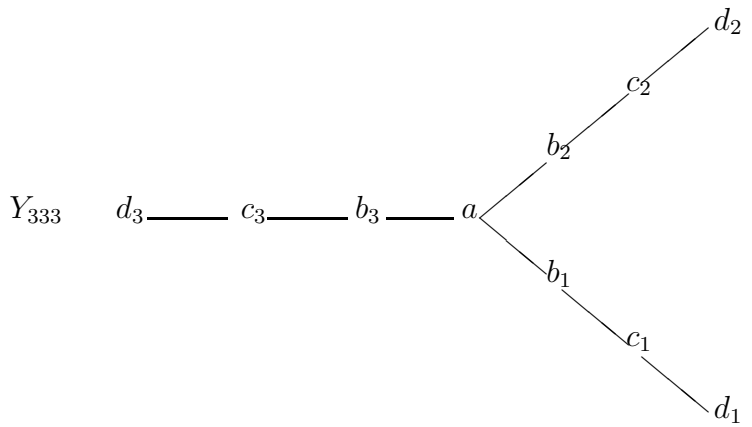
1 Introduction

1.1 Motivation et résultats

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est engendré par un ensemble d'involutions correspondant aux sommets d'un graphe X (graphe de Coxeter) tel que si x et y sont des éléments distincts dans X leur produit est d'ordre 3 s'ils sont joints par une arête et d'ordre 2 dans le cas contraire. On appelle Q-groupe un quotient du groupe de Coxeter défini par un graphe de Coxeter Q_{rst} $(1 \leqslant r, s, t \leqslant 4)$ où Q_{111} est un hexagone muni de trois bras notés $a = a_1, a' = a_2, \ldots, a_r$, $c = c_1, c' = c_2, \ldots, c_s$, $e = e_1, e' = e_2, \ldots, e_t$:



Les groupes $3^5 \rtimes S_6$, $2.O_6^-(3):2$ et $U_6(2)$ sont des Q-groupes définis à partir de Q_{111}, Q_{211} et Q_{221} ; on en rappelle des présentations en annexe (voir aussi l'ATLAS [2]).
Dans un article déjà ancien [11] L. H. Soicher établit que le groupe $E = 2^3.{}^2E_6(2)$ est le quotient par la relation $S = 1$ du groupe de Coxeter défini par :



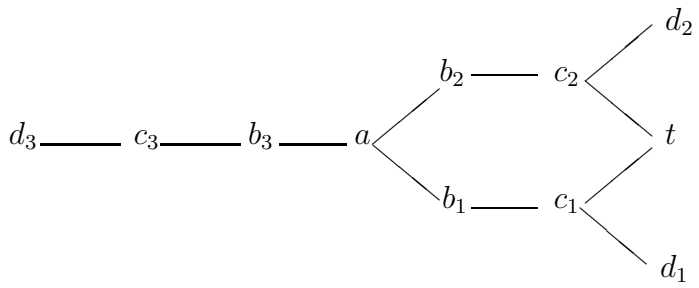
avec $S = (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10}$; le groupe E admet donc la présentation

$$E = (a, b_i, c_i, d_i (1 \leqslant i \leqslant 3)/Y_{333}, S = 1)$$

et son centre est $< f_{12}, f_{23}, f_{31} >$ où $f_{ij} = (ab_ib_jb_kc_ic_jd_i)^9$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (notation de l'ATLAS [2]).

L. H. Soicher met en évidence un élément t de E satisfaisant à

$(_*)$



et à la relation hexagonale : $V = 1$ avec $V = (atb_2c_1c_2b_1)^4$.
Le centralisateur de d_3 dans E contient donc des éléments satisfaisant aux relations de graphe Q_{222} obtenu à partir de $(_*)$ en omettant d_3 et c_3.
On connaît la structure du centralisateur d'une involution d de E provenant de la classe $2A$ dans $\bar{E} = E/Z(E)$: $C_E(d) \simeq 2^4.2^{20}.U_6(2)$ et $C_{\bar{E}}(\bar{d}) \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$, $\bar{d}$ désignant l'image de d dans $\bar{E}$ ([2], [6], [9], [12]).

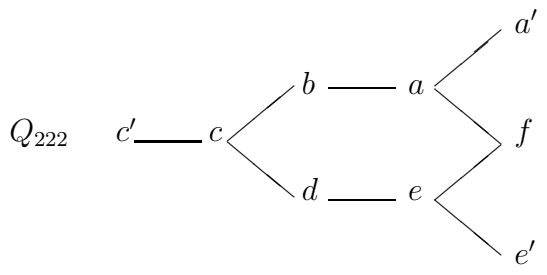
Dans [11] L. H. Soicher ne donne pas de présentation de $C_E(d)$, mais conjecture, comme dans l'ATLAS ([2], [10]) que $C_E(d)$ est un quotient du groupe défini par Q_{222} et $V = 1$.

L'objet de ce travail est de décrire un jeu de relations noté $rel(i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ (avec $rel(1) \Rightarrow rel(2) \Rightarrow rel(3)$) suffisant pour définir les groupes $2^{20+1}.U_6(2)$, $2^4.2^{20}.U_6(2)$ et un troisième groupe $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$.
On se propose d'établir le résultat suivant :

Théorème. *Soit G un groupe avec la présentation :*

$$G = (a, b, \ldots, f, a', c', e'/Q_{222}, V = 1, rel(i))(1 \leqslant i \leqslant 3)$$

où



$$V = (adbecf)^4 \quad \textit{(relation hexagonale)}$$
$$rel(i) \qquad \textit{(voir ci-après)},$$

et soit H le sous-groupe de G engendré par $a, b, \ldots, f, a', c'$.
Pour $i = 1$, le groupe G est isomorphe au centralisateur d'une involution de la classe $2A$ de ${}^2E_6(2)$: on a $G \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$ et H est isomorphe à $2.U_6(2)$.
Pour $i = 2$, le groupe G est isomorphe à $2^4.2^{20}.U_6(2)$ et H à $2.2.U_6(2)$.
Pour $i = 3$, le groupe G est isomorphe à $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$ et H à $2^2.2.U_6(2)$.
Notations :

- $rel(1) = \{r = 1, z_1 = z_2 = z_3 = 1, m_a = m_e = 1\}$,
- $rel(2) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1, m_a = m_e = 1\}$,
- $rel(3) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1\}$,
- $r = (\mathcal{C}^{ee'de}\mathcal{A})^4$ *avec* $\mathcal{C} = c^{c'dbc}$ *et* $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$,
- $\mathcal{R} = (\mathcal{C}^{ee'de}.\mathcal{C}^{aa'ba})^2$,
- $z_1 = (cc'bdaee')^9$,
- $z_2 = (cc'bdeaa')^9$,
- $z_3 = (ee'dfcaa')^9$,
- $m_a = (aa'fbcd)^5$,
- $m_e = (ee'dfab)^5$.

1.2 Méthodes et Plan

Notons E un groupe isomorphe à $2^3.{}^2E_6(2)$ et G un groupe satisfaisant aux conditions du théorème dans le cas $i = 3$.
Le travail comporte quatre parties : des résultats préliminaires, la construction d'un certain sous-groupe N, la démonstration proprement dite du théorème enfin des tables et une annexe.

1.2.1 Les résultats préliminaires

D'abord on donne quelques compléments sur les éléments intervenant dans les relations $rel(i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. Puis on vérifie que les relations qui déterminent G sont satisfaites dans E de sorte que l'on a un morphisme Φ de G dans E ; $\Phi(G)$ est un sous-groupe de E centralisé par une involution du système générateur de E.

1.2.2 Le sous-groupe N

Sa construction est une partie essentielle de la démonstration. En remplaçant le générateur e' par un de ses conjugués a^o dans G, on obtient un nouveau système générateur de G et on montre, grâce à la relation $R = 1$, que $a'a^o$ est d'ordre 2. La fermeture normale de $a'a^o$ dans G est alors le sous-groupe N en question. Pour construire N, on détermine des conjugués de $a'a^o$ de manière à obtenir un système générateur Γ de N. Les calculs sont longs et fastidieux, ils ne sont pas reproduits ici ; certains sont rassemblés sous forme de tables : table des conjugués $\gamma^y, \gamma \in \Gamma, y \in \{a, b, \ldots, f, a', c'\}$, table des commutateurs des éléments de Γ .... On détermine l'ordre de N, ses éléments centraux et son groupe des commutateurs.

1.2.3 La preuve du théorème

Dans chacune des situations $i = 1, 2, 3$, on détermine les éléments centraux de G et donc l'ordre de $Z(G)$. On établit les résultats concernant le sous-groupe H (du théorème) puis on vérifie que $G/Z(G).N$ est isomorphe à $U_6(2)$; enfin on conclut que l'image de G dans E est bien le centralisateur d'une certaine involution de E.

1.2.4 Tables. Annexe

Pour faciliter la lecture, nous avons choisi de ne pas donner les détails des démonstrations. Nous donnons sous forme de tables des résultats concernant le groupe N (1.2.2). En annexe nous avons rassemblé des compléments utiles à la clarté du texte. En général ces résultats sont connus ou se démontrent sans difficultés ; ils concernent les groupes $3^5 \rtimes S_6$, $2.O_6^-(3)$, $W(E_7)$ et $U_6(2)$, groupes qui admettent des présentations via les graphes de Coxeter Q_{111}, Q_{211}, Y_{321} et Q_{222}.

2 Préliminaires

Dans cette section E et G désignent respectivement des groupes donnés avec leur présentation :

$$E = (a, b_i, c_i, d_i (1 \leqslant i \leqslant 3)/Y_{333}, S = 1)$$

$$G = (a, b, \ldots, f, a', c', e'/Q_{222}, V = 1, rel(3)).$$

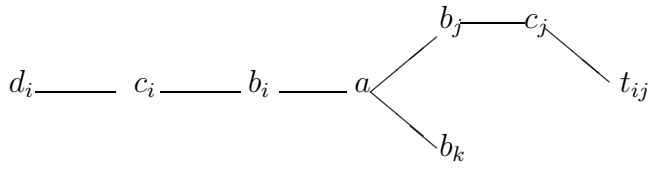
2.1 Résultats concernant le groupe E

2.1.1 Les éléments f_{ij}

Pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on note W_{ij} le sous-groupe de E

$$W_{ij} =< a, b_i, c_i, d_i, b_j, c_j, b_k >;$$

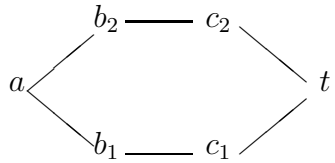
W_{ij} est centralisé par d_k et admet un élément supplémentaire t_{ij} tel que :

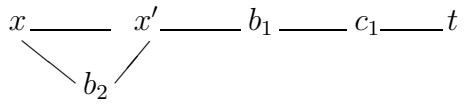


Rappelons que W_{ij} et W_{ik} engendrent un sous-groupe O_i de E isomorphe à $O_7(3) \times 2$ dont l'involution centrale est $f_{ij} = f_{ik}$ ($f_{ij} = (ab_ib_jb_kc_ic_jd_i)^9$) (notations de l'ATLAS) et que la relation $S = 1$ impose $t_{ij} = t_{ik}$ ([2], [3], [11], [16]).
On désigne par t l'élément $t_{31} = t_{32}$ et par f_i l'involution $f_{ij} = f_{ik}$; f_i est centrale dans E et l'on a $Z(E) =< f_{12}, f_{23}, f_{31} >$ ([11]). En outre on a $f_3 = d_3m$ avec $m = (ab_1b_2b_3c_2t)^5$ (voir Annexe 3).

2.1.2 La relation hexagonale

Soit H_0 le sous-groupe de E engendré par a, b_1, c_1, t, b_2, c_2 ; ces éléments satisfont aux relations ci-dessous :





où $x = a^{b_1c_1tc_2}$ et $x' = b_1^{c_1tc_2}$.
La relation $S = 1$ impose que le sous-groupe H_0 soit isomorphe à $H_{3,6}$ ou à $H_{3,6}/Z(H_{3,6})$ (voir l'Annexe 1). Or H_0 est contenu dans O_i ($O_i \simeq O_7(3) \times 2$) et son centre $Z(H_0)$ (qui est un 3-groupe) est central dans O_i, il s'ensuit que $Z(H_0) = 1$; on a alors $(atb_1c_2c_1b_2)^4 = 1$ (relation hexagonale) (Annexe 1, [8], [16], [18]).

2.2 Résultats concernant le groupe G

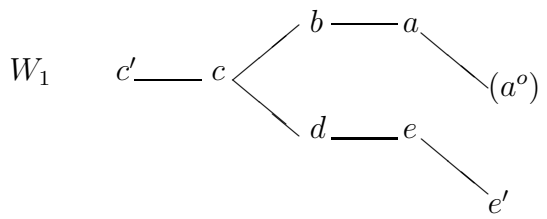
2.2.1 Notations

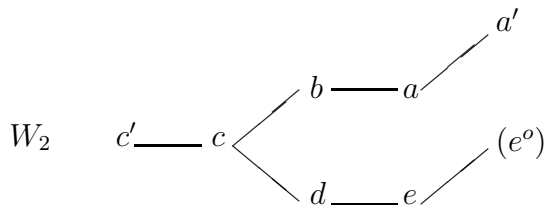
On pose $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$, $\mathcal{C} = c^{c'dbc}$ et $\mathcal{E} = e^{e'dfe}$; la relation $V = 1$ impose que $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ commutent deux à deux et que l'on a :

$$\mathcal{A}^{edfe} = \mathcal{A}^{cbdc}, \mathcal{C}^{abfa} = \mathcal{C}^{edfe}, \mathcal{E}^{cbdc} = \mathcal{E}^{abfa}.$$

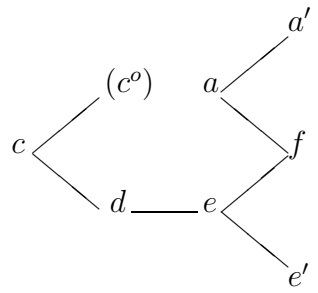
2.2.2 Les éléments z_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$)

Ils désignent les involutions centrales des groupes W_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) isomorphes à $W(E_7)$ définis respectivement à partir de :





W_3



On note a^o, e^o, c^o les involutions qui permettent d'obtenir les diagrammes complétés. On a $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$ et $e' = \mathcal{C}^{abedcc'a^oabcde}$. Les éléments centraux z_i s'écrivent comme produit de sept involutions commutant deux à deux ; (avec les notations 2.2.1) on a :

- $z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}a^oe' = (cc'bdaee')^9$
- $z_2 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa'ba}e^oa' = (cc'bdeaa')^9$
- $z_3 = e'df\mathcal{E}\mathcal{E}^{aa'fa}c^oa' = (ee'dfcaa')^9$.

(voir aussi annexe 3).

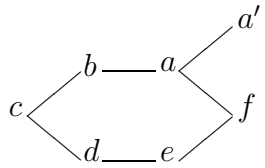
2.2.3 La relation $R = 1$

Les relations $R = 1$ et $(a'a^o)^2 = 1$ sont équivalentes. On a $R = 1$ si et seulement si l'un des z_i est dans $Z(G)$. Sous l'hypothèse $R = 1$, les éléments z_1, z_2 et z_3 sont centraux dans G.

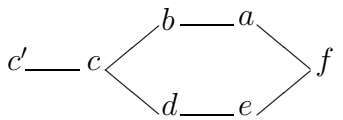
2.2.4 Les éléments m_a et m_e

On désigne par R_a, R_c et R_e les sous-groupes de G respectivement définis à partir de :

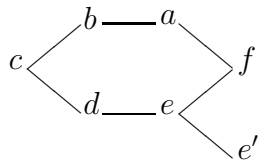
R_a



R_c



R_e



Pour chacun d'entre eux la relation hexagonale est satisfaite.

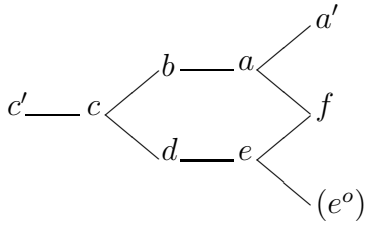
Ces groupes sont isomorphes à $2.O_6^-(3)$: 2, leur involution centrale est un produit de six involutions commutant deux à deux, on la note respectivement :

- $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'fbcd)^5$
- $m_c = c'bdf\mathcal{C}\mathcal{C}^{edfe} = (cc'bdef)^5$
- $m_e = e'dfb\mathcal{E}\mathcal{E}^{abfa} = (ee'dfab)^5$

(voir Annexe 3).

2.2.5 Le sous-groupe K_e

Soit K_e le sous-groupe de G engendré par a, b, c, d, e, f, a', c' ; K_e est isomorphe à $2^2.2.U_6(2)$ et l'on a $Z(K_e) =< m_a, m_c > . < m_c z_2 >$ (2.2.2, 2.2.3). Soit e^o l'unique élément de K_e tel que l'on ait :



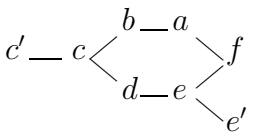
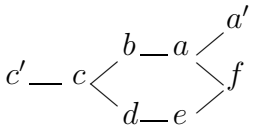
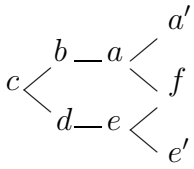
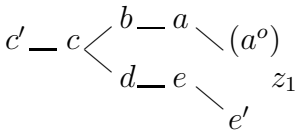
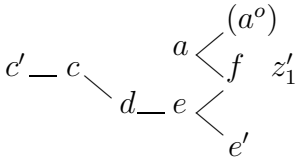
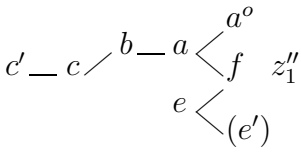
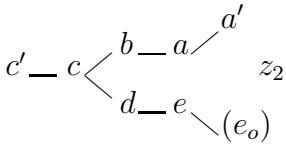
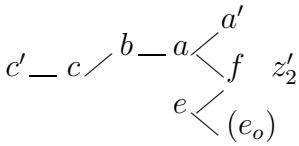
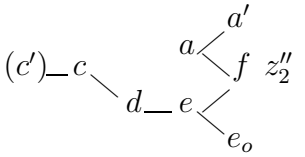
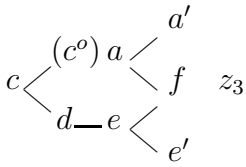
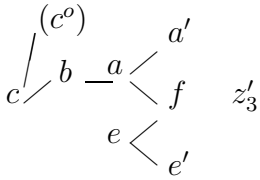
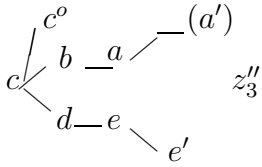
On a alors $m_a m_c = n_e$ où n_e est l'involution centrale du sous-groupe $< b, c, d, e, f, e^o >$(voir Annexe 4). On a des résultats similaires pour les sous-groupes $K_a =< a, b, c, d, e, f, c', e' >$ et $K_c =< a, b, c, d, e, f, a', e' >$ (voir le tableau 2.2.6).

2.2.6 Un grand tableau

(Avec les notations ci-dessus). Pour chacun des groupes K ($K = K_a, K_c, K_e$), le tableau ci-dessous indique un système générateur de K et de trois sous-groupes W isomorphes à $W(E_7)$, $W/Z(W)$ étant un représentant de chacune des trois classes de $W^*(E_7)$ de $K/Z(K)$ ([13], [14]). Pour chaque groupe, on précise les éléments centraux (tableau voir page suivante).

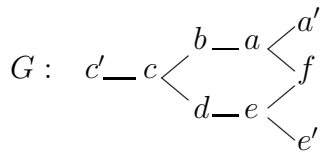
2.2.7 Les éléments m_a, m_c et m_e

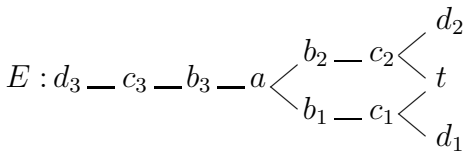
Les éléments m_a, m_c et m_e sont centraux dans G. En effet m_a et m_c (resp. m_c et m_e) appartiennent à $Z(K_e)$ (resp. $Z(K_a)$) et ils centralisent e' (resp. a'). (2.2.4, 2.2.5).

	K_a	K_e	K_c
Système générateur de K			
Système générateur de W, involution centrale	 z_1  z'_1  z''_1	 z_2  z'_2  z''_2	 z_3  z'_3  z''_3
	$z_1 = (cc'bdaee')^9$ $z'_1 = (ee'dfacc')^9$ $z''_1 = (aa^obfecc')^9$	$z_2 = (cc'bdeaa')^9$ $z'_2 = (aa'bfecc')^9$ $z''_2 = (ee^odfacc')^9$	$z_3 = (ee'dfcaa')^9$ $z'_3 = (aa'bfcee')^9$ $z''_3 = (cc^obdaee')^9$
$Z(K)$	$< m_c, m_e > . < m_c z_1 >$	$< m_c, m_a > . < m_c z_2 >$	$< m_e, m_a > . < m_e z_3 >$
	$m_c m_e = n_a$	$m_c m_a = n_e$	$m_a m_e = n_c$
	$m_c z_1 = m_e z'_1 = n_a z''_1$	$m_c z_2 = m_a z'_2 = n_e z''_2$	$m_e z_3 = m_a z'_3 = n_c z''_3$

2.3 Lien entre E et G

On note Φ la correspondance entre les générateurs de G et des éléments de $C_E(d_3)$ définie de la manière suivante :





$$\begin{array}{ccc} a \to c_2 & d \to b_1 & a' \to d_2 \\ b \to b_2 & e \to c_1 & c' \to b_3 \\ c \to a & f \to t & e' \to d_1 \end{array}$$

On note D le sous-groupe de E engendré par les éléments $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, ...

2.3.1 Hexagonale

La relation hexagonale est satisfaite par les images des générateurs de G. (2.1.2)

2.3.2 Éléments centraux de E

Les éléments $\Phi(z_1)$ et $\Phi(z_2)$ écrits comme produits des éléments $\Phi(c)\ldots$ sont les éléments centraux f_1 et f_2 de E. On vérifie que $\Phi(z_3)$ est central dans E. Ainsi la relation $\mathcal{R}$ est satisfaite dans E.

Les éléments $\Phi(m_a)$ et $\Phi(m_e)$ sont centraux dans E, ils n'appartiennent pas à l'ensemble $Z(E) - \{1\}$: on a donc $\Phi(m_a) = \Phi(m_e) = 1$.

Enfin on a $\Phi(m_c) = m$ (notation 2.1) ; c'est un élément de $Z(D)$ qui n'est pas dans $Z(E)$.

2.3.3 La relation $r = 1$

Les éléments $\mathcal{C}^{ee'de}$ et $\mathcal{A}$ correspondent par Φ à $x = a^{b_1 b_2 b_3 a.c_1 d_1 b_1 c_1}$ et $y = c_2^{d_2 b_2 t c_2}$; la relation $r = 1$, $(\mathcal{C}^{ee'de}.\mathcal{A})^4 = 1$, s'écrit donc dans E $(xy)^4 = 1$. Rappelons que E est un groupe de $\{3, 4\}$-transpositions ([2], [6]), l'ordre du produit de deux transpositions distinctes est donc $2, 3, 4$. Or on sait que $C_E(d_3)/O_2(C_E(d_3))$ est isomorphe à $U_6(2)$, groupe dans lequel l'image de xy n'est pas d'ordre 3 ; on a $(xy)^4 = 1$, la relation $r = 1$ est satisfaite dans E.

2.3.4 En conclusion

De ce qui précède, il résulte que Φ induit un morphisme de G dans E dont l'image D est un sous-groupe du centralisateur de d_3 dans E.

3 Le sous-groupe N

Dans cette section G désigne un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème avec les relations $rel(3)$. Les notations sont celles introduites en 2.2.1.

L'objet de cette section est l'étude de la fermeture normale N dans G de $\alpha_{a'} = a'a^o$, $\alpha_{a'}$ est un élément d'ordre 2 (voir 2.2.2). On détermine un système générateur de N de cardinal 22, on établit que le groupe des commutateurs de N est d'ordre 2 et que le centre de N est abélien élémentaire d'ordre 8 et que l'on a $\mathcal{D}(N) \subset Z(N) \subset Z(G)$. Enfin, on vérifie que N est d'ordre 2^{23}.

On pose $Y = \{a, b, \ldots, f, a', c'\}$; $Y \cup \{e'\}$ et $Y \cup \{a^o\}$ sont des systèmes générateurs de G.

3.1 Les éléments α_y et β_y, $y \in Y$

3.1.1

L'élément $\alpha_{a'}$ et certains de ses conjugués dans G appartiennent au sous-groupe $W_{12} =< W_1, W_2 >$ (notations 2.2.2) ; la fermeture normale de $\alpha_{a'}$ dans W_{12} est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre 2^7 contenant z_1z_2 (voir l'Annexe 3) et est engendré par les éléments $\alpha_{a'}$, $\alpha_a = \alpha_{a'}^{aa'}$, $\alpha_b = \alpha_a^{ba}$, $\alpha_c = \alpha_b^{cb}$, $\alpha_{c'} = \alpha_c^{c'c}$, $\alpha_d = \alpha_c^{dc}$, $\alpha_e = \alpha_d^{ed}$ et l'on a $\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'} = z_1z_2$ (voir aussi [18]).

On pose $\alpha_f = \alpha_e^{fe}$ et $y_1 = y\alpha_y$ pour y dans Y ; on vérifie que les produits yy' et y_1y_1' ont le même ordre pour y et y' dans $Y - \{f\}$. On calcule les ordres de yf_1 et fy_1 (y dans Y), voir la table T.1.

3.1.2

On observe que $f_1^{af} = a_1^{bcv^2cb}$ avec $v = adbecf$; puisque $v^4 = V = 1$, on a $a_1 = a_1^{bcv^2cb.bcv^2cb} = f_1^{afbacbdcedfeaf}$. On pose $\beta_a = \alpha_f^{af}$, on définit successivement $\beta_{a'} = \beta_a^{a'a}$, $\beta_b = \beta_a^{ba}$, $\beta_c = \beta_b^{cb}$, $\beta_{c'} = \beta_c^{c'c}$, $\beta_d = \beta_c^{dc}$, $\beta_e = \beta_d^{ed}$, $\beta_f = \beta_e^{fe}$. On a alors $\beta_f^{af} = \alpha_a$ d'où $\beta_f^a = \beta_f\alpha_a = \alpha_a\beta_f = \alpha_a^f$ et $\alpha_f^a = \alpha_f\beta_a = \beta_a\alpha_f = \beta_a^f$. Pour y dans Y, on pose $y_2 = y\beta_y$.

3.1.3

On a ainsi déterminé 16 éléments de N ; la table T.1 donne l'ordre des produits suivants : yy_1', yy_2', y_2y_1', y_2y_2' et y_1y_1' pour y et y' dans Y (où yy_1 et yy_2 désignent

les involutions α_y et β_y).

3.2 Les éléments x_a, $x_{a'}$, x_b, x_f

3.2.1

Soit B le sous-groupe de G engendré par a, a', b, f et a^o. Posons $L_a = a^{a'bfa^o}a$, $L_{a'} = L_a^{a'a}$, $L_b = L_a^{ba}$, $L_f = L_a^{fa}$ et $L_{a^o} = L_a^{a^oa}$. Ces éléments sont d'ordre 4 (relation $r = 1$) ; on désigne par x_a, $x_{a'}$, x_b, x_f et x_{a^o} leur carré respectif. Il est facile de voir que ces éléments commutent entre eux et que l'on a $x_a x_{a'} x_b x_f x_{a^o} = 1$ ([8], [18], [19]).

On observe que $x_f = (b_1 f)^2 = \alpha_b^f \alpha_b = \alpha_b \alpha_b^f$ et $x_b = (f_2 b)^2 = \beta_f^b \beta_f = \beta_f \beta_f^b$; ainsi les éléments x_a, $x_{a'}$, x_b, x_f sont dans N et l'on a $\alpha_b^f = \alpha_b x_f$ et $\beta_f^b = \beta_f x_b$.

3.2.2

Des égalités $\alpha_a = \alpha_b^{ab} = \beta_f^{af}$, $\beta_c = \beta_b^{cb} = \beta_d^{cd}$ et $\alpha_e = \alpha_d^{ed} = \alpha_f^{ef}$ il vient : $\beta_f^b = \alpha_b \beta_f \alpha_b^f$, $\beta_d^b = \beta_b \beta_d \beta_b^d$, $\alpha_f^d = \alpha_d \alpha_f \alpha_d^f$; de la première égalité on tire : $\beta_f \beta_f^b = \beta_f(\alpha_b \beta_f)\alpha_b \alpha_b \alpha_b^f$ d'où $x_b = [\beta_f, \alpha_b] x_f$. Ainsi $x_f x_b$ est un élément de $\mathcal{D}(N)$.

3.2.3

De l'égalité $\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'} = z_1 z_2$ (3.1.1) il résulte que $\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'}$ commute à f, on a donc $\alpha_{c'}^f = \alpha_{c'} x_f$ (car x_f commute avec $\alpha_{a'}$ et α_b). On en déduit en outre que β_f commute à α_b et que $[\alpha_a, \beta_b]$ est un élément de $Z(G)$. On a donc $x_b = x_f$. Désormais on pose $k := [\alpha_a, \beta_b]$, k est un élément de $Z(G)$.

3.2.4

Les éléments m_a et m_c sont dans le centre de G (2.2.7), ils commutent avec α_b. On en tire les égalités suivantes : $\alpha_d^f = \alpha_d x_f$, $\beta_{a'}^d = \beta_{a'} x_{a'}$, $\beta_a^d = \beta_a x_a$, $\beta_b^d = \beta_b x_f$ ainsi que l'égalité $x_{a'} = x_f$.

3.3 Quelques éléments de $\mathcal{D}(N)$; les conjugués de $x_a, x_f, \alpha_y, \beta_y$ ($y \in Y$) par les éléments de Y

3.3.1 Les commutateurs de α_y et β_y avec $x_a, x_f, \alpha_{y'}, \beta_{y'}$ ($y, y' \in Y$)

On établit d'abord que x_a et x_f commutent avec α_y et β_y ($y \in Y$), puis que pour $\{y, y'\} \neq \{a, f\}$ et $y, y' \in Y$ on a $[\alpha_y, \alpha_{y'}] = [\beta_y, \beta_{y'}] = 1$ et que $[\alpha_a, \alpha_f] = [\beta_a, \beta_f] = k$ (k introduit en 3.2.3). Enfin, pour y, y' dans Y, on a $[\alpha_y, \beta_{y'}] = k$ si yy' est d'ordre 3 et $[\alpha_y, \beta_{y'}] = 1$ si yy' est d'ordre 2.

Ces résultats s'obtiennent grâce aux relations Q_{222} et à la table des produits T.1 (3.1.3).

3.3.2

La table T.2 donne les expressions des conjugués de α_y, β_y, x_a, x_f $(y \in Y)$ par les éléments de Y, expressions écrites comme produit de ces mêmes éléments α_y, β_y, x_a, x_f. Presque tous ces conjugués peuvent être écrits de cette manière. Il reste α_c^f, β_e^b et des éléments notés t_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

Comme $\alpha_b^f = x_f \alpha_b$ (3.2.1), en conjuguant par c puis par e on obtient d'abord $\alpha_b^f \alpha_c^f = x_f^c \alpha_b \alpha_c$, d'où $x_f^c = \alpha_c^f x_f x_c$ ce qui donne t_1, puis $(\alpha_b^f)^e = x_f^e \alpha_b$; or $\beta_f^b = \beta_f x_f = \beta_f \alpha_b \alpha_b^f$ (3.2.1, 3.3.1), il vient $\beta_f^{be} = \beta_f^b.\beta_e^b = \beta_f \beta_e \alpha_b \alpha_b^{fe}$ d'où $x_f^e = \beta_e^b x_f \beta_e$ ce qui donne t_2.

Des égalités $x_a^e = x_b^{ab.e} = x_f^{e.ab}$ et $x_a^c = x_f^{af.c} = x_f^{c.af}$ on déduit, en utilisant t_2 et t_1 les expressions de $t_4 = x_a^e = \beta_e^b \beta_e^{ba} x_a$ et $t_3 = x_a^c = \alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_f$.

3.4 L'ensemble $\Gamma = \{\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f, \alpha_c^f, \alpha_c^{fa}, \alpha_c^{fe}, \alpha_c^{fae}, \beta_e^b, \beta_e^{ba}$ $(y \in Y)\}$ engendre N ; on a $\mathcal{D}(N) =< k >$

On construit deux tables : celle, notée T.3, des conjugués $\gamma^y (\gamma \in \Gamma, y \in Y)$ écrits en fonction des éléments de Γ, et celle, notée T.4, des commutateurs des éléments de Γ. Les éléments non connus de la table T.3 sont notés $t_5, t_6, \ldots, t_{20}$, leurs expressions sont données dans la liste T.5.

3.4.1

La table T.4 s'obtient dans presque tous les cas par des arguments simples (relations $Q_{2,2,2}$, tables T.1 et T.2, résultats connus de la table T.3). dans les autres cas, on montre que chaque commutateur est central dans N et dans G, qu'il est de carré 1 ; puis on vérifie qu'il est égal soit à 1 soit à k. En particulier on a $k^2 = 1$ et la relation $r = 1$, $(\mathcal{C}^{ee'de}\mathcal{A})^4 = 1$, impose $k \neq 1$.

3.4.2

En conjuguant x_f^c par e et x_f^e par c on obtient $x_f^{ce} = (\alpha_c^f x_f \alpha_c)^e = (\beta_e^b x_f \beta e)^c$ (3.3.2) d'où l'on déduit les expressions de β_e^{bc} (t_{17}) et β_e^{bca} (t_{20}).

En outre, on a $x_a^{ca'a} = x_f^c$ puisque $x_{a'} = x_f$ (3.2.4) ; on en tire les valeurs de $\alpha_c^{faa'}$ (t_5) et de $\alpha_c^{faa'e}$ (t_{12}). En écrivant $x_a^{ea'} = x_a^e x_f^e$, il vient l'expression de $\beta_e^{baa'}$ (t_{19}).

3.4.3

En utilisant les valeurs connues de la table T.2 on obtient par conjugaison les expressions de $\alpha_c^{fac'}$ (t_7), α_c^{fad} (t_8), α_c^{feb} (t_9), $\alpha_c^{fec'}$ (t_{10}), $\alpha_c^{faec'}$ (t_{14}), β_e^{bd} (t_{18}), β_e^{bad} (t_{21}).

3.4.4

Les éléments m_c et m_a sont dans $Z(G)$ (2.2.7). De $[m_c, \alpha_e] = 1$ on déduit les écritures de α_c^{fab} (t_6) puis de α_c^{fabe} (t_{13}) et de $[m_c, \alpha_a] = 1$ on déduit celles de α_c^{fed} (t_{11}) et de α_c^{faed} (t_{15}) .

La connaissance de t_6, t_{15} et t_{20} permet d'écrire le conjugué de β_e^{ba} par $\mathcal{C} = c^{c'bdc}$:

$$\beta_e^{ba\mathcal{C}} = kx_a x_f \alpha_{c'} \beta_b \beta_f \beta_e^{ba}.$$

L'égalité $[m_c, \beta_a] = 1$ conduit à une relation (S1) entre les éléments de Γ :

$$\text{(S1)} : \qquad \alpha_b \alpha_d \alpha_f \beta_b \beta_d \beta_f = 1$$

Les expressions de t_6, t_{12} et t_{13} conduisent à une expression du conjugué de α_c^{fe} par $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$:

$$\alpha_c^{fe.\mathcal{A}} = k\alpha_{a'} \alpha_d \beta_{a'} \beta_d \beta_f \beta_e^{ba} x_a \alpha_c^{fe} \beta_e^{baf}.$$

La relation (S1), les égalités $[m_a, \beta_e] = [m_a, \alpha_c] = 1$ conduisent à l'expression de β_e^{baf} (t_{22}). Par conjugaison de t_{22} par c et de t_{20} par f on obtient $\beta_e^{baf.c} = \beta_e^{bac.f}$ d'où :

$$(\beta_{c'} \beta_f \beta_e x_a x_f)^c \beta_e^{bac} \beta_e^{bc} = \alpha_c^{faef} \beta_e^{baf} \alpha_c^{faf}.$$

Grâce aux expressions t_{20}, t_{17} et t_{22} on en déduit

$$\alpha_c^{faef} = k\beta_c \alpha_c \alpha_c^{fae} \alpha_c^{fe} \alpha_c^{f} \alpha_c^{fa} \quad (t_{16})$$

Enfin la relation (S1) et l'égalité $[m_a, \alpha_e] = 1$ conduisent à une seconde relation entre les éléments de Γ :

$$\text{(S2)} : \qquad \alpha_{a'} \beta_{c'} \beta_d \beta_f = 1.$$

Les tables T.3 et T.4 sont achevées.

3.4.5

Le sous-groupe N est engendré par Γ (tables T.2, T.3) et son groupe des commutateurs $\mathcal{D}(N)$ est engendré par l'élément k d'ordre 2 (table T.4). Les relations (S1) et (S2) prouvent qu'il y a dans Γ deux générateurs superflus, par exemple $\beta_b = \alpha_b \alpha_d \alpha_f \beta_d \beta_f$ (S1) et $\beta_{c'} = \alpha_{a'} \beta_d \beta_f$ (S2). Ainsi N est engendré par 22 involutions, l'ordre de $N/\mathcal{D}(N)$ divise 2^{22} et celui de N divise 2^{23}.

3.4.6

On pose $\Gamma_0 = \Gamma - \{\beta_b, \beta_{c'}\}$. Toute relation entre les éléments de Γ_0 s'écrit $1 = k^{p_o} \prod_{\gamma \in \Gamma_o} \gamma^{p_\gamma}$ où p_0 et p_γ sont dans $\{0,1\}$, chaque élément de Γ_0 intervenant au plus une fois. On obtient alors : $(\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'})^p = 1$ et $(\alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'})^q = 1$ avec p et q dans $\{0,1\}$.

3.4.7

Les éléments $m_c z_1 = m_e z'_1$, $m_c z_2 = m_a z'_2$ et $m_e z_3 = m_a z'_3$ sont respectivement des éléments centraux des sous-groupes K_a, K_e et K_c (voir 2.2.6). Des calculs conduisent aux égalités :

$$z_1 z_2 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'}, \quad z'_1 z_3 = \alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}, \quad z'_2 z'_3 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}.$$

On observe que les éléments $z_1 z_2$ et $z'_1 z_3 = m_e m_c z_1 . z_3$ sont dans $N \bigcap Z(G)$; on pose $z_1 z_2 = z$ et $z'_1 z_3 = \hat{z}$, on a $z'_2 z'_3 = z\hat{z}$.

3.5 Le centre de N, l'ordre de N

3.5.1

Les éléments m_a, m_c et m_e sont centraux dans G et l'on a $m_a m_c = n_e$, $m_c m_e = n_a$, $m_e m_a = n_c$ (2.2.6). Rappelons que $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc}$ et $n_a = a'bfd\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^{cbdc}$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ désignent respectivement $a^{a'bfa}$ et $a^{a^o bfa}$ (voir 2.2.5 et 2.2.6). On établit alors l'égalité $m_a n_a = k$ et par suite $m_c n_c = k = m_e n_e$.

3.5.2

Il résulte de 3.4.6 et 3.4.7 que les éléments k, z et $\hat{z}$ engendrent le centre de N et que $Z(N)$ est contenu dans $Z(G)$. Ainsi on a $|Z(N)| = 2^3$ et $|N| = 2^{23}$.

4 La preuve du théorème

Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on considère un groupe G_i avec la présentation

$$(a, b, \ldots, f, a', c', e'/Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

(notations 1.1) ; on note N_i la fermeture normale de $a'a^o$ dans G_i (pour a^o voir 2.2.2) et H_i le sous-groupe de G_i engendré par $a, b, \ldots, f, a', c'$. Pour chaque jeu de relations $rel(i)$, on précise la structure de N_i (4.1), celle de H_i (4.2) puis on établit que $G_i/Z(G_i)N_i$ est isomorphe à $U_6(2)$ (4.3). Enfin on fait le lien avec le centralisateur d'une involution de la classe $2A$ de ${}^2E_6(2)$.

4.1 Le sous-groupe N_i de G_i

On a établi que k (3.2.3) est une involution centrale de G_i qui engendre $\mathcal{D}(N_i)$ et appartient à $Z(N_i)$ (3.2.3, 3.4.1). D'après 3.4.7 et 3.5, le centre de N_i est engendré par k, $z = z_1 z_2$ et $\hat{z} = z_1' z_3$ (avec $z_1' = m_e m_c z_1$).

Sous $rel(1)$, on a $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ et $m_a = m_e = 1$; comme $m_a m_e = n_c = k m_c$ (3.5.1), il vient $k = m_c = \hat{z}$ et $z = 1$. Ainsi on a $\mathcal{D}(N_1) = Z(N_1) =< k >$, N_1 est un 2-groupe extraspécial. De plus l'ensemble générateur Γ_0 (3.4.6) comporte deux éléments superflus : $\alpha_{a'} = \alpha_b \alpha_{c'}$ $(z = 1)$ et $\beta_{a'} = \alpha_{c'} \alpha_d \alpha_f k$ $(\hat{z} k = 1)$. Le sous-groupe N_1 est engendré par 20 éléments, N_1 est d'ordre 2^{20+1}, c'est le produit de 10 groupes diedraux d'ordre 8 de même centre $< k >$:
$< \alpha_a, \alpha_f > . < \alpha_b, \beta_a > . < \alpha_{c'}, \beta_c > . < \alpha_c, \beta_d > . < \alpha_d, \beta_e > . < \alpha_e, \beta_f > .$
$< \alpha_c^{fa}, \beta_e^d > . < \alpha_c^f, \beta_e^{ba} > . < x_f, \alpha_c^{fae} \alpha_c^f > . < x_a, \alpha_c^{fe} \alpha_c^f >.$

Sous $rel(2)$ et $rel(3)$, N_i d'ordre 2^{23} (3.5.2).

4.2 Le sous-groupe H_i de G_i

C'est un sous-groupe isomorphe à un quotient de $2^2.2.U_6(2)$ (voir Annexe 4) dont le centre est $< m_a, m_c > . < m_c z_2 >$ (Annexe 4 et 2.2.5) ; de plus $m_a m_c = k m_e$ (2.2.6 et 3.5.1).

Sous $rel(1)$, on a $z_2 = m_a = m_e = 1$ en conséquence $m_c = k$ est l'unique involution centrale de H_1 : H_1 est isomorphe à $2.U_6(2)$.

Sous $rel(2)$, $m_c = k$ et z_2 sont des involutions centrales de H_2 ; $Z(H_2)$ est d'ordre 4 et H_2 est isomorphe à $2.2.U_6(2)$.

Sous $rel(3)$, H_3 est isomorphe à $2^2.2.U_6(2)$.

4.3 Le groupe G_i

Soit T_i le sous-groupe de $Z(G_i)$ engendré par z_1, z_2, z_3, m_a, m_c, m_e, et soit π_i l'application canonique $G_i \to G_i/T_i N_i$. Remarquons que $m_a m_e = k m_c$, $z = z_1 z_2$ et $\hat{z} = z_1' z_3 = m_e m_c z_1 z_3$ sont dans T_i, donc $Z(N_i)$ est un sous-groupe de T_i dont l'indice est 1, 2 ou 2^3 suivant que $i = 1$, $i = 2$ ou $i = 3$.

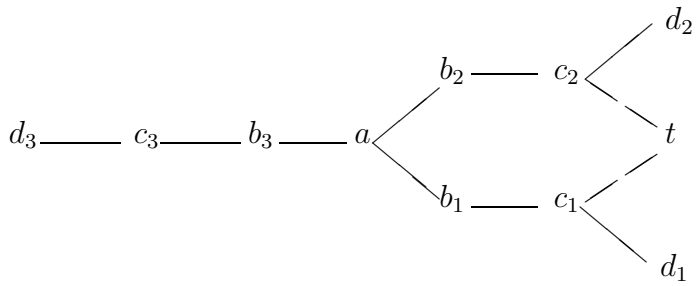
L'image de H_i par π_i est un sous-groupe U_i isomorphe à $U_6(2)$ $(Z(H_i) \subset T_i)$ et l'image du système générateur de G_i coïncide avec celle de H_i (on a $\pi_i(a') = \pi_i(a^o)$). Par conséquent $\pi_i(G_i)$ est un quotient de $2^2.2.U_6(2)$. Mais comme $\pi_i(G_i) = \pi_i(H_i) = U_i$, dans toutes les situations $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, $\pi_i(G_i)$ est isomorphe à $U_6(2)$ et l'on a $Z(G_i) = T_i$. On en déduit les isomorphismes suivants :

$$G_1 \simeq 2^{20+1}.U_6(2), \quad G_2 \simeq 2^{24}.U_6(2), \quad G_3 \simeq 2^2.2^{24}.U_6(2).$$

4.4 Fin de la preuve

Rappelons que le groupe $E = 2^3.{}^2E_6(2)$ admet la présentation

$$(a, b_i, c_i, d_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3)/Q_{222}, V = 1) :$$



$$V = 1 \qquad \text{avec } V = (atb_1c_2c_1b_2)^4.$$

Sous $rel(2)$ (resp. $rel(3)$) on a un morphisme Φ_i de G_i dans le centralisateur de d_3 dans E qui envoie z_1, z_2, z_3 dans $Z(E)$ (voir 2.3) ; l'image de G_2 (resp. G_3) est un sous-groupe du centralisateur de d_3 dans E et l'on a $|C_E(d_3)| = |G_2|$. Ainsi

$$(a, b, \ldots, f, a', c', e'/Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

est une présentation de $C_E(d_3)$ pour $i = 2$ et d'une extension $2^2.C_E(d_3)$ pour $i = 3$.

Sous $rel(1)$, on a un morphisme de G_1 dans $\bar{E} = E/Z(E)$ qui envoie G_1 dans le centralisateur C de l'image de d_3 dans $\bar{E}$; comme G_1 et $\mathcal{C}$ ont le même ordre,

$$(a, b, \ldots, f, a', c', e'/Q_{222}, V = 1, rel(1))$$

est une présentation du centralisateur d'une involution d dans ${}^2E_6(2)$ (d provenant de la classe $2A$).

5 Tables.

Table des ordres des produits yy'_i, $y_2y'_i$, $y_iy'_i$ pour $i = 1, 2$ et $y, y' \in Y$.

	a'_1	a_1	b_1	c_1	c'_1	d_1	e_1	f_1	a'_2	a_2	b_2	c_2	c'_2	d_2	e_2	f_2
a'	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2
a	3	2	3	2	2	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	3
b	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	4	4	4
c	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2	3	2	3	3	2	2
c'	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
d	2	2	2	3	2	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2
e	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3
f	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2	2	2	2	3	2
a'_2	2	3	2	2	2	4	2	2	2	3	2	2	2	4	2	2
a_2	3	2	3	2	2	4	2	3		2	3	2	2	4	2	3
b_2	2	3	2	3	2	4	2	2			2	3	2	2	4	4
c_2	2	2	3	2	3	3	2	2				2	3	3	2	2
c'_2	2	2	2	3	2	2	2	2					2	2	2	2
d_2	2	2	4	3	2	2	3	4						2	3	2
e_2	2	2	4	2	2	3	2	3							2	3
f_2	2	3	2	4	4	4	3	2								2
a'_1	2	3	2	2	2	2	2	2								
a_1		2	3	2	2	2	2	3								
b_1			2	3	2	2	2	4								
c_1				2	3	3	2	4								
c'_1					2	2	2	4								
d_1						2	3	2								
e_1							2	3								
f_1								2								

Table T.1

Tables des conjugués $\gamma_y^{y'}$ pour $\gamma_y \in \{\alpha_y, \beta_y\}$, y et $y' \in Y$

Table T.2 (3.3.2)

	a'	a	b	c	c'	d	e	f
$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}\alpha_a$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$
α_a	$\alpha_a\alpha_{a'}$	α_a	$\alpha_a\alpha_b$	α_a	α_a	α_a	α_a	$\alpha_a\beta_f$
α_b	α_b	$\alpha_b\alpha_a$	α_b	$\alpha_b\alpha_c$	α_b	α_b	α_b	$\alpha_b x_f$
α_c	α_c	α_c	$\alpha_c\alpha_b$	α_c	$\alpha_c\alpha_{c'}$	$\alpha_c\alpha_d$	α_c	α_c^f
$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}\alpha_c$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}x_f$
α_d	α_d	α_d	α_d	$\alpha_d\alpha_c$	α_d	α_d	$\alpha_d\alpha_e$	$\alpha_d x_f$
α_e	α_e	α_e	α_e	α_e	α_e	$\alpha_e\alpha_d$	α_e	$\alpha_e\alpha_f$
α_f	α_f	$\alpha_f\beta_a$	α_f	α_f	α_f	$\alpha_f x_f$	$\alpha_f\alpha_e$	α_f
$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}\beta_a$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}x_f$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$
β_a	$\beta_a\beta_{a'}$	β_a	$\beta_a\beta_b$	β_a	β_a	$\beta_a x_a$	β_a	$\beta_a\alpha_f$
β_b	β_b	$\beta_b\beta_a$	β_b	$\beta_b\beta_c$	β_b	$\beta_b x_f$	β_b	β_b
β_c	β_c	β_c	$\beta_c\beta_b$	β_c	$\beta_c\beta_{c'}$	$\beta_c\beta_d$	β_c	β_c
$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}\beta_c$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$
β_d	β_d	β_d	$\beta_d x_f$	$\beta_d\beta_c$	β_d	β_d	$\beta_d\beta_e$	β_d
β_e	β_e	β_e	β_e^b	β_e	β_e	$\beta_e\beta_d$	β_e	$\beta_e\beta_f$
β_f	β_f	$\beta_f\alpha_a$	$\beta_f x_f$	β_f	β_f	β_f	$\beta_f\beta_e$	β_f
x_f	x_f	$x_f x_a$	x_f	t_1	x_f	x_f	t_2	x_f
x_a	$x_a x_f$	x_a	$x_a x_f$	t_3	x_a	x_a	t_4	$x_a x_f$
α_c^f	α_c^f	α_c^{fa}	$\alpha_c^f\alpha_b x_f$	α_c^f	$\alpha_c^f\alpha_{c'}x_f$	$\alpha_c^f\alpha_d x_f$	α_c^{fe}	α_c
α_c^{fa}	t_5	α_c^f	t_6	α_c^{fa}	t_7	t_8	α_c^{fae}	α_c^{fa}
α_c^{fe}	α_c^{fe}	α_c^{fae}	t_9	α_c^{fe}	t_{10}	t_{11}	α_c^f	α_c^{fe}
α_c^{fae}	t_{12}	α_c^{fe}	t_{13}	α_c^{fae}	t_{14}	t_{15}	α_c^{fa}	t_{16}
β_e^b	β_e^b	β_e^{ba}	β_e	t_{17}	β_e^b	t_{18}	β_e^b	$\beta_e^b\beta_f x_f$
β_e^{ba}	t_{19}	β_e^b	β_e^{ba}	t_{20}	β_e^{ba}	t_{21}	β_e^{ba}	t_{22}

Table T.3 (3.4)

Table des commutateurs des éléments de Γ (3.4)
Table T.4

	$\beta_{a'}$	β_a	β_b	β_c	$\beta_{c'}$	β_d	β_e	β_f	α_f	α_c^f	α_c^{fa}	α_c^{fe}	α_c^{fae}	β_e^b	β_e^{ba}
$\alpha_{a'}$		k													
α_a	k		k						k						
α_b		k		k											
α_c			k		k	k									
$\alpha_{c'}$				k											
α_d				k			k							k	k
α_e						k		k							
α_f							k							k	k
$\beta_{a'}$															
β_a								k							
β_b										k	k	k	k		
β_c															
$\beta_{c'}$										k	k	k	k		
β_d										k	k	k	k		
β_e									k						
β_f		k													
x_a												k	k		
x_f													k		
α_c^f			k		k	k									k
α_c^{fa}			k		k	k								k	
α_c^{fe}			k		k	k									k
α_c^{fae}			k		k	k								k	
β_e^b											k		k		
β_e^{ba}										k		k			

Les valeurs non indiquées valent 1.

Valeurs des éléments t_i $(1 \leqslant i \leqslant 22)$
Table T.5

t_1	x_f^c	$\alpha_c\alpha_c^f x_f$	3.3.2
t_2	x_f^e	$\beta_e\beta_e^b x_f$	3.3.2
t_3	x_a^c	$\alpha_c^f\alpha_c^{fa} x_a$	3.3.2
t_4	x_a^e	$\beta_e^b\beta_e^{ba} x_a$	3.3.2
t_5	$\alpha_c^{faa'}$	$\alpha_c\alpha_c^f\alpha_c^{fa}$	3.4.2
t_6	α_c^{fab}	$k\alpha_c\alpha_d\beta_{c'}\beta_d\beta_f\alpha_c^f\alpha_c^{fa}x_a x_f$	3.4.4
t_7	$\alpha_c^{fac'}$	$\alpha_{c'}\alpha_c^{fa}x_a x_f$	3.4.3
t_8	α_c^{fad}	$\alpha_d\alpha_c^{fa}x_a x_f$	3.4.3
t_9	α_c^{feb}	$\alpha_b\beta_e\alpha_c^{fe}\beta_e^b x_f$	3.4.3
t_{10}	$\alpha_c^{fec'}$	$\alpha_{c'}\beta_e\alpha_c^{fe}\beta_e^b x_f$	3.4.3
t_{11}	α_c^{fed}	$\alpha_b\alpha_c\alpha_f\beta_b\beta_{c'}\beta_e\alpha_c^f\alpha_c^{fe}\beta_e^b x_f$	3.4.4
t_{12}	$\alpha_c^{faea'}$	$\alpha_c\alpha_c^{fe}\alpha_c^{fae}$	3.4.2
t_{13}	α_c^{faeb}	$k\alpha_c\alpha_d\alpha_e\beta_{c'}\beta_d\beta_e\beta_f\alpha_c^{fe}\alpha_c^{fae}\beta_e^{ba}x_a x_f$	3.4.4
t_{14}	$\alpha_c^{faec'}$	$\alpha_{c'}\beta_e\alpha_c^{fae}\beta_e^{ba}x_a x_f$	3.4.3
t_{15}	α_c^{faed}	$\alpha_a\alpha_b\alpha_c\alpha_f\beta_b\beta_{c'}\beta_e\alpha_c^{fa}\alpha_c^{fae}\beta_e^{ba}x_a x_f$	3.4.4
t_{16}	α_c^{faef}	$k\alpha_c\beta_c\alpha_c^f\alpha_c^{fa}\alpha_c^{fe}\alpha_c^{fae}$	3.4.4
t_{17}	β_e^{bc}	$\alpha_c^f\alpha_c^{fe}\beta_e^b$	3.4.2
t_{18}	β_e^{bd}	$\beta_d\beta_e^b x_f$	3.4.3
t_{19}	$\beta_e^{baa'}$	$\beta_e\beta_e^b\beta_e^{ba}$	3.4.2
t_{20}	β_e^{bac}	$\alpha_c^{fa}\alpha_c^{fae}\beta_e^{ba}$	3.4.2
t_{21}	β_e^{bad}	$\beta_d\beta_e^{ba}x_a x_f$	3.4.3
t_{22}	β_e^{baf}	$\beta_{c'}\beta_e\beta_f\beta_e^b\beta_e^{ba}x_a x_f$	3.4.4

6 Annexe

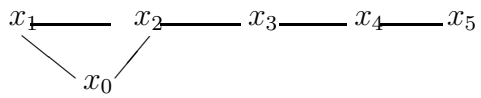
Tous les graphes ci-dessous sont des graphes de Coxeter.

6.1 Le graphe Q_{111}

On désigne par G le groupe $H_{3,6} \simeq 3^5 \rtimes S_6$.

6.1.1

Le groupe G admet la présentation $(x_i(0 \leqslant i \leqslant 5)/h)$ avec h :



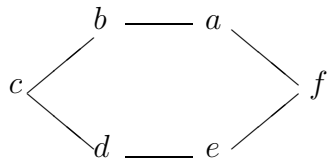
$(x_1^{x_2}x_0)^3 = 1$

L'élément $z = (x_1x_0)(x_1x_0)^{x_2}(x_1x_0)^{x_2x_3}(x_1x_0)^{x_2x_3x_4}(x_1x_0)^{x_2x_3x_4x_5}$ qui s'écrit aussi $(x_2x_1x_3x_4x_5x_0)^5$ est d'ordre 3 et engendre le centre de G.

6.1.2

Posons $a = x_1^{x_2}$, $b = x_3$, $c = x_4$, $d = x_5$, $e = x_2^{x_3x_4x_5}$, $f = x_0$; alors a, b, c, d, e, f engendrent G et satisfont à :

Q_{111}



$(f.a^{bcde})^3 = 1$

on a la relation $(adbecf)^4 = z.(f^{ed}.a^{bc})^3$.

6.1.3

Le groupe $G/Z(G)$, noté aussi $H^*_{3,6}$ admet la présentation

$$(a, b, \ldots, f/Q_{111}, V = 1)$$

où $V = 1$ est la relation hexagonale avec $V = (adbecf)^4$.
([8], [13], [15], [18]).

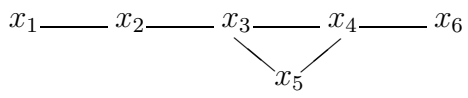
6.2 Le graphe Q_{211}

On désigne par G le groupe $G^+(6,3)$ (noté $2.O_6^-(3):2$ dans l'ATLAS) et par $\tilde{G}$ l'extension centrale non scindée

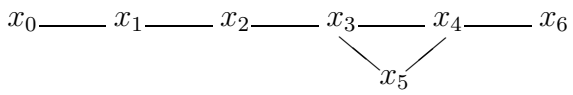
$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \rightarrow 1.$$

6.2.1

Le groupe $\tilde{G}$ admet la présentation $(x_i(1 \leqslant i \leqslant 6)/g_6, (x_3^{x_4}x_5)^3 = 1)$ avec g_6 :



Il existe un unique élément x_0 tel que :



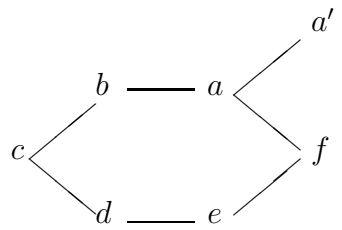
On a : $x_0 = x_1^{xx'x_2x_1}$, $x = x_3^{x_4x_2x_5x_6x_3x_4x_3}$, $x' = x_3^{xx_2x_5x_3}$. Le centre de $\tilde{G}$ est d'ordre 6, $Z(\tilde{G}) =< m, z >$. L'élément z, d'ordre 3, engendre le centre du sous-groupe $< x_i(0 \leqslant i \leqslant 5) >$ isomorphe à $H_{3,6}$ (voir l'Annexe 1). L'élément m (produit de six involutions commutant deux à deux) est d'ordre 2 et engendre le centre du sous-groupe $< x_3^{x_4}, x_i(0 \leqslant i \leqslant 6, i \neq 3,4) >$ isomorphe à $W(D_6)$. On a

$$m = x_2x_5x_6xx'x_0 = (x_3^{x_4}x_6x_5x_2x_1x_0)^5.$$

6.2.2

Posons $a = x_3^{x_4}$, $b = x_2$, $c = x_1$, $d = x_0$, $e = x_3^{x_2x_1x_0}$, $f = x_5$, $a' = x_6$. Alors les éléments $a, b, \ldots, f, a'$ engendrent $\tilde{G}$ et satisfont à

Q_{211}



6.2.3

Le groupe G ($G \simeq G^+(6,3)$) admet la présentation :

$$G = (a, b, \ldots, f, a'/Q_{211}, V = 1)$$

où $V = 1$ est la relation hexagonale ($V = (adbecf)^4$) ; le centre de G est engendré par l'involution m, m est l'involution centrale de tout sous-groupe isomorphe à $W(D_6)$ engendré par des conjugués de a dans G. Posons $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$; on a les égalités suivantes :

$$m = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'bfcd)^5 = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{edfe} = (aa'bfed)^5$$

([2], [8], [13], [15], [18]).

6.3 Le graphe Y_{321}

On désigne par G le groupe de Coxeter $W(E_7)$ ($\simeq 2 \times Sp_6(2) \simeq 2 \times O_7(2)$)

6.3.1

Le groupe G admet la présentation $(a, b, \ldots, e, c', e'/Y_{321})$ avec :

$$Y_{321} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & b & \text{——} & a & \text{——} \ (a^o) \\ c' & \text{——} & c & & & & \\ & & & d & \text{——} & e & \text{——} \ e' \end{array} \qquad ;$$

il existe dans G un unique élément a^o qui complète le diagramme ; a^o s'écrit : $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$ avec $\mathcal{C} = c^{c'bdc}$.

6.3.2

Le centre de G est engendré par une involution z_1 (produit de sept éléments d'ordre 2 commutant deux à deux) ; on a :

$$z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}e'a^o = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa^oba}e'a^o = (cc'bdeae')^9 = (cc'bdeaa^o)^9$$

6.3.3

(Avec les notations ci-dessus). Le groupe $\tilde{G}$ avec la présentation

$$(a, b, \ldots, e, a', c', e'/Y_{331}, [z_1, a'] = 1)$$

$$Y_{331} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & b & \text{——} & a & \text{——} \ a' \\ c' & \text{——} & c & & & & \\ & & & d & \text{——} & e & \text{——} \ e' \end{array}$$

est isomorphe à $A \rtimes W(E_7)$, où A est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre 2^7 engendré par les conjugués de a^oa' ; le centre de $\tilde{G}$ est engendré par z_1 et

z_2 (z_2 désignant l'involution centrale du sous-groupe $< a, b, \ldots, e, a', c' >$), $z_2 = (cc'bdaea')^9$. Le produit $z_1 z_2$ est dans A et les relations $[z_1, a'] = 1$ et $(a^o a')^2 = 1$ sont équivalentes.
([1], [2], [3], [5], [7], [14], [16], [19])

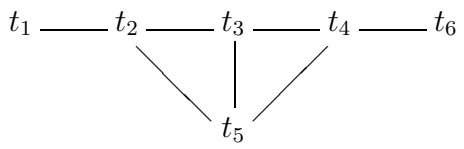
6.4 Le graphe Q_{221}

On désigne par U le groupe simple $U_6(2)$ ($\simeq {}^2A_5(2)$), son multiplicateur de Schur est $2^2 \times 3$. Les éléments t_i qui interviennent dans cette section sont des transvections unitaires et n'ont pas de lien avec les t_i introduits section 3.

6.4.1

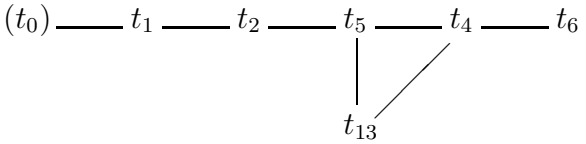
Le groupe $\hat{K}$ isomorphe à $(2^2 \times 3).2 \times U$ admet la présentation

$$(t_i(1 \leqslant i \leqslant 6/\underline{u}, (t_{13}t_6)^2 = 1) \qquad \text{avec} \qquad \underline{u} :$$



$$(t_3^{t_2}t_5)^3 = (t_3^{t_4}t_5)^3 = (t_3^{t_2t_4}t_5)^3 = 1,$$

où $t_{13} = t_1^{t't''t_3t_4}$ ($t' = t_4^{t_3t_5t_2t_3t_5}$, $t'' = t_2^{t_3t_5t_4t_3t_5}$). Les éléments t_i correspondent aux transvections unitaires t_{v_i}, les v_i ($1 \leqslant i \leqslant 6$) forment une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_4$ associé et satisfont à $(v_i, v_j) = 0$ si $(t_it_j)^2 = 1$, $(v_i, v_j) = 1$ si $(t_it_j)^3 = 1$, sauf pour $\{i, j\} = \{3, 5\}$, où on a alors $(v_5, v_3) = \omega$ avec $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. L'élément t_{13} correspond à la transvection $t_{v_1+v_3}$ et satisfait aux relations :



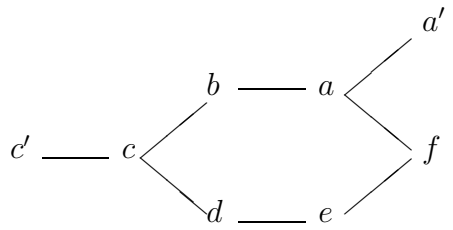
$$(t_5^{t_4}.t_{13})^3 = 1.$$

Le sous-groupe $T =< t_{13}, t_i(1 \leqslant i \leqslant 6, i \neq 3) >$ est isomorphe à un quotient du groupe $\tilde{G}$ (voir Annexe 2), son centre contient un élément d'ordre 3, central dans $\hat{K}$.

6.4.2

Il existe des conjugués de t_1 dans $\hat{K}$: $a, b, \ldots, f, a', c'$ tels que :

Q_{221}



On a la correspondance :

$$a \longrightarrow t_{v_4+v_5}, b \longrightarrow t_{v_2}, c \longrightarrow t_{v_1}, d \longrightarrow t_{v_2+\omega(v_1+v_3)+\omega v_6},$$
$$e \longrightarrow t_{\omega^2 v_1+\omega(v_1+v_6)+v_5}, f \longrightarrow t_{v_1+v_3}, a' \longrightarrow t_{v_6}, c' \longrightarrow t_{v_2+v_6}.$$

6.4.3

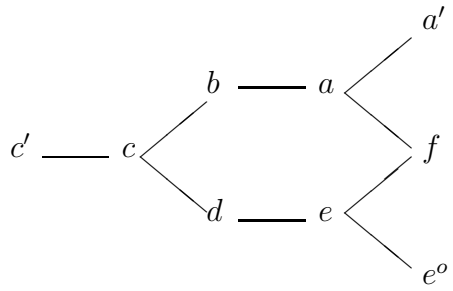
Le groupe K (isomorphe à $2^2.2.U$) admet la présentation

$$(a, b, \ldots, f, a', c'/Q_{221}, V = 1)$$

où $V = 1$ désigne la relation hexagonale $V = (adbecf)^4$.

a) Il existe un unique élément e^o satisfaisant aux relations :

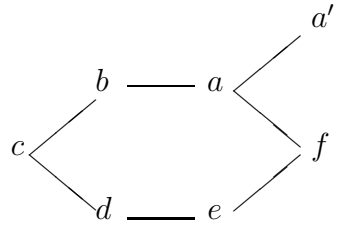
Q_{222}



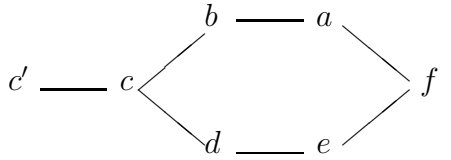
cet élément s'écrit $e^o = \mathcal{C}^{abedcc'a'abcde} = \mathcal{A}^{cbedaa'c'cbafe}$ (avec $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$ et $\mathcal{C} = c^{c'bdc}$) et correspond à la transvection $t_{v_1+v_3+\omega v_6}$.

b) Les sous-groupes R_a, R_c et R_e définis à partir des graphes :

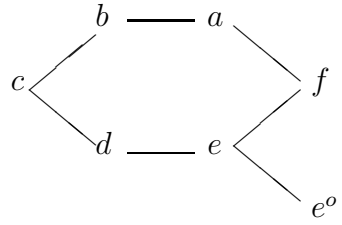
R_a



R_c

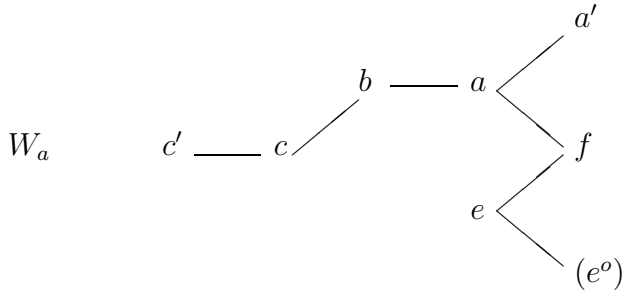


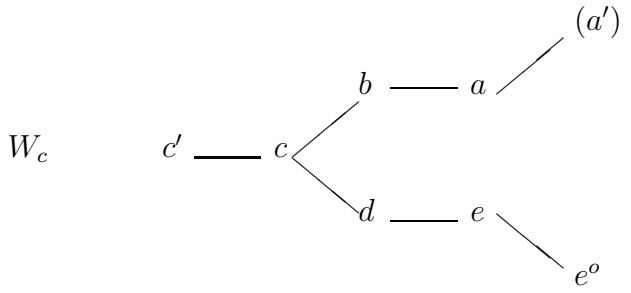
R_e

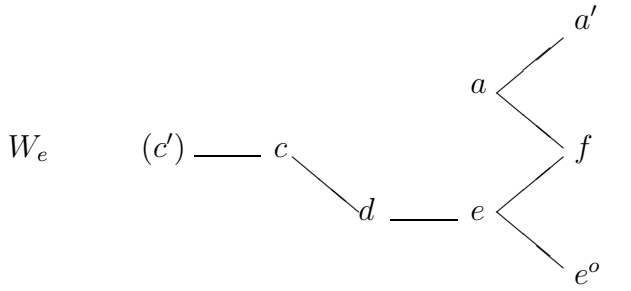


sont isomorphes au groupe orthogonal $2.O_6^-(3) : 2$ (voir Annexe 2) ; leurs images dans U sont les représentants des trois classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $O_6^-(3) : 2$. Leurs involutions centrales μ_a, μ_c, μ_e appartiennent au multiplicateur de Schur de U, on a $\mu_a\mu_c\mu_e = 1$, $\mu_a = (aa'fbcd)^5$, $\mu_c = (cc'dbaf)^5$ et $\mu_e = (ee^odfab)^5$.

c) Les sous-groupes W_a, W_c et W_e définis à partir des graphes :







contiennent respectivement e^o,a' et c' ; ils sont isomorphes à $W(E_7)$, leurs involutions centrales z_a, z_c et z_e sont dans $Z(K)$.

On a $\mu_a z_a = \mu_c z_c = \mu_e z_e = q$ où q correspond au produit des cinq transvections d'un plan isotrope. On a $Z(K) =< \mu_a, \mu_c > . < \mu_a z_a >$.
([2], [4], [13], [14],[15], [17], [20]).

Références

[1] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie.* Masson, 1981.

[2] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., and Wilson R.A. *Atlas of Finite Groups.* Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] Conway J.H., Norton S.P., and Soicher L.H. The Bimonster, the group Y_{555} and the projective plane of order 3. In Tagora M., editor, *Computers in Algebra.* Marcel Dekker, 1988.

[4] Cuypers H. and Hall J.I. 3-transposition groups of orthogonal type. *Journal of Algebra*, 152 :342–373, 1992.

[5] Cuypers H. and Hall J.I. The 3-transposition groups with trivial center. *Journal of Algebra*, 178 :149–193, 1995.

[6] Griess R.L., Meierfrankenfeld U., and Segev Y. A uniqueness proof for the Monster. *Annals of Math.*, 130 :567–602, 1989.

[7] Hall J.I. Some 3-transposition groups with normal 2-subgroups. *Proc. London Math. Soc.*, 358 :112–136, 1989.

[8] Hall J.I. 3-transposition groups with non-central normal 2-subgroups. *Journal of Algebra*, 146 :49–76, 1992.

[9] Ivanov A.A. Presenting the Baby Monster. *Journal of Algebra*, 163 :88–108, 1994.

[10] Jansen Ch., Lux K., Parker R.A., and Wilson R.A. *An Atlas of Brauer characters*, volume New Series II. London Math. Soc. Monographs (Oxford), 1995.

[11] Soicher L.H. More on the group Y_{555} and the projective plane of order 3. *Journal of Algebra*, 136 :168–174, 1991.

[12] Stroth G. Eine Kennenzeichnung der Gruppe ${}^2E_6(2)$. *Journal of Algebra*, 35 :534–547, 1975.

[13] Virotte-Ducharme M.M. *Couples fischeriens presque simples.* PhD thesis, Paris 7, 1985.

[14] Virotte-Ducharme M.M. Présentation des groupes de Fischer 1. *Geom. Dedicata*, 41 :275–335, 1992.

[15] Virotte-Ducharme M.M. Présentation de certains couples fischeriens de type classique. *Bull. Soc. Math. France*, 121 :227–270, 1993.

[16] Virotte-Ducharme M.M. Some Y-groups. *Geom. Dedicata*, 65 :1–30, 1997.

[17] Virotte-Ducharme M.M. Sur certaines extensions de $SU(n, 4)$. *Bull. Soc. Math. France*, 129 :1–31, 2001.

[18] Zara F. *Classification des couples fischeriens.* PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne Amiens, 1985.

[19] Zara F. Actions of reflection groups on nilpotents groups. *Europ. J. of Combinatorics*, 18 :231–242, 1997.

[20] Zara F. Présentations des groupes de Fischer $D_4(2) : S_3$ et $D_4(3) : S_3$. *Journal of Algebra*, 170 :705–734, 1994.