



**HAL**  
open science

## Intervalles de confiance bilatéraux et unilatéraux d'une proportion de mesures

Frédéric Bertrand, Myriam Maumy

► **To cite this version:**

Frédéric Bertrand, Myriam Maumy. Intervalles de confiance bilatéraux et unilatéraux d'une proportion de mesures. *Chimieométrie* 2007, Nov 2007, Lyon, France. pp.82-85. hal-00193173

**HAL Id: hal-00193173**

**<https://hal.science/hal-00193173>**

Submitted on 30 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Intervalles de confiance bilatéraux et unilatéraux d'une proportion de mesures

Frédéric Bertrand<sup>a</sup>, Myriam Maumy<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, fbertran@math.u-strasbg.fr.

<sup>b</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, mmaumy@math.u-strasbg.fr.

RÉSUMÉ. Nous proposons une manière appropriée de construire des intervalles de confiance unilatéraux pour une proportion de mesures et nous améliorons la qualité des intervalles de confiance bilatéraux existants en utilisant à la fois des résultats récents sur les intervalles de confiance du paramètre proportion d'une loi binomiale et les développements d'Edgeworth obtenus précédemment par les auteurs.

Ces résultats sont motivés par leurs applications dans les laboratoires de contrôle ou dans l'industrie chimique, pharmaceutique, agroalimentaire, etc.

MOTS-CLÉS : Estimation d'une proportion de mesures, Contrôle de qualité, Développements d'Edgeworth, Développements de Cornish-Fisher, Intervalles de confiances, Techniques bootstrap.

### 1. Introduction

#### 1.1. Motivation

Un des problèmes des laboratoires de contrôle ou de l'industrie chimique, pharmaceutique, agroalimentaire, etc, est l'estimation de la proportion  $\pi$  d'une population normale de mesures se situant entre deux limites. Pour une description détaillée du problème considéré, nous renvoyons à [BOU 85], [MEE 88] et [BER 07].

Nous étudions ici la procédure de Resnikoff présentée dans [RES 55] complétée par Mee dans [MEE 88]. Cette procédure, encore fréquemment utilisée dans la pratique pour la construction d'intervalles de confiances bilatéraux pour la proportion  $\pi$ , repose soit sur la méthode du score appliquée au paramètre proportion d'une loi binomiale, voir la Proposition 2, soit sur une approximation heuristique des quantiles d'une loi construite à partir de lois Beta.

Une série d'articles récents, [AGR 98], [BRO 01], [BRO 02], [BRO 03] et [CAI 05], est dédiée aux propriétés des intervalles de confiance bilatéraux et unilatéraux pour des lois discrètes dont la loi binomiale. Il en ressort que, si la méthode du score est relativement bien adaptée pour la construction d'intervalles de confiance bilatéraux, il n'en est rien en ce qui concerne des intervalles de confiance unilatéraux qui sont pourtant d'usage courant, en particulier lorsque l'on souhaite s'assurer que la proportion d'individus conformes  $\pi$  dans une population est supérieure à une valeur cible  $\pi_{\min}$ . Nous utilisons les résultats basés sur des développements d'Edgeworth proposés dans [BRO 02], [CAI 05] et [BER 07] pour construire des intervalles de confiance adaptés au cas unilatéral tout en améliorant la qualité des intervalles de confiance bilatéraux.

#### 1.2. Notations

Soit  $X_i: 1 \leq i \leq n$  une série de mesures d'une procédure analytique qui suit une loi normale de moyenne  $\mu_M$ <sup>1</sup> et de variance  $\sigma_M^2 > 0$  inconnues. Désignons par  $\bar{X}$  la moyenne empirique et  $s_c^2$  la variance empirique corrigée :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } s_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

La proportion  $\pi$  se définit alors par :

$$\pi := \mathbb{P}(\mu_T - \lambda \leq X \leq \mu_T + \lambda) = \Phi\left(\frac{\lambda + \mu_T - \mu_M}{\sigma_M}\right) - \Phi\left(\frac{-\lambda + \mu_T - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \pi_1 - \pi_2, \quad (1)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite,  $-\lambda, \lambda$  sont les « limites d'acceptation » et  $\mu_T$  représente la « vraie valeur »<sup>2</sup> de la moyenne de l'échantillon. La proportion  $\pi$  s'écrit alors :

$$\pi = \Phi\left(\frac{U - \mu_M}{\sigma_M}\right) - \Phi\left(\frac{L - \mu_M}{\sigma_M}\right), \text{ où } U = \lambda + \mu_T \text{ et } L = -\lambda + \mu_T. \quad (2)$$

<sup>1</sup> La lettre  $M$  est utilisée pour signifier « method ».

<sup>2</sup> La lettre  $T$  est utilisée pour signifier « true ».

À partir de (1) ou (2), deux estimateurs de  $\pi$  sont proposés : le premier, noté  $\hat{\pi}$  et défini par l'équation (3) dans [BER 07], est construit par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) et le second, noté  $\tilde{\pi}$  et défini par l'équation (4) dans [BER 07], est sans biais et de variance minimale (MVUE).  $\hat{\pi} - \pi$  et  $\tilde{\pi} - \pi$  renormalisés par  $\sqrt{n}$  sont asymptotiquement gaussiens de même variance, voir [BER 07].

La limite supérieure (respectivement inférieure) d'un intervalle de confiance de niveau exact  $100(1-\alpha)\%$  si nous ne considérons qu'une seule des deux proportions  $\pi_i$ , notée  $P_L$  (respectivement  $P_U$ ), est construite ainsi :

$$\mathbb{P}\left(T\left(\sqrt{n}z_{1-P_L}\right) \leq \sqrt{nk_{obs}}\right) \leq \alpha, \text{ (respectivement } \mathbb{P}\left(T\left(\sqrt{n}z_{1-P_U}\right) \leq \sqrt{nk_{obs}}\right) \leq \alpha), \quad (3)$$

où  $k_1 = (\bar{X} - L)/s_c$ ,  $k_2 = (U - \bar{X})/s_c$ ,  $k_{obs} = k_{i,obs}$ ,  $k_{i,obs}$  est la valeur de  $k_i$  évaluée sur la série de mesures considérée et  $z_\alpha$  est le  $\alpha$  percentile d'une loi normale centrée réduite et  $T(\lambda)$  suit une loi de Student non centrale de paramètre  $\lambda$  à  $(n-1)$  degrés de liberté.

## 2. Les procédures de Resnikoff et de Mee

L'une ou l'autre de ces deux procédures est choisie en fonction d'un a priori sur la valeur de  $\pi$ . Nous renvoyons le lecteur à l'article [MEE 88] pour de plus amples détails.

La procédure de Resnikoff repose sur l'utilisation de l'estimateur  $\tilde{\pi}$ , défini par l'équation (4) dans [BER 07].

- R.i.** Calculer les quantités  $k_{1,obs}$  et  $k_{2,obs}$  à partir de l'échantillon. Si la valeur  $k_{1,obs}$  ou  $k_{2,obs}$  est supérieure à  $(n-1)/\sqrt{n}$  alors choisir  $k_{obs} = \min(k_{1,obs}, k_{2,obs})$  et aller à l'étape **R.iv.** Sinon calculer  $\tilde{\pi}_{obs}$ .
- R.ii.** Déterminer  $b_{obs}$  le 100  $\tilde{\pi}_{obs}$  percentile de la distribution Beta  $((n-2)/2, (n-2)/2)$ .
- R.iii.** Calculer  $k_{obs} = (1 - 2b_{obs})(n-1)/\sqrt{n}$ .
- R.iv.** Résoudre (3) pour déterminer l'intervalle de confiance approché  $[P_L, P_U]$  pour la proportion  $\pi$ .

La procédure de Mee repose sur l'utilisation de l'estimateur  $\hat{\pi}$ , défini par l'équation (3) dans [BER 07].

- M.i.** Calculer les quantités  $k_{1,obs}$  et  $k_{2,obs}$  à partir de l'échantillon. Si la valeur  $k_{1,obs}$  ou  $k_{2,obs}$  est supérieure à  $(n-1)/\sqrt{n}$  alors résoudre (3) pour déterminer l'intervalle de confiance approché  $[P_L, P_U]$  pour la proportion  $\pi$  en choisissant  $k_{obs} = \min(k_{1,obs}, k_{2,obs})$ . Sinon calculer  $\hat{\pi}_{obs}$ .
- M.ii.** En notant  $\phi$  la densité d'une loi normale centrée réduite et  $c^2 = n/(n-1)$ , approximer la variance  $\text{Var}(\hat{\pi})$  de  $\hat{\pi}$  par :
 
$$V_{obs} = \left[ \left( \phi(ck_{1,obs}) - \phi(ck_{2,obs}) \right)^2 + \left( ck_{1,obs}\phi(ck_{1,obs}) - ck_{2,obs}\phi(ck_{2,obs}) \right)^2 / 2 \right] / (n-1). \quad (4)$$
- M.iii.** Calculer  $n' = \hat{\pi}_{obs} (1 - \hat{\pi}_{obs}) / V_{obs}$ . Cette taille est un « effective sample size ».
- M.iv.** Déterminer l'intervalle de confiance  $[P_L, P_U]$  en appliquant la méthode du score, voir la Proposition 2, à  $V \sim \text{Bin}(p, n')$  et en utilisant l'estimation ponctuelle  $\hat{\pi}_{obs}$  de  $\hat{\pi}$  comme estimation de  $p$  dans les calculs.

## 3. Intervalles de confiance unilatéraux et bilatéraux et développements d'Edgeworth

Les intervalles de confiance unilatéraux pour le paramètre  $p$  d'une loi binomiale  $\text{Bin}(p, n)$ , calculés dans [CAI 05] et reproduits ci-dessous, ont été obtenus en deux étapes : calcul du développements d'Edgeworth à l'ordre 2 de leur taux de couverture et élimination des biais systématiques du premier et du second ordre de ce taux de couverture. Ces intervalles de confiance sont très précis et ce même pour des valeurs faibles de l'effectif de l'échantillon et toutes les valeurs du paramètre  $p$ . Soit  $Y_1, \dots, Y_n$  un échantillon indépendant identiquement distribué suivant une loi  $\text{Bin}(p, n)$ .

Posons  $\eta = 1/3 z_{1-\alpha}^2 + 1/6$ ,  $\gamma_1 = -(13/18 z_{1-\alpha}^2 + 17/18)$ ,  $\gamma_2 = 1/18 z_{1-\alpha}^2 + 7/36$  et  $\tilde{p} = (n\bar{Y} + \eta) / (n + 2\eta)$ .

### Proposition 1

L'intervalle de confiance unilatéral supérieur  $IC_U$  (respectivement inférieur  $IC_L$ ) de niveau  $100(1-\alpha)\%$  suivant est exact à l'ordre deux:

$$IC_U = \left[ 0, \tilde{p} + z_{1-\alpha} \left( \tilde{p}(1-\tilde{p}) + (\gamma_1 \tilde{p}(1-\tilde{p}) + \gamma_2) n^{-1} \right)^{1/2} n^{-1/2} \right] \cap [0, 1]. \quad (5)$$

$$\text{(respectivement } IC_L = \left[ \tilde{p} - z_{1-\alpha} \left( \tilde{p}(1-\tilde{p}) + (\gamma_1 \tilde{p}(1-\tilde{p}) + \gamma_2) n^{-1} \right)^{1/2} n^{-1/2}, 1 \right] \cap [0, 1]. \text{)} \quad (6)$$

**Preuve :** Voir [CAI 05].

Les intervalles de confiance bilatéraux se calculent généralement à l'aide de la méthode du score. Nous commençons par rappeler la définition de ces intervalles, voir [BRO 02] par exemple.

**Proposition 2**

L'intervalle de confiance bilatéral du score usuel de niveau  $100(1-\alpha)\%$  est égal à :

$$[W_L, W_U] = \left[ \frac{n\bar{Y} + z_{1-\alpha/2}^2/2}{n + z_{1-\alpha/2}^2} \pm \frac{z_{1-\alpha/2} n^{1/2}}{n + z_{1-\alpha/2}^2} \left( \bar{Y}(1-\bar{Y}) + z_{1-\alpha/2}^2/(4n) \right)^{1/2} \right]. \quad (7)$$

**Preuve :** Voir [BRO 02].

Les calculs et les recommandations exposés dans [BRO 02] amènent à choisir l'intervalle de confiance bilatéral du score modifié. Il s'agit d'un intervalle de confiance corrigé pour une faible ou forte valeur observée,  $n\bar{y}$ , de la variable aléatoire  $n\bar{Y}$  et dont les bornes sont données par la Définition 3.

**Définition 3**

L'intervalle de confiance bilatéral du score modifié, noté  $[W_L^M, W_U^M]$ , est défini ainsi :

si  $1 \leq n\bar{y} \leq y^*$  (respectivement  $n - y^* \leq n\bar{y} \leq n - 1$ ) avec  $y^* = 2$  si  $n \leq 50$  et  $y^* = 3$  si  $51 \leq n$ , alors la borne inférieure  $W_L$  (respectivement supérieure  $W_U$ ) de l'intervalle du score usuel est remplacée par  $\lambda_{n\bar{y}}/n$  avec  $\lambda_x = 1/2 \chi_{2x, \alpha}^2$  où  $\chi_{2x, \alpha}^2$  est le  $100\alpha$  percentile d'une distribution du  $\chi^2$  avec  $2x$  degrés de liberté.

Nous proposons enfin des intervalles de confiance pour  $\pi$  de niveau  $100(1-\alpha)\%$ , unilatéraux ou bilatéraux.

**Théorème 1**

Les intervalles de confiance construits à l'aide du développement de Cornish-Fisher obtenu pour  $\hat{\pi}$  dans [BER 07] et d'une technique de bootstrap de type Student ou  $BC_a$  sont exacts à l'ordre deux.

**Théorème 2**

Les intervalles de confiance construits à l'aide du développement de Cornish-Fisher obtenu pour  $\hat{\pi}$  dans [BER 07] et d'une technique de bootstrap de type Student ou  $BC_a$  sont exacts à l'ordre deux.

**Preuve des Théorèmes 1 et 2 :**

Nous renvoyons à [SHA 96], pages 131 à 140, pour une construction explicite de ces intervalles de confiance pour  $\pi$ , en particulier pour une formule explicite de l'estimateur de la constante d'accélération  $a$ , à partir des développements de Cornish-Fisher pour  $\hat{\pi}$  et  $\tilde{\pi}$  obtenus dans [BER 07].

**4. Améliorations de la précision des intervalles de confiance proposés par Resnikoff et Mee, construction d'intervalles alternatifs**

Commençons par modifier la procédure de Resnikoff, à la fois pour le cas unilatéral et le cas bilatéral :

- Nous proposons de remplacer les étapes **(R.ii)**, **(R.iii)** et **(R.iv)** par une seule étape **(R.ii)'**: « Utiliser l'intervalle de confiance du Théorème 2. ».

Puis, nous suggérons les alternatives suivantes à la procédure de Mee. Commençons par le cas unilatéral.

- Remplacer l'étape **(M.iv)** par l'étape **(M.iv)'** : « Déterminer l'intervalle de confiance  $[0, I_U]$  (respectivement l'intervalle de confiance  $[I_L, 1]$ ) en utilisant la formule **(5)** de la Proposition 1 (respectivement **(6)** de la Proposition 1) si nous souhaitons une limite unilatérale supérieure (respectivement inférieure). ».
- Remplacer les étapes **(M.ii)**, **(M.iii)** et **(M.iv)** par une seule étape **(M.ii)'** : « Utiliser l'intervalle de confiance du Théorème 1. ».

Continuons avec le cas bilatéral pour lequel nous suggérons également deux alternatives.

- Remplacer l'étape (M.iv) par l'étape (M.iv)' : « Déterminer l'intervalle de confiance du score modifié  $[W_L^M, W_U^M]$  de la Définition 3. ».
- Remplacer les étapes (M.ii), (M.iii) et (M.iv) par une seule étape (M.ii)' : « Utiliser l'intervalle de confiance du Théorème 1. ».

## 5. Conclusions et perspectives

Les intervalles de confiance utilisés ici possèdent tous la caractéristique d'être exacts à l'ordre deux. Ainsi nous avons obtenu une augmentation sensible de la précision des intervalles de confiance bilatéraux proposés dans [MEE 88] et introduit des intervalles de confiance unilatéraux spécialement conçus pour leur utilisation dans le contrôle de qualité ou la validation de procédures analytiques.

Nous présenterons la comparaison de la qualité de ces intervalles de confiance à la fois sur des données simulées et réelles issues de l'industrie pharmaceutique.

L'amélioration des intervalles de confiance pour ce modèle simple d'échantillonnage se poursuivra par l'adaptation de ces techniques à des plans d'échantillonnage plus complexes comme ceux dans [HOF 05].

Parallèlement, nous montrerons comment étendre ces résultats au cas où la loi de la population de mesures de la procédure analytique est connue mais n'est pas nécessairement une loi normale, les paramètres de cette loi pouvant être à estimer. Cette démarche est motivée par des indications de [MEE 88] et les résultats de [FOL 65].

## 6. Bibliographie

- [AGR 98] A. AGRESTI AND B.A. COULL, “ Approximate is Better than “Exact” for Interval Estimation of Binomial Proportions ”, *The American Statistician*, vol. 52, 1998, p. 119-126.
- [BER 07] F. BERTRAND ET M. MAUMY, “ Développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures ”, *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 345, 2007, p. 399-404.
- [BHA 76] R.N. BHATTACHARYA AND R.R. RAO, “ Normal Approximation and Asymptotic Expansions ”, Wiley, 1976.
- [BOU 85] T.L. BOULLION, G.C. CASCIO AND J.P. KEATING, “ Comparison of estimators of the fraction defective in the normal distribution ”, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 14, 1985, p. 1511-1529.
- [BRO 01] L.D. BROWN, T.T. CAI AND A. DASGUPTA, “ Interval Estimation for a binomial Proportion ”, *Statistical Science*, vol. 16, 2001, p. 101-133.
- [BRO 02] L.D. BROWN, T.T. CAI AND A. DASGUPTA, “ Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions ”, *The Annals of Statistics*, vol. 30, 2002, p. 160-201.
- [BRO 03] L.D. BROWN, T.T. CAI AND A. DASGUPTA, “ Interval Estimation in Exponential Families ”, *Statistica Sinica*, vol. 13, 2003, p. 19-49.
- [CAI 05] T.T. CAI, “ One-sided confidence intervals in discrete distributions ”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 131, 2005, p. 63-88.
- [FOL 65] J.L. FOLKS, D.A. PIERCE AND C. STEWART, “ Estimating the Fraction of Acceptable Product ”, *Technometrics*, vol. 7, 1965, 43-50.
- [HAL 82] P. HALL, “ Improving the normal approximation when constructing one-sided confidence intervals for a binomial or Poisson parameters ”, *Biometrika*, vol. 69, 1982, p. 647-652.
- [HOF 05] D. HOFFMAN AND R. KRINGLE, “ Two-sided tolerance intervals for balanced and unbalanced random effects models ”, *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, vol. 15, 2005, p. 289-293.
- [SHA 96] J. SHAO AND D. TU, *The Jackknife and Bootstrap*, Springer, 1996.
- [KOL 50] A.N. KOLMOGOROV, “ Unbiased estimates ”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 14, 1950, 303-326.
- [MEE 88] R.W. MEE, “ Estimation of the percentage of a normal distribution lying outside a specified interval ”, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, vol. 17, 1988, p. 1465-1479.
- [RES 55] G.J. RESNIKOFF, *Interval estimation of proportion defective in sampling inspection by variables*, Tech. Report, vol. 21, Applied Math. and Stat. Lab., Stanford Univ., 1955.
-