



HAL
open science

L'algèbre des invariants d'un groupe de Coxeter agissant sur un multiple de sa représentation standard

Loïc Foissy

► **To cite this version:**

Loïc Foissy. L'algèbre des invariants d'un groupe de Coxeter agissant sur un multiple de sa représentation standard. 2007. hal-00192514

HAL Id: hal-00192514

<https://hal.science/hal-00192514>

Preprint submitted on 28 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'algèbre des invariants d'un groupe de Coxeter agissant sur un multiple de sa représentation standard

L. Foissy

Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr

RESUME : Soit G un groupe de Coxeter de type A_n , B_n , D_n ou $I_2(N)$, ou un groupe de réflexions complexes de type $G(de, e, n)$. Soit V sa représentation standard et soit k un entier plus grand que 2. Alors G agit sur $S(V)^{\otimes k}$. Nous montrons que l'algèbre d'invariants $(S(V)^{\otimes k})^G$ est un $(S(V)^G)^{\otimes k}$ -module libre de rang $|G|^{k-1}$ et que $S(V)^{\otimes k}$ n'est pas un $(S(V)^{\otimes k})^G$ -module libre.

ABSTRACT : Let G be a Coxeter group of type A_n , B_n , D_n or $I_2(N)$, or a complex reflection group of type $G(de, e, n)$. Let V be its standard representation and let k be an integer greater than 2. Then G acts on $S(V)^{\otimes k}$. We show that the algebra of invariants $(S(V)^{\otimes k})^G$ is a free $(S(V)^G)^{\otimes k}$ -module of rank $|G|^{k-1}$, and that $S(V)^{\otimes k}$ is not a free $(S(V)^{\otimes k})^G$ -module.

KEY-WORDS : Theory of invariants ; Coxeter groups.

MSC CLASSES : 13A50, 17B10.

Table des matières

1	Formule de Molien \mathbb{N}^k-graduée	2
2	cadre et énoncé du théorème principal	3
3	Serie de Poincaré-Hilbert des invariants	6
3.1	Orthogonal d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$	6
3.2	Série formelle de A_k^G	7
4	Exemples des séries infinies de groupes de Coxeter	9
4.1	Groupes symétriques A_{n-1}	9
4.2	Groupes de réflexions signées B_n	10
4.3	Groupes de Coxeter D_n	10
4.4	Groupes diédraux $I_2(N)$	11
4.5	Groupes de réflexions complexes $G(de, e, n)$	11
4.6	Un autre exemple, une représentation de G_2	12

Introduction

Soit G un groupe de Coxeter et V sa représentation standard. Soit $A_1 = S(V)$ l'algèbre symétrique de V ; le groupe G agit par automorphismes d'algèbre sur A_1 et les résultats suivants sont bien connus ([2, 6, 7]) :

1. La sous-algèbre des éléments G -invariants A_1^G est une algèbre de polynômes.
2. Le A_1^G -module A_1 est libre, de rang fini égal au cardinal de G .

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On considère maintenant la représentation $V^{\oplus k}$ de G et son algèbre symétrique $A_k = S(V^{\oplus k}) = A_1^{\otimes k}$, sur laquelle agit G . Pour $k = 2$, cette situation a été étudiée dans le cas du groupe symétrique dans [5]; en remarquant que V et V^* sont des représentations isomorphes, cette situation est étudiée dans [4] pour les groupes de Coxeter et dans [1] pour les groupes de Weyl de rang 2.

Cette algèbre A_k contient deux sous-algèbres particulières. La première est la sous-algèbre A_k^G des éléments G invariants, la seconde est la sous-algèbre des éléments $A_k^{G \times \dots \times G}$ invariants, c'est-à-dire $(A_1^G)^{\otimes k}$. De plus, $(A_1^G)^{\otimes k} \subseteq A_k^G \subseteq A_k$. D'après les premiers résultats évoqués dans cette introduction, A_k est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre de rang fini, égal à $|G|^k$. La question est de savoir si A_k^G est un module libre sur $(A_1^G)^{\otimes k}$ et le cas échéant de calculer son rang. On peut également se demander si A_k est un module libre sur A_k^G . Nous démontrons dans ce texte les résultats suivants :

1. Si G est un groupe de Coxeter d'une des séries infinies $A_n, B_n, D_n, I_2(N)$ ou plus généralement un groupe de réflexions complexes de la série infinie $G(de, e, n)$, alors A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre, de rang $|G|^{k-1}$.
2. Avec les mêmes hypothèses sur G , A_k n'est pas un A_k^G -module libre.

Nous donnons également un exemple de groupe pour lequel A_k^G n'est pas un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre. Ce groupe est le groupe diédral $I_2(6) = G_2$, mais la représentation choisie, de dimension 2, n'est pas la représentation standard.

La preuve de ces résultats utilise une variante \mathbb{N}^k -graduée de la formule de Molien, exposée dans la première section. Les différents groupes considérés dans ce texte sont tous des sous-groupes de produits en couronne de certains groupes cycliques, comme il est expliqué dans la deuxième section. La section suivante détaille le calcul des séries de Poincaré-Hilbert des algèbres d'invariants et la dernière section explicite les différents exemples de cet article.

Notations.

1. Le corps de base est \mathbb{C} .
2. Soit A un anneau. Pour tout q dans cet anneau, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $[i]_q = 1 + \dots + q^{i-1}$.

1 Formule de Molien \mathbb{N}^k -graduée

Soit G un groupe fini, agissant de manière homogène sur un espace vectoriel \mathbb{N}^k -gradué A . Les composantes homogènes de A seront notées $A(i_1, \dots, i_k)$. La série formelle de Poincaré-Hilbert de A est :

$$R(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \dim_{\mathbb{C}}(A(i_1, \dots, i_k)) h_1^{i_1} \dots h_k^{i_k}.$$

G agit sur A de manière homogène, donc le sous-espace A^G des invariants sous l'action de G est un sous-espace gradué. On note $R^G k(h_1, \dots, h_k)$ sa série formelle de Poincaré-Hilbert.

Définition 1 Soit $\sigma \in G$ et $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$. On pose $\chi_{i_1, \dots, i_k}(\sigma) = \text{Tr}(\sigma|_{A(i_1, \dots, i_k)})$. On pose également :

$$\chi_k(\sigma) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \chi_{i_1, \dots, i_k}(\sigma) h_1^{i_1} \dots h_k^{i_k}.$$

On a la variante suivante de la formule de Molien (voir [7]) :

Proposition 2 La série formelle de l'espace A^G des invariants de A sous l'action de G est :

$$R^G(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi_k(\sigma).$$

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$,

$$\dim_{\mathbb{C}}(A(i_1, \dots, i_k)) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi_{i_1, \dots, i_k}(\sigma),$$

ce qui est classique. \square

Exemple. Soit V une représentation de G de dimension finie et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors G agit par automorphismes d'algèbre sur $A_k = S(V)^{\otimes k} = S(V^{\oplus k})$. Cette algèbre est \mathbb{N}^k -graduée en mettant les éléments de la i -ème copie de V homogènes de degré $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le coefficient 1 est situé en i -ème position. La série formelle de Poincaré-Hilbert de A_k est alors :

$$R_k(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \dim_{\mathbb{C}}(A_k(i_1, \dots, i_k)) h_1^{i_1} \dots h_k^{i_k} = \frac{1}{(1-h_1)^n} \dots \frac{1}{(1-h_k)^n}.$$

2 cadre et énoncé du théorème principal

Soient $N \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ stable sous l'action de S_n par permutation des coordonnées. On obtient alors un produit semi-direct $G = H \rtimes S_n$, sous-groupe du produit en couronne $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$. Soit $V = Vect(x_1, \dots, x_n)$ et soit ξ une racine N -ième primitive de l'unité. Le groupe G agit sur V de la manière suivante : pour tout $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in H$, tout $\sigma \in S_n$,

$$(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).x_j = \xi^{k_j} x_j, \quad \sigma.x_j = x_{\sigma(j)}.$$

Le but de la section 3 du présent texte est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3 *Sous les hypothèses exposées précédemment,*

$$\lim_{(h_1, \dots, h_k) \rightarrow (1, \dots, 1)} \frac{R_k^G(h_1, \dots, h_k)}{R_1^G(h_1) \dots R_1^G(h_k)} = |G|^{k-1}.$$

Par la suite, nous noterons :

$$Q_k(h_1, \dots, h_k) = \frac{R_k^G(h_1, \dots, h_k)}{R_1^G(h_1) \dots R_1^G(h_k)}.$$

La proposition 3 a le corollaire suivant :

Théorème 4 *Supposons que (G, V) soit un groupe de Coxeter d'une des séries infinies A_n , B_n , D_n ou $I_2(N)$, ou plus généralement un groupe de réflexions complexes de la série infinie $G(de, e, n)$. Notons $A_k = S(V)^{\otimes k} = S(V^{\oplus k})$.*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre de rang $|G|^{k-1}$. De plus, $Q_k(h_1, \dots, h_k)$ est un polynôme.*
2. *Si $k \geq 2$, A_k n'est pas un module libre sur A_k^G .*

Preuve. Lorsque (G, V) est un groupe de réflexions complexes, on sait que A_1^G est un anneau de polynômes et que A_1 est un A_1^G -module libre de rang fini (voir par exemple [2, 6]). Par suite, $A_k = A_1^{\otimes k}$ est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre de type fini. Soit alors (P_1, \dots, P_m) une $(A_1^G)^{\otimes k}$ -base de A_k .

Première étape. On note \mathcal{M} l'idéal d'augmentation de $(A_1^G)^{\otimes k}$. Montrons que $\mathcal{M}A_k \cap A_k^G = \mathcal{M}A_k^G$. L'inclusion \supseteq est immédiate. Soit $x \in \mathcal{M}A_k \cap A_k^G$. Cet élément peut s'écrire $x = \sum_j m_j a_j$,

avec pour tout j , $m_j \in \mathcal{M}$ et $a_j \in A_k$. De plus, comme x et les m_j sont G -invariants :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.x \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_j (g.m_j)(g.a_j) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_j m_j(g.a_j) \\
&= \sum_j m_j \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.a_j \right)}_{\in A_k^G} \in \mathcal{M}A_k^G.
\end{aligned}$$

par suite, on a une injection de \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G} \hookrightarrow \frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}.$$

Une \mathbb{C} -base de $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$ est $(P_1 + \mathcal{M}A_k, \dots, P_m + \mathcal{M}A_k)$, donc $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$ et par suite $\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G}$ sont de dimension finie. Soit $(Q_1 + \mathcal{M}A_k^G, \dots, Q_n + \mathcal{M}A_k^G)$ une \mathbb{C} -base de $\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G}$. Notons que $n \leq m$ et qu'on peut choisir les Q_i homogènes.

Deuxième étape. Montrons que les Q_i engendrent A_k^G . Posons $B =_{(A_1^G)^{\otimes k}} \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle$ et $A = A_k^G/B$. Tout d'abord, $\mathcal{M}A = A$. En effet, si $x \in A_k^G$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, tels que $x + \mathcal{M}A_k^G = \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_n Q_n + \mathcal{M}A_k^G$. On peut donc écrire :

$$x = \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_n Q_n + \sum_j m_j a_j,$$

où $a_j \in A_k^G$, $m_j \in \mathcal{M}$ pour tout j . En conséquence :

$$x + B = 0 + \sum_j m_j (a_j + B) \in \mathcal{M}A.$$

Par conséquence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A = \mathcal{M}^k A$.

Supposons A non nul. Il s'agit d'un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module gradué ; choisissons $x \in A$, non nul, homogène et notons k son degré. Alors $x \in \mathcal{M}^{k+1} A$, donc peut s'écrire :

$$x = \sum_j m_j^{(1)} \dots m_k^{(k+1)} . a_j,$$

où les $m_j^{(i)}$ sont dans \mathcal{M} . Alors, pour tout j ,

$$m_j^{(1)} \dots m_k^{(k+1)} . a_j \in \bigoplus_{l \geq k+1} A(l),$$

donc x ne peut être de degré k : on aboutit à une contradiction, donc $A = (0)$ et donc Q_1, \dots, Q_n engendrent A_k^G .

Troisième étape. Montrons que les Q_i sont $(A_1^G)^{\otimes k}$ -linéairement indépendants. Soient $x_1, \dots, x_n \in (A_1^G)^{\otimes k}$, tels que $x_1 Q_1 + \dots + x_n Q_n = 0$. Dans $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$, posons, pour tout j ,

$$Q_j + \mathcal{M}A_k = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} (P_i + \mathcal{M}A_k).$$

La famille $(Q_j + \mathcal{M}A_k)_{1 \leq j \leq n}$ étant libre, la matrice $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est de rang maximal n . D'autre part, dans A_k , posons :

$$Q_j = \sum_{i=1}^m y_{i,j} P_i,$$

où $y_{i,j} \in (A_1^G)^{\otimes k}$ pour tous i et j . Par unicité des $\lambda_{i,j}$, $y_{i,j} = \lambda_{i,j} + \mathcal{M}A_k$ pour tous i et j . En conséquence, la matrice $(y_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est de rang maximal n sur le corps $K = \text{Frac}((A_1^G)^{\otimes k})$.

Comme $n \leq m$, son noyau est donc nul. D'autre part,

$$\sum_j x_j Q_j = \sum_{i,j} y_{i,j} x_j P_i,$$

Les P_i étant $(A_1^G)^{\otimes k}$ -linéairement indépendants, on obtient pour tout i :

$$\sum_j y_{i,j} x_j = 0.$$

D'après ce qui précède, on a donc $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Quatrième étape. Donc A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre, de rang fini n . Notons $\check{Q}_k(h_1, \dots, h_k)$ la série génératrice de Poincaré-Hilbert des degrés des Q_i ; il s'agit d'un polynôme, les Q_i étant en nombre fini. De plus, la série de Poincaré-Hilbert de A_k^G est :

$$R_k^G(h_1, \dots, h_k) = \check{Q}_k(h_1, \dots, h_k) R_1^G(h_1) \dots R_k^G(h_k).$$

Donc $\check{Q}_k(h_1, \dots, h_k) = Q_k(h_1, \dots, h_k)$. Enfin, le rang n vaut $\check{Q}_k(1, \dots, 1)$, ce qui d'après la proposition 3 vaut $|G|^{k-1}$.

Dernière étape. Supposons que A_k soit un A_k^G -module libre. Il existe alors un polynôme $T_k(h_1, \dots, h_k)$ tel que $R_k(h_1, \dots, h_k) = T_k(h_1, \dots, h_k) R_k^G(h_1, \dots, h_k)$. par suite :

$$R_k(h_1, \dots, h_k) = T_k(h_1, \dots, h_k) Q_k(h_1, \dots, h_k) R_1^G(h_1) \dots R_k^G(h_k).$$

Soient d_1, \dots, d_n les degrés du groupe de Coxeter G (voir [2, 6]). On obtient :

$$\frac{1}{(1-h_1)^n \dots (1-h_k)^n} = \frac{T_k(h_1, \dots, h_k) Q_k(h_1, \dots, h_k)}{(1-h_1^{d_1}) \dots (1-h_1^{d_n}) \dots (1-h_k^{d_1}) \dots (1-h_k^{d_n})}.$$

En conséquence, $T_k(h_1, \dots, h_k) Q_k(h_1, \dots, h_k) = [d_1]_{h_1} \dots [d_n]_{h_1} \dots [d_1]_{h_k} \dots [d_n]_{h_k}$. En considérant la décomposition en polynômes irréductibles de $Q_k(h_1, \dots, h_k)$, on montre que l'on peut écrire $Q_k(h_1, \dots, h_k) = Q_k^{(1)}(h_1) \dots Q_k^{(k)}(h_k)$, où les $Q_k^{(i)}$ sont des polynômes à une variable. De plus, pour des raisons de symétrie entre les différentes copies de V , on peut se ramener à $Q_k^{(1)}(h) = \dots = Q_k^{(k)}(h) = \check{Q}_k(h)$. Comme $Q_k(0, \dots, 0) = 1$, on peut supposer que $\check{Q}_k(0) = 1$.

Comme le rang de A_k^G en tant que $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module est strictement plus grand que 1, le polynôme $Q_k(h_1, \dots, h_k)$ n'est pas constant. Soit $\lambda h_1^{\alpha_1} \dots h_k^{\alpha_k}$ un monôme non constant de ce polynôme, choisi de degré total minimal. A ce monôme correspond λ éléments de la famille des générateurs (Q_1, \dots, Q_n) . Si un seul des α_i est non nul, alors ces générateurs sont dans l'une

des copies de $S(V)$ et G -invariants, donc dans $(A_1^G)^{\otimes k}$, ce qui est impossible. Quitte à changer l'indexation des différentes copies de V , on peut supposer que $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$. Alors $\tilde{Q}_k(h)$ est nécessairement de la forme $\tilde{Q}_k(h) = 1 + \mu h^{\alpha_1} + \dots$, où μ est un scalaire non nul. En développant $Q_k(h_1, \dots, h_k)$, ce dernier polynôme contient le monôme non nul $\mu h_1^{\alpha_1}$, ce qui contredit la minimalité du degré de $\lambda h_1^{\alpha_1} \dots h_k^{\alpha_k}$. Donc A_k n'est pas libre sur A_k^G . \square

Remarques.

1. Les trois premières étapes de cette preuve montrent que, si G est un groupe de Coxeter, A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre de rang fini, de rang inférieur à $|G|^k$.
2. La dernière étape montre que, si G est un groupe de Coxeter, tel que A_k^G soit un $(A_1^G)^{\otimes k}$ -module libre de rang ≥ 2 , alors A_k n'est pas un A_k^G -module libre.

3 Serie de Poincaré-Hilbert des invariants

3.1 Orthogonal d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$

Définition 5 Soit K un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. On pose :

$$K^\perp = \{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \mid \forall (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n) \in H, \bar{k}_1 \bar{l}_1 + \dots + \bar{k}_n \bar{l}_n = \bar{0}\}.$$

Il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. De plus, si H est stable sous l'action de S_n par permutation des coordonnées, il en est de même pour H^\perp .

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $V^{\oplus k}$ a pour base $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$ et l'action de G sur $V^{\oplus k}$ est donnée par :

$$(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).x_{i,j} = \xi^{k_j} x_{i,j}, \quad \sigma.x_{i,j} = x_{i,\sigma(j)}.$$

Comme H est un sous-groupe distingué de G et que $G/H \approx S_n$, $A_k^G = (A_k^H)^{S_n}$. Considérons donc d'abord A_k^H . Chaque monôme de A_k engendre un sous- H -module de dimension 1, en conséquence, $A_k^H = Vect \left(x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} / x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \text{ invariant sous } H \right)$. De plus,

$$\begin{aligned} & x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \text{ invariant sous } H \\ \iff & \forall (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in H, \xi^{k_1(\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}) + \dots + k_n(\alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{k,n})} = 1 \\ \iff & \forall (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in H, \overline{k_1(\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}) + \dots + k_n(\alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{k,n})} = \bar{0} \\ \iff & \overline{(\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{k,n})} \in H^\perp. \end{aligned}$$

En conséquence :

Lemme 6

$$A_k^H = Vect \left(x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} / \overline{(\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{k,n})} \in H^\perp \right).$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à la preuve du résultat suivant :

Lemme 7 Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. Alors :

$$\frac{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n}{H^\perp} \approx Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx H.$$

En conséquence, $|H||H^\perp| = N^n$.

Preuve. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -base canonique de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. Il existe une seconde base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ et des entiers d_1, \dots, d_n tels que :

1. $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n \mid N$;
2. H est engendré par $d_1 f_1, \dots, d_n f_n$.

Première étape. Montrons que l'application suivante est surjective :

$$\rho : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \phi & \longrightarrow & \phi|_H. \end{cases}$$

Soit $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Posons $\bar{k}_i = \psi(d_i f_i)$ pour tout i . Comme l'ordre de $d_i f_i$ est N/d_i , \bar{k}_i est d'ordre divisant N/d_i , donc est dans $d_i \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$: posons donc $\bar{k}_i = \bar{d}_i \bar{l}_i$. Alors ψ est la restriction de H du morphisme ϕ défini par $\phi(f_i) = \bar{l}_i$.

Deuxième étape. Considérons l'application suivante :

$$\vartheta : \begin{cases} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) & \longrightarrow & \begin{cases} H & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n) & \longrightarrow & \bar{k}_1 \bar{l}_1 + \dots + \bar{k}_n \bar{l}_n. \end{cases} \end{cases}$$

Par définition, son noyau est H^\perp . Montrons que ϑ est surjective. On considère l'application suivante :

$$\theta : \begin{cases} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) & \longrightarrow & \begin{cases} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n) & \longrightarrow & \bar{k}_1 \bar{l}_1 + \dots + \bar{k}_n \bar{l}_n. \end{cases} \end{cases}$$

Alors $\vartheta = \rho \circ \theta$. D'après la première étape, il suffit de montrer que θ est surjectif. On remarque aisément que $(\theta(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -base de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, donc θ est bijectif.

Par suite, $\frac{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}{H^\perp} \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Dernière étape. Montrons que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx H$. Posons $N = d_i d'_i$, pour tout $1 \leq i \leq N$. Tout d'abord, $H = (d_1 f_1) \oplus \dots \oplus (d_n f_n) \approx \mathbb{Z}/d'_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d'_n \mathbb{Z}$. En conséquence :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d'_1 \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(d'_n \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout k divisant N , $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est cyclique d'ordre k . On considère le morphisme suivant :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ \bar{l} & \longrightarrow & \frac{N}{k} \bar{l}. \end{cases}$$

Ce morphisme est bien défini car $\frac{N}{k}$ est d'ordre k dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. De plus, ϕ est d'ordre k dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. De plus, pour tout morphisme $\psi : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\psi(\bar{1})$ est d'ordre divisant k , donc de la forme $\frac{N}{k} \bar{l}$: par suite, $\psi = l\phi$. Donc ϕ engendre $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. \square

3.2 Série formelle de A_k^G

Notations.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les partitions de n seront notées sous la forme $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, avec :
 - (a) $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_l$;
 - (b) $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n$.
2. Soit $\underline{\alpha}$ une partition de n . Alors $\theta_i(\underline{\alpha})$ est le nombre de α_j égaux à i , pour tout $1 \leq i \leq n$.

Remarque. Notons que l dépend de $\underline{\alpha}$. Cependant, pour ne pas alourdir les notations, nous continuerons à noter l plutôt que $l_{\underline{\alpha}}$.

Soit $\sigma \in S_n$ et soit $\underline{\alpha}$ son type. Soient $\omega_1, \dots, \omega_l$ les σ -orbites, indexées de sorte que pour tout j , ω_j soit de cardinal α_j . Posons :

$$\chi_k(\sigma) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \text{Tr} \left(\sigma|_{A_k^H(i_1, \dots, i_k)} \right) h_1^{i_1} \dots h_k^{i_k}.$$

Remarquons que σ agit par permutation sur les monômes de A_k^H . En conséquence, $\chi_k(\sigma)$ est la série formelle des monômes de A_k^H fixés par σ . Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, tout $j \in \{1, \dots, l\}$, posons :

$$x_{i, \omega_j} = \prod_{k \in \omega_j} x_{i, k}.$$

Il s'agit d'un élément de A_k de degré $(0, \dots, \alpha_j, \dots, 0)$. L'ensemble des monômes de A_k fixés par σ est alors :

$$M_k = \left\{ x_{1, \omega_1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k, \omega_l}^{\alpha_{k,l}} / \forall 1 \leq i \leq k, \forall 1 \leq j \leq l, \alpha_{i,j} \in \mathbb{N} \right\}.$$

D'après le lemme 6 et par invariance de H^\perp sous l'action de S_n , un tel monôme est dans A_k^H si, et seulement si,

$$\underbrace{(\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l})}_{\alpha_1} \in H^\perp.$$

Le sous-espace engendré par les monômes de A_k^H fixés par σ est une sous-algèbre notée $(A_k^H)^\sigma$, dont la série formelle est $\chi_k(\sigma)$.

Définition 8 Soit $\underline{\alpha}$ une partition de n . On pose :

1. $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \left\{ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_l) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^l / \underbrace{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_1)}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{(\bar{k}_l, \dots, \bar{k}_l)}_{\alpha_l} \in H^\perp \right\}$.
2. $I_{\underline{\alpha}}(k) = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} / 0 \leq \alpha_{i,j} \leq N-1, (\overline{\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}}, \dots, \overline{\alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l}}) \in H_{\underline{\alpha}}^\perp \right\}$.
3. $P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \sum_{(\alpha_{i,j}) \in I_{\underline{\alpha}}(k)} h_1^{\alpha_1 \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_l \alpha_{1,l}} \dots h_k^{\alpha_1 \alpha_{k,1} + \dots + \alpha_l \alpha_{k,l}}$.

En particulier, $H_{(1, \dots, 1)}^\perp = H^\perp$. On remarque en outre que $I_{\underline{\alpha}}(1)$ est en bijection avec $H_{\underline{\alpha}}^\perp$; plus généralement, $|I_{\underline{\alpha}}(k)| = |H_{\underline{\alpha}}^\perp| N^{(k-1)l}$ (on choisit arbitrairement $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{k-1,1}, \dots, \alpha_{1,l}, \dots, \alpha_{k-1,l}$ et $(\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,l})$ est déterminé par l'appartenance à $H_{\underline{\alpha}}^\perp$).

Alors, en effectuant la division euclidienne des $\alpha_{i,j}$ par N :

$$(A_k^H)^\sigma = \bigoplus_{(\alpha_{i,j}) \in I_{\underline{\alpha}}(k)} \mathbb{C}[x_{1, \omega_1}^N, \dots, x_{k, \omega_l}^N] x_{1, \omega_1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k, \omega_l}^{\alpha_{k,l}}.$$

En prenant la série formelle de cette sous-algèbre de A_k :

$$\chi_k(\sigma) = \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l (1 - h_i^{N\alpha_j})}.$$

Enfin, avec la proposition 2, comme il existe $\frac{n!}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})} \dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})} \theta_1(\underline{\alpha})! \dots \theta_n(\underline{\alpha})!}$ permutations de type $\underline{\alpha}$:

Théorème 9 La série de Poincaré-Hilbert de A_k^G vérifie :

$$R_k^G(h_1, \dots, h_k) = \sum_{\underline{\alpha} \text{ partition de } n} \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k)}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})} \dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})} \theta_1(\underline{\alpha})! \dots \theta_n(\underline{\alpha})!} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \frac{1}{1 - h_i^{N\alpha_j}}.$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 10 *La série de Poincaré-Hilbert de A_k^G vérifie :*

$$\lim_{(h_1, \dots, h_k) \rightarrow (1, \dots, 1)} (1 - h_1)^n \dots (1 - h_k)^n R_k^G(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{|G|}.$$

Preuve. Alors :

$$\begin{aligned} & (1 - h_1)^n \dots (1 - h_k)^n R_k^G(h_1, \dots, h_k) \\ = & \sum_{\underline{\alpha} \text{ partition de } n} \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k)}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})} \dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})} \theta_1(\underline{\alpha})! \dots \theta_n(\underline{\alpha})!} (1 - h_1)^{n-l} \dots (1 - h_k)^{n-l} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \frac{1}{[N\alpha_j]_{h_i}}. \end{aligned}$$

En conséquence, si $\underline{\alpha} \neq (1, \dots, 1)$, alors $l \neq n$ et le terme de la somme correspondant à $\underline{\alpha}$ tend vers 0. Par suite :

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, \dots, h_k) \rightarrow (1, \dots, 1)} (1 - h_1)^n \dots (1 - h_k)^n R_k^G(h_1, \dots, h_k) &= \frac{P_{(1, \dots, 1)}(1, \dots, 1)}{n!} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^n \frac{1}{N} \\ &= \frac{|I_{(1, \dots, 1)}(k)|}{n! N^{kn}} \\ &= \frac{|H_{(1, \dots, 1)}^\perp| N^{(k-1)n}}{n! N^{kn}} \\ &= \frac{|H^\perp|}{n! N^n}. \end{aligned}$$

On conclut avec le lemme 7. \square

Preuve de la proposition 3. D'après le corollaire précédent,

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, \dots, h_k) \rightarrow (1, \dots, 1)} \frac{R_k^G(h_1, \dots, h_k)}{R_1^G(h_1) \dots R_1^G(h_k)} \\ = & \lim_{(h_1, \dots, h_k) \rightarrow (1, \dots, 1)} \frac{(1 - h_1)^n \dots (1 - h_k)^n R_k^G(h_1, \dots, h_k)}{(1 - h_1)^n R_1^G(h_1) \dots (1 - h_k)^n R_1^G(h_k)} \\ = & \frac{1}{|G|} \\ = & \frac{1}{|G|} \cdots \frac{1}{|G|} \\ = & |G|^{k-1}. \square \end{aligned}$$

4 Exemples des séries infinies de groupes de Coxeter

4.1 Groupes symétriques A_{n-1}

On prend $N = 2$ et $H = \{(\bar{0}, \dots, \bar{0})\}$. On obtient ainsi $G = S_n = A_{n-1}$. La représentation associée n'est pas la représentation standard de A_{n-1} , mais la somme directe de la représentation standard W et d'une représentation triviale T de dimension 1, engendrée par $x_1 + \dots + x_n$. En conséquence, pour tout k , $A_k^G = \mathbb{C}[T^{\oplus k}] \otimes \mathbb{C}[W^{\oplus k}]^G$. Par suite, le corollaire 4 est également vrai pour A_{n-1} agissant sur sa représentation standard.

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

- $H^\perp = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.
- Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$.
- Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $I_{\underline{\alpha}} = \{(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} / \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1\}$.

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} \sum_{0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1} h_1^{\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{1,l}} \dots h_k^{\alpha_{k,1} + \dots + \alpha_{k,l}} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} (1 + h_i^{\alpha_j}).$$

Par exemple :

1. Pour $n = 2$ et $k = 2$, $Q_2(h_1, h_2) = h_1 h_2 + 1$.
2. Pour $n = 2$ et $k = 3$, $Q_3(h_1, h_2, h_3) = h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 + 1$.
3. Pour $n = 3$ et $k = 2$, $Q_2(h_1, h_2) = h_1^3 h_2^3 + h_1^2 h_2^2 + h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 + h_1 h_2 + 1$.

4.2 Groupes de réflexions signées B_n

On prend $N = 2$ et $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. On obtient ainsi $G = B_n$. La représentation V est la représentation standard de B_n .

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

- a) $H^\perp = \{(\bar{0}, \dots, \bar{0})\}$.
- b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \{(\bar{0}, \dots, \bar{0})\}$.
- c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} / \begin{array}{l} \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1, \\ \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l} \text{ tous pairs} \end{array} \right\}.$$

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \prod_{j=1}^l \frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i^{\alpha_j}) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i^{\alpha_j})}{2}.$$

Par exemple, pour $n = 2$ et $k = 2$, $Q_2(h_1, h_2) = h_1^4 h_2^4 + h_1^3 h_2^3 + h_1^3 h_2 + 2h_1^2 h_2^2 + h_1 h_2^3 + h_1 h_2 + 1$.

4.3 Groupes de Coxeter D_n

On prend $N = 2$ et $H = \{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n / \bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_n = \bar{0}\}$. On obtient ainsi $G = D_n$. La représentation V est la représentation standard de D_n .

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

- a) $H^\perp = \{(\bar{0}, \dots, \bar{0}), (\bar{1}, \dots, \bar{1})\}$.
- b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \{(\bar{0}, \dots, \bar{0}), (\bar{1}, \dots, \bar{1})\}$.
- c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} / \begin{array}{l} \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1, \\ \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l} \text{ ont même parité} \end{array} \right\}.$$

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \prod_{j=1}^l \frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i^{\alpha_j}) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i^{\alpha_j})}{2} + \prod_{j=1}^l \frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i^{\alpha_j}) - \prod_{i=1}^k (1 - h_i^{\alpha_j})}{2}.$$

4.4 Groupes diédraux $I_2(N)$

On prend $n = 2$, N quelconque et $H = \{(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 / \bar{k}_1 + \bar{k}_2 = \bar{0}\}$. On obtient ainsi le groupe diédral $G = I_N$, d'ordre $2N$. La représentation V est la représentation standard de I_N .

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

- a) $H^\perp = \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$.
- b) $H_{(2)}^\perp = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $H_{(1,1)}^\perp = H^\perp$.
- c) On a :

$$\begin{aligned} I_{(2)}(k) &= \{0, \dots, N-1\}^k, \\ I_{(1,1)}(k) &= \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq 2}} / \begin{array}{l} \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq N-1, \\ \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1} \equiv \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{k,2} \equiv 0[N] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

- d) En conséquence :

$$\begin{aligned} P_{(2)}(h_1, \dots, h_k) &= \prod_{i=1}^k (1 + h_i^2 + \dots + h_i^{2(N-1)}), \\ P_{(1,1)}(h_1, \dots, h_k) &= \sum_{a=0}^{N-1} \left(\frac{\sum_{b=0}^{N-1} \xi^{ab} \prod_{i=1}^k (1 + \xi^b h_i + \dots + \xi^{b(N-1)} h_i^{N-1})}{N} \right)^2, \end{aligned}$$

où ξ est une racine N -ième primitive de l'unité.

Par exemple, pour $N = 4$ et $k = 2$:

$$Q_2(h_1, h_2) = h_1^4 h_2^4 + h_1^3 h_2^3 + h_1^2 h_2^2 + 2h_1^2 h_2^2 + h_1 h_2^3 + h_1 h_2 + 1.$$

4.5 Groupes de réflexions complexes $G(de, e, n)$

Voir par exemple [3] pour une description de ces groupes. On prend ici $N = de$, avec d et $e \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{aligned} H &= \{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n / d(k_1 + \dots + k_n) \equiv 0[N]\} \\ &= \{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n / k_1 + \dots + k_n \equiv 0[e]\}. \end{aligned}$$

Par suite, $|H| = N^{n-1}d$ et donc $|H^\perp| = e$ par le lemme 7. Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

- a) $H^\perp = \langle (\bar{d}, \dots, \bar{d}) \rangle$.
- b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \langle (\bar{d}, \dots, \bar{d}) \rangle \subseteq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^l$.
- c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} / \begin{array}{l} \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1, \exists \lambda \in \mathbb{Z}, \\ \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1} \equiv \dots \equiv \alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l} \equiv \lambda d[N] \end{array} \right\}.$$

- d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \sum_{\lambda=0}^{e-1} \prod_{j=1}^l \frac{\sum_{a=0}^{e-1} \xi^{a\lambda} \prod_{i=1}^k (1 + \xi^a h_i^{\alpha_j})}{e},$$

où ξ est une racine e -ième primitive de l'unité.

4.6 Un autre exemple, une représentation de G_2

On prend maintenant $N = 2$, $n = 3$ et $H = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})\}$. On obtient le produit direct $G = H \times S_3$, isomorphe au groupe diédral $I_2(6)$, ou encore au groupe de Weyl G_2 . Cependant, la représentation V n'est pas la représentation standard de G_2 . On obtient facilement que :

$$H^\perp = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})\}.$$

Par suite :

a) $H_{(3)}^\perp = \{\bar{0}\}$ et :

$$I_{(3)}(k) = \left\{ (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} / \begin{array}{l} \forall i, 0 \leq \alpha_i \leq 1, \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \text{ est pair} \end{array} \right\};$$

$$P_{(3)}(h_1, \dots, h_k) = \frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i^3) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i^3)}{2}.$$

b) $H_{(1,2)}^\perp = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$ et :

$$I_{(1,2)}(k) = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq 2}} / \begin{array}{l} \forall i, j, 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1, \\ \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1} \text{ est pair} \end{array} \right\};$$

$$P_{(1,2)}(h_1, \dots, h_k) = \frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i)}{2} \prod_{i=1}^k (1 + h_i^2).$$

c) $H_{(1,1,1)}^\perp = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})\}$ et :

$$P_{(1,1,1)}(h_1, \dots, h_k) = \left(\frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i)}{2} \right)^3$$

$$+ 3 \left(\frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i) + \prod_{i=1}^k (1 - h_i)}{2} \right) \left(\frac{\prod_{i=1}^k (1 + h_i) - \prod_{i=1}^k (1 - h_i)}{2} \right)^2.$$

On vérifie directement que, pour $k = 2$, $Q_2(h_1, h_2)$ est de la forme :

$$Q_2(h_1, h_2) = \frac{(1 + h_1 h_2)(h_1^6 h_2^6 + \dots)}{(h_1^4 + 1)(h_2^4 + 1)}.$$

Ce n'est pas un polynôme. Donc, dans cet exemple, $\mathbb{C}[V \oplus V]^G$ n'est pas un module libre sur $\mathbb{C}[V]^G \otimes \mathbb{C}[V]^G$.

Références

- [1] Jacques Alev and Loïc Foissy, *Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient $h+h^*/W$ en rang 2*, Comm. Algebra (à paraître), math/06 03142.

- [2] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1337, Hermann, Paris, 1968.
- [3] Meinolf Geck and Gunter Malle, *Reflection Groups. A Contribution to the Handbook of Algebra*, math/03 11012, 2003.
- [4] Iain Gordon, *On the quotient ring by diagonal invariants*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 503–518.
- [5] Mark D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, J. Algebraic Combin. **1** (1994), no. 3, 17–76.
- [6] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] Larry Smith, *Polynomial invariants of finite groups*, Research Notes in Mathematics, no. 6, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.