



HAL
open science

Sur la stabilité des vagues de gravité de fortes cambrures aux perturbations sous-harmoniques

Hubert Branger, Alfred Ramamonjisoa, Christian Kharif

► **To cite this version:**

Hubert Branger, Alfred Ramamonjisoa, Christian Kharif. Sur la stabilité des vagues de gravité de fortes cambrures aux perturbations sous-harmoniques. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1986, 5, pp.525-550. hal-00192502

HAL Id: hal-00192502

<https://hal.science/hal-00192502>

Submitted on 23 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Sur la stabilité des vagues de gravité de fortes cambrures aux perturbations sous-harmoniques

On the subharmonic instability of very steep deep water gravity waves

par

H. BRANGER, A. RAMAMONJIARISOA et C. KHARIF*

RÉSUMÉ. — Par l'utilisation d'un algorithme de calcul très performant deux nouveaux résultats sur la stabilité des ondes de gravité de fortes cambrures, en eau profonde, a de petites perturbations sont obtenus. Le premier résultat est l'existence d'une famille d'instabilités de fréquence non nulle ayant des taux d'amplification très élevés : les ondes de gravité de très fortes cambrures sont donc instables non seulement aux perturbations de fréquence nulle, mais aussi à celles de fréquence non nulle. Le second résultat est que le domaine des instabilités du type Benjamin-Feir a été étendu jusqu'à des cambrures recouvrant la zone des instabilités à taux d'amplification très élevé : il n'existe donc pas de valeur de la cambrure pour laquelle les perturbations sont stables.

ABSTRACT. — Two new results on the stability of gravity waves in deep water to infinitesimal, two-dimensional perturbations are obtained by using a very efficient algorithm. The first is that it exists a family of rapidly growing instabilities not phase locked to the basic wave. This means that very steep waves are unstable to not only zero frequency perturbations but also to perturbations of non zero frequency. The second result is that the steepness' range of the slower growing Benjamin-Feir instability is increased such that it overlaps the fast growing instability range. Thus all deep water waves are unstable to some type of perturbation.

I. Introduction

La connaissance de la dynamique des vagues de fortes cambrures présente actuellement un grand intérêt. Elle devrait permettre en particulier de mieux comprendre les mécanismes conduisant au déferlement ainsi que les transformations d'échelle qui se produisent au sein des trains de vagues et qui sont couramment observées dans la réalité.

* Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence, 12, avenue du Général-Leclerc, 13003 Marseille.

D'importants travaux sur les vagues non linéaires ont été effectués ces dernières années par l'introduction de nouvelles méthodes de calcul (Schwartz [1], Longuet-Higgins [2], McLean [3], ...). Ils ont conduit à des nouveaux résultats fondamentaux. McLean [3] a mis en évidence l'existence de deux types d'instabilités des ondes de gravité en eau profonde. Une catégorie est principalement dominée par les perturbations bidimensionnelles alors que l'autre est principalement dominée par les perturbations tridimensionnelles. Ces dernières devenant dominantes quand la cambrure ak (a l'amplitude et k le nombre d'onde) est supérieure à environ 0,30. Cependant pour des cambrures supérieures à $ak = 0,40$ les instabilités bidimensionnelles à taux d'amplification très élevé apparaissent. McLean [3] a comparé les taux d'amplification des perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles jusqu'à la cambrure $ak \simeq 0,41$. Dans le domaine des cambrures comprises entre $ak \simeq 0,30$ et $ak \simeq 0,41$ les instabilités dominantes sont tridimensionnelles. Au-delà de cette valeur aucune comparaison n'est encore possible. En examinant la figure 1 où est porté le taux d'amplification maximal des perturbations en fonction de la cambrure, une extrapolation de la courbe donnant le maximum d'instabilité des perturbations tridimensionnelles permet de penser qu'au-delà de $ak = 0,41$ les instabilités bidimensionnelles deviennent aussi importantes que les instabilités tridimensionnelles. Il serait intéressant d'étendre les calculs de McLean [3] aux cambrures supérieures à $ak = 0,41$ afin de pouvoir se prononcer sur la prépondérance d'un type d'instabilité sur l'autre.

Rappelons les principaux résultats mis en évidence dans le cas bidimensionnel par les études antérieures citées précédemment. Il existe des perturbations sous-harmoniques (longueur d'onde supérieure à celle de l'onde de base) instables avec des taux d'amplification faibles dans le domaine des cambrures comprises entre $ak = 0$ et $ak = 0,346$. Au-delà de cette dernière valeur il était admis que les perturbations devenaient stables. Au voisinage de $ak = 0,41$ un nouveau type d'instabilité apparaît avec des taux d'amplification très élevés.

Un examen attentif des travaux précédents nous a conduit à effectuer des calculs supplémentaires pour étendre, si possible, les résultats sur la stabilité sous-harmonique des ondes de gravité bidimensionnelles lorsque la cambrure devient très élevée ($ak > 0,40$). Afin d'améliorer la précision des calculs numériques comparativement à ceux des études précédentes, nous avons utilisé l' ε -algorithme développé par Wynn [4] et plus tard par Brezinsky [5]. Cette méthode d'accélération de la convergence, particulièrement bien adaptée à ce type de problème, a été utilisée par Kharif et Roux [6] pour traiter de la stabilité superharmonique des ondes de gravité de forte cambrure.

II. Formulation du problème mathématique et méthode de résolution

On considère un écoulement à surface libre, irrotationnel, instationnaire et bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux. Le champ des vitesses dérive alors d'un potentiel scalaire φ . Soit $f(x, y, t) = 0$.

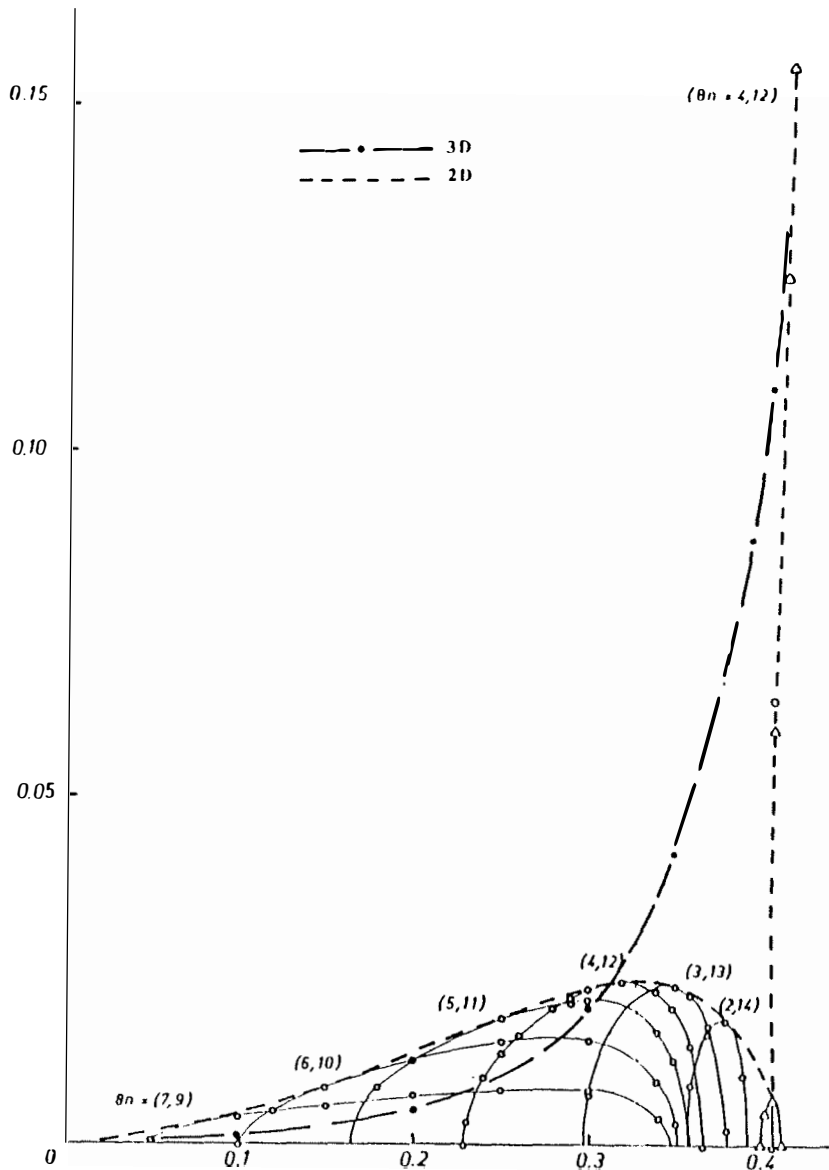


Fig. 1. — Taux d'amplification maximal des perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée.

Fig. 1. — Maximum growth rate of bi-dimensional and three-dimensional perturbations as a function of unperturbed wave steepness ak .

L'équation de la surface libre. Sur cette surface on a la condition cinématique :

$$(1) \quad \frac{Df}{Dt} = 0$$

et la condition dynamique :

$$(2) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\psi + \varphi_t = \beta(t),$$

où p est la pression, ρ la masse volumique, g l'accélération de la pesanteur et $\beta(t)$ une fonction arbitraire de la variable temps. La difficulté de résolution du système précédent réside dans la non linéarité des conditions (1) et (2).

Les calculs sont réduits de façon notable si on choisit comme variables indépendantes φ , ψ et t où ψ représente la fonction de courant. Ce choix permet d'écrire très simplement l'équation de la surface libre non perturbée, $\psi=0$. L'équation de la surface libre perturbée s'écrivant $\psi = F(\varphi, t)$.

L'écoulement est supposé être la superposition d'un écoulement de base (non perturbé) associé à une onde symétrique de cambrure finie et de célérité c , en eau profonde, et d'un écoulement de perturbation.

Dans un repère de référence se déplaçant à la vitesse c , l'écoulement de base est stationnaire et la surface libre est donnée par $\psi=0$. L'état instationnaire peut être représenté par :

$$(3) \quad x(\varphi, \psi, t) = X(\varphi, \psi) + \xi(\varphi, \psi, t),$$

$$(4) \quad y(\varphi, \psi, t) = Y(\varphi, \psi) + \eta(\varphi, \psi, t),$$

où X et Y sont les coordonnées de la surface libre non perturbée. Les quantités ξ , η et $\psi = F(\varphi, t)$ sont d'ordre ε par rapport aux dimensions de l'écoulement non perturbé.

Les coordonnées de l'écoulement de base $X(\varphi, \psi)$ et $Y(\varphi, \psi)$ satisfont l'équation de Laplace et la condition dynamique à la surface libre (2).

Une onde symétrique stationnaire en eau profonde peut être représentée par

$$(5) \quad X = \frac{\varphi}{c} + \sum_{j=1}^{\infty} H_j e^{j(\psi/c)} \sin\left(j \frac{\varphi}{c}\right),$$

$$(6) \quad Y = \frac{\psi}{c} + \frac{1}{2} H_0 + \sum_{j=1}^{\infty} H_j e^{j(\psi/c)} \cos\left(j \frac{\varphi}{c}\right),$$

c , H_0 , H_1 , H_2 , ... sont des coefficients à déterminer. La méthode de résolution utilisée pour la détermination des coefficients est identique à celle employée par Kharif et Roux [6].

On recherchera des perturbations de la forme :

$$\xi(\varphi, \psi, t) = \exp(-i\sigma t) \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(j \frac{\psi}{c}\right) \left[a_j \cos\left(j \frac{\varphi}{c}\right) + b_j \sin\left(j \frac{\varphi}{c}\right) \right],$$

$$\eta(\varphi, \psi, t) = \exp(-i\sigma t) \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(j \frac{\psi}{c}\right) \left[b_j \cos\left(j \frac{\varphi}{c}\right) - a_j \sin\left(j \frac{\varphi}{c}\right) \right],$$

$$F(\varphi, t) = \exp(-i\sigma t) \sum_{j=0}^{\infty} \left[c_j \cos\left(j \frac{\varphi}{c}\right) + d_j \sin\left(j \frac{\varphi}{c}\right) \right].$$

La stabilité de ces perturbations est liée à la valeur de la partie imaginaire, $\text{Im}(\sigma)$, du complexe σ . Suivant que $\text{Im}(\sigma)$ est positif, nul ou négatif, le mode correspondant est respectivement instable, marginalement stable ou stable. En limitant les séries représentant les perturbations à l'ordre N et en les portant dans les équations des conditions à la surface libre, ces dernières s'écrivent :

$$-i\sigma A x = B x,$$

où A et B sont des matrices ne dépendant que des coefficients de l'onde de base et x un vecteur représentant les perturbations.

$$x = (a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots, c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots).$$

Les valeurs propres $-i\sigma$ sont déterminées en écrivant :

$$|-i\sigma A - B| = 0.$$

Si elles convergent quand $N \rightarrow \infty$, les racines de cette équation donnent la fréquence et le taux d'amplification des perturbations.

Les équations (5) et (6) représentent une onde de longueur d'onde égale à 2π . Les expressions donnant les perturbations représentent des phénomènes périodiques de longueur d'onde inférieure ou égale à 2π , c'est-à-dire superharmoniques. Longuet-Higgins [2] a montré comment on pouvait se ramener à l'étude des perturbations sous-harmoniques en réduisant par un facteur m l'amplitude et la longueur de l'onde de base. Ainsi l'onde base à m longueurs d'onde dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Les expressions donnant les perturbations sont inchangées. Le calcul des valeurs propres, $-i\sigma$, et des vecteurs propres correspondants est alors similaire à celui traitant des perturbations superharmoniques.

Pour une valeur donnée de la cambrure ak , les valeurs propres sont obtenues en résolvant, pour des valeurs croissantes de l'ordre de troncature N , $(m/2-1)$ problèmes aux valeurs propres généralisés d'ordre $8N$.

Pour les valeurs élevées de la cambrure, le recours à des algorithmes d'accélération de la convergence s'avère indispensable pour déterminer précisément les séries donnant l'onde de base et les valeurs limites des suites des valeurs propres.

Les travaux antérieurs sur la stabilité des ondes de gravité faits séparément par Longuet-Higgins [2] et McLean [3] sont respectivement limités, pour l'un aux cambrures $ak=0,42$ dans le cas $m=2$ et $ak=0,40$ dans le cas $m=8$, et pour l'autre à la cambrure $ak=0,41$.

Afin d'étendre l'étude des perturbations sous harmoniques au-delà des valeurs citées précédemment, l'ordre de troncature a été porté jusqu'à $N=57$ et l' ε -algorithme a été utilisé pour accélérer les séries et les suites des valeurs propres. Kharif et Roux [6] ont obtenu la convergence jusqu'à $ak=0,43$ avec $N=55$, montrant que la coalescence des deux premiers modes apparaissait pour une valeur de la cambrure inférieure à celle

TABLEAU I

Cambrure	mode $8n = (6, 10)$				mode $8n = (2, 14)$			
	branche supérieure		branche inférieure		branche supérieure		branche inférieure	
ak	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)
.34	.0976	.0103	.0976	.0130	.2459	.0000	.2896	.0000
.35	.0876	.0039	.0876	.0039	.2479	.0000	.2746	.0000
.355	.0920	.0000	.0798	.0000	.2511	.0000	.2644	.0000
.36	.0938	.0000	.0740	.0000	.2553	.008	.2553	.008
.37	.0960	.0000	.0633	.0000	.2455	.0160	.2455	.0160
.375	.0964	.0000	.0580	.0000	.2408	.017	.2408	.017
.38	.0972	.0000	.0515	.0000	.2353	.0176	.2353	.0176
.39	.0985	.0000	.0365	.0000	.2227	.0108	.2227	.0108
.395	.0985	.0000	.0271	.0000	.2271	.0000	.2025	.0000
.40	.0986	.0000	.015	.0000	.2303	.0000	.1802	.0000
.4025	.0987	.0000	.0070	.0000	.2312	.0000	.1674	.0000
.405	.0988	.0000	.0024	.0000	.2318	.0000	.1531	.0000
.4075	.0991	.0000	.014	.0000	.2322	.0000	.136	.0000
.41	.0992	.0000	.033	.0000	.2325	.0000	.111	.0000
.4125	.0993	.0000	.0698	.028	.2328	.0000	.0698	.028
.415	.0989	.0000	.0667	.056	.2329	.0000	.0667	.056
.42	.098	.0000	.0593	.96	.2330	.0000	.0593	.096
.425	.095	.0000	.050	.13	.2328	.0000	.050	.13
.43	.09	.0000	.037	.2	.232	.0000	.037	.2

Cambrure	mode $8n = (5, 11)$				mode $8n = (3, 13)$			
	branche supérieure		branche inférieure		branche supérieure		branche inférieure	
ak	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)
.34	.1374	.0164	.1374	.0164	.2285	.0228	.2285	.0228
.35	.1330	.0120	.1330	.0120	.2224	.0225	.2224	.0225
.355	.1306	.0082	.1303	.0082	.2191	.0222	.2191	.0222
.36	.1337	.0000	.1221	.0000	.2155	.0214	.2155	.0214
.365	.1376	.0000	.1123	.0000	.2115	.0197	.2115	.0197
.375	.1408	.0000	.0956	.0000	.2025	.0118	.2025	.0118
.38	.1418	.0000	.0867	.0000	.2063	.0000	.1885	.0000
.39	.1431	.0000	.0650	.0000	.2129	.0000	.1557	.0000
.40	.1440	.0000	.0318	.0000	.2152	.0000	.1143	.0000
.4025	.1443	.0000	.0181	.0000	.2155	.0000	.0986	.0000
.405	.1446	.0000	.001	.0000	.2158	.0000	.0767	.0000
.40625	.1447	.0000	.019	.0000	.2159	.0000	.0588	.0000
.4075	.1448	.0000	.0379	.025	.2164	.0000	.0379	.025
.41	.1449	.0000	.0366	.054	.2166	.0000	.0366	.054
.42	.145	.0000	.0303	.119	.217	.0000	.0303	.119
.425	.143	.0000	.0258	.15	.215	.0000	.0258	.15
.43	.14	.0000	.020	.2	.215	.0000	.020	.2

TABLEAU I(suite)

Cambrure	mode $8n = (7,9)$				mode $8n = (1,15)$			
	branche supérieure		branche inférieure		branche supérieure		branche inférieure	
ak	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)
.34	.0448	.0039	.0448	.0039	.2230	.0000	.3633	.0000
.35	.0462	.0000	.0400	.0000	.2227	.0000	.3502	.0000
.36	.0479	.0000	.0345	.0000	.2225	.0000	.3356	.0000
.37	.0488	.0000	.0292	.0000	.2222	.0000	.3188	.0000
.375	.0491	.0000	.0263	.0000	.2221	.0000	.3091	.0000
.38	.0495	.0000	.0231	.0000	.2220	.0000	.2990	.0000
.39	.0498	.0000	.0157	.0000	.2221	.0000	.2746	.0000
.40	.0501	.0000	.0053	.0000	.2242	.0000	.2411	.0000
.4025	.050	.0000	.0021	.0000	.2278	.0049	.2278	.0049
.405	.050	.0000	.002	.0000	.2225	.0089	.2225	.0089
.4075	.050	.0000	.007	.0000	.2165	.0087	.2165	.0087
.41	.050	.0000	.013	.0000	.2136	.0000	.2062	.0000
.415	.049	.0000	.029	.0000	.2177	.0000	.166	.0000
.42	.046	.0000	.085	.02	.2184	.0000	.085	.02
.425	.04	.0000	.068	.09	.2183	.0000	.068	.09
.43	-----	-----	.045	.1	.218	.0000	.045	.1

Cambrure	mode $8n = (4,12)$			
	branche supérieure		branche inférieure	
ak	Re(σ)	Im(σ)	Re(σ)	Im(σ)
.35	.1784	.0195	.1784	.0195
.36	.1722	.0142	.1722	.0142
.365	.1687	.0083	.1687	.0083
.3675	.1699	.0000	.1637	.0000
.37	.1748	.0000	.1548	.0000
.38	.1804	.0000	.1309	.0000
.39	.1828	.0000	.1044	.0000
.40	.1841	.0000	.0625	.0000
.4048	.1846	.0000	.0115	.0000
.4049	.1846	.0000	.0071	.0000
.40496	.1846	.0000	.0000	.0000
.41	.1852	.0000	.0000	.067
.42	.186	.0000	.0000	.125
.425	.184	.0000	.0000	.155
.43	.182	.0000	.0000	.19

correspondant au maximum de vitesse de phase. Utilisant le même algorithme pour les perturbations sous-harmoniques dans le cas $m=8$, nous avons atteint la convergence jusqu'à $ak=0,425$ et parfois $ak=0,43$ pour certaines valeurs propres.

Dans un premier temps, les calculs ont été faits sur IBM 3081, puis sur un CRAY 1S/1000. L'utilisation de ce calculateur vectoriel diminua les temps de calculs par un facteur supérieur à vingt pour les valeurs élevées de N. La précision fut aussi améliorée : la double précision CRAY est équivalente à la quadruple précision IBM. Dans le tableau I figurent, en fonction de la cambrure, les fréquences des modes, $Re(\sigma)$ et leur taux d'amplification, $Im(\sigma)$, avec le nombre de chiffres significatifs correspondants.

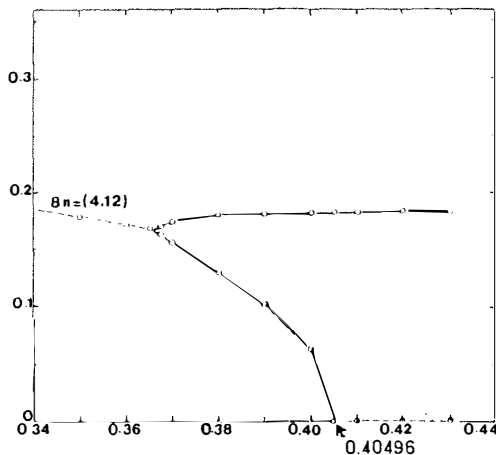


Fig. 2. — Partie réelle de la valeur propre complexe σ du mode $8n=(4,12)$ en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée. Les lignes continues correspondent aux modes neutralement stables. Les lignes discontinues correspondent aux modes instables.

Fig. 2. — Real part of the complex eigenvalue σ of the mode $8n=(4,12)$ as a function of the unperturbed wave steepness ak . Solid lines correspond to neutrally stable modes. Dotted line correspond to unstable mode.

III. Résultats

Les résultats présentés correspondent au cas $m=8$ pour des cambrures supérieures à $ak=0,34$. Les solutions sont normalisées relativement à l'onde non perturbée (la longueur d'onde de base est 2π). Le facteur de normalisation est m^{-1} pour les valeurs propres, m pour les vecteurs propres et $m^{1/2}$ pour la vitesse de phase.

La figure 2 confirme le résultat de Longuet-Higgins [2], à savoir que la branche $8n=(4,12)$ fusionne avec l'axe $\sigma=0$. Le mode $8n=(4,12)$ correspond à la fusion des modes $8n=4$ et $8n=12$. Ces modes ont, à faible cambrure, des longueurs d'onde égales respectivement au double et au deux tiers de la longueur de base 2π . Chen et Saffman [7] ont suggéré que le point de stabilité neutre ainsi défini correspond à une bifurcation $2 \rightarrow 1$ de l'onde de base. Très récemment Longuet-Higgins [8] montra analytiquement que la condition de bifurcation de l'onde de base et l'existence de modes normaux de fréquence limite nulle étaient similaires. Avec la présente méthode numérique, la convergence des valeurs propres est très lente près de ce point. Cependant, en augmentant l'ordre de la troncature à $N=60$, il est possible d'obtenir des valeurs précises jusqu'à $ak=0,4049$. Ensuite, une extrapolation linéaire du carré de la fréquence, conduit à la valeur critique $ak=0,40496$ de la cambrure pour laquelle la fréquence est nulle. Cette valeur est très proche de celle donnée par Longuet-Higgins [9]. Cette coalescence correspond à une instabilité ayant un taux d'amplification élevé.

Un résultat nouveau est illustré sur la figure 3 : la fréquence correspondant à la branche inférieure de la paire $8n=(6,10)$ décroît vers zéro, atteint cette valeur et ensuite croît pour donner naissance à une branche qui fusionne avec la branche inférieure de la

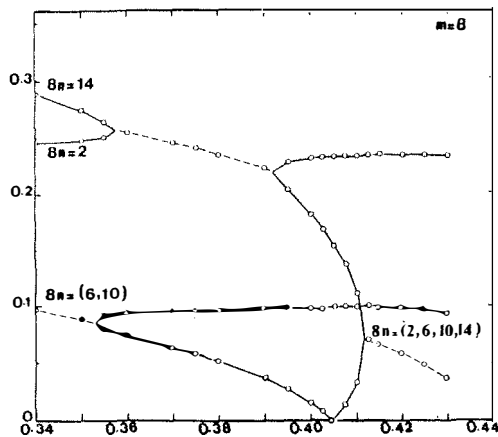


Fig. 3. — Partie réelle de la valeur propre complexe σ des modes $8n=(2,14)$ et $8n=(6,10)$ en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée.

Fig. 3. — Real part of the complex eigenvalue σ of the modes $8n=(2,14)$ and $8n=(6,10)$ as a function of the unperturbed wave steepness ak .

paire $8n=(2,14)$. Comme on le montrera, cette nouvelle coalescence correspond à une instabilité qui croît aussi rapidement que celle citée précédemment. De manière similaire, comme le montrent les figures 4 et 5, les branches inférieures des paires $8n=(5,11)$ et $8n=(7,9)$ décroissent également vers zéro, atteignent cette valeur et ensuite fusionnent avec les branches inférieures respectivement des paires $8n=(3,13)$ et $8n=(1,15)$. Des instabilités du même type apparaissent.

Les taux d'amplification de ces perturbations instables sont donnés par la figure 6. Comme nous l'avons dit antérieurement, les taux d'amplification de ces nouveaux modes instables sont du même ordre de grandeur que celui correspondant à la fusion de la paire $8n=(4,12)$ avec le mode $8n=8$. La figure 5 contient en plus de nouvelles informations concernant la coalescence des modes $1/8$ et $15/8$. Les deux branches correspondantes de cette paire de modes ne se croisent pas. Elles fusionnent et le mode résultant est instable sur un domaine de cette cambrure ak . Comme le montre la figure 6, le taux d'amplification correspondant reste faible.

Les frontières entre les domaines neutralement stable et instable peuvent maintenant être tracées. Elles sont portées sur la figure 7. Le nouveau domaine d'instabilité apparaît clairement. A cause de l'existence d'un domaine de cambrures où le mode $8n=(1,15)$ est instable, la façon dont les deux branches, correspondant aux instabilités faibles, se rejoignent, est encore mal définie. Cependant la forme portée sur la figure doit être très proche de la réalité.

Le résultat important est que la zone d'instabilité faible couvre le domaine des cambrures s'étendant de la valeur $ak=0$ à $ak=0,41$ alors que la zone de fortes instabilités démarre à $ak=0,405$: il n'existe pas de zone où toutes les perturbations sont neutralement

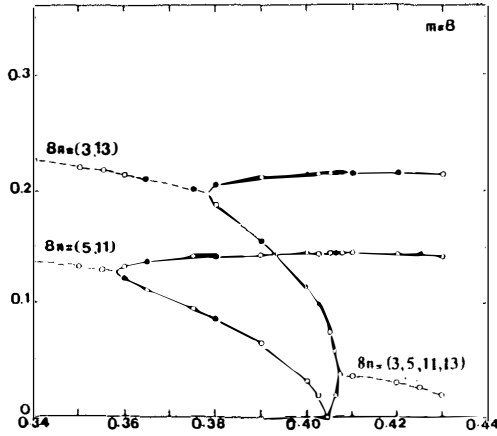


Fig. 4. — Partie réelle de la valeur propre complexe σ des modes $8n=(3,13)$ et $8n=(5,11)$ en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée.

Fig. 4. — Real part of the complex eigenvalue σ of the modes $8n=(3,13)$ and $8n=(5,11)$ as a function of the unperturbed wave steepness ak .

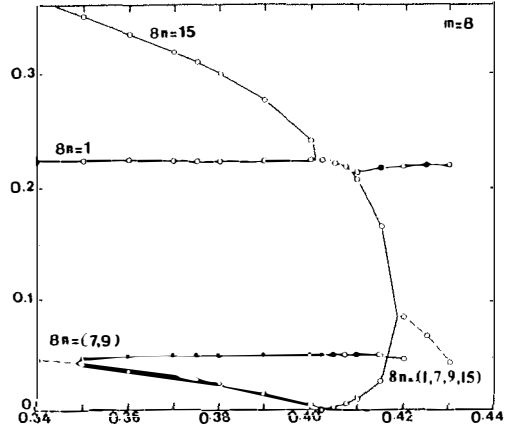


Fig. 5. — Partie réelle de la valeur propre complexe σ des modes $8n=(1,15)$ et $8n=(7,9)$ en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée.

Fig. 5. — Real part of the complex eigenvalue σ of the modes $8n=(1,15)$ and $8n=(7,9)$ as a function of the unperturbed wave steepness ak .

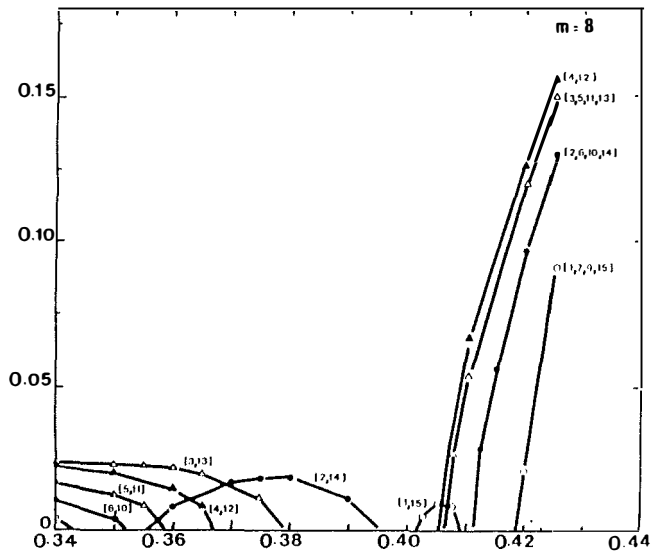


Fig. 6. — Taux d'amplification des perturbations sous-harmoniques en fonction de la cambrure ak de l'onde non perturbée.

Fig. 6. — Growth rates of the subharmonic perturbations as a function of the unperturbed wave steepness ak .

stables dans le domaine des cambrures comprises entre $ak=0$ et $ak=0,43$. Au-delà de cette dernière valeur, le problème reste ouvert. Cependant, la cambrure étant très proche de sa valeur maximale, il serait surprenant de découvrir une zone stable.

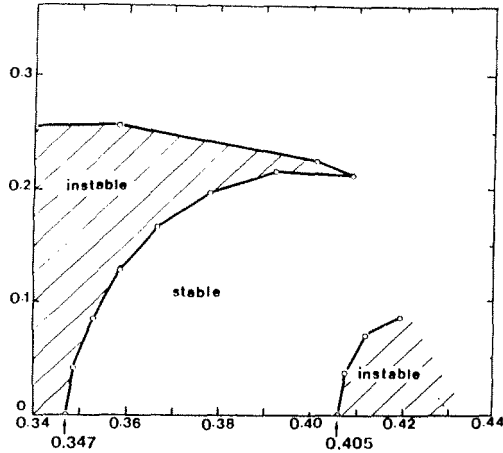


Fig. 7. — Diagramme de stabilité des ondes de gravité de fortes cambrures en eau profonde.

Fig. 7. — Stability diagram for very steep gravity waves in deep water.

IV. Discussion et conclusion

Notre but était d'étendre le calcul des instabilités sous-harmoniques des ondes de gravité en eau profonde à des cambrures élevées proches de la valeur maximale correspondant au déferlement. En appliquant l' ε -algorithme à différentes étapes avec un ordre de troncature N supérieur et en utilisant un CRAY 1, nous avons porté les calculs jusqu'à la cambrure $ak = 0,43$. Le résultat principal est l'existence d'une nouvelle zone d'instabilité avec des taux d'amplification très élevés qui apparaissent près de $ak = 0,405$. Nous avons également montré que sur le domaine défini par $0 < ak < 0,43$ il n'y a pas de zone stable puisqu'il n'existe pas de valeur de ak pour laquelle tous les modes normaux sont stables ou neutralement stables.

Les modes instables qui apparaissent au-delà de la valeur $ak = 0,405$ ne sont généralement pas en phase avec l'onde de base. Il existe une similitude frappante entre les résultats numériques et les suggestions faites par Saffman ([10], fig. 1) au sujet du comportement des courbes de fréquence.

L'aspect modulationnel des perturbations apparaît sur les figures 8 (b), 9 (b) et 10 (b) qui montrent le profil des ondes perturbées.

Les profils des ondes de base et des perturbations sont également tracés à la même échelle. L'aspect modulationnel de ces perturbations apparaît clairement. Certaines crêtes sont augmentées, d'autres sont diminuées. Puisque la cambrure de l'onde de base est très proche de la valeur théorique $ak = 0,4434$ et que les perturbations sont très instables, les crêtes les plus grandes devraient atteindre rapidement l'onde théorique la plus élevée. Notons que les vecteurs propres ne sont pas aussi précisément calculés que les valeurs propres. Seules les suites de valeurs propres sont soumises à l'accélération de la convergence. Les coordonnées des points portés sont donc déterminées à un ordre de troncature donné des séries de l'onde de base sans utilisation de l' ε -algorithme. Comme conséquence

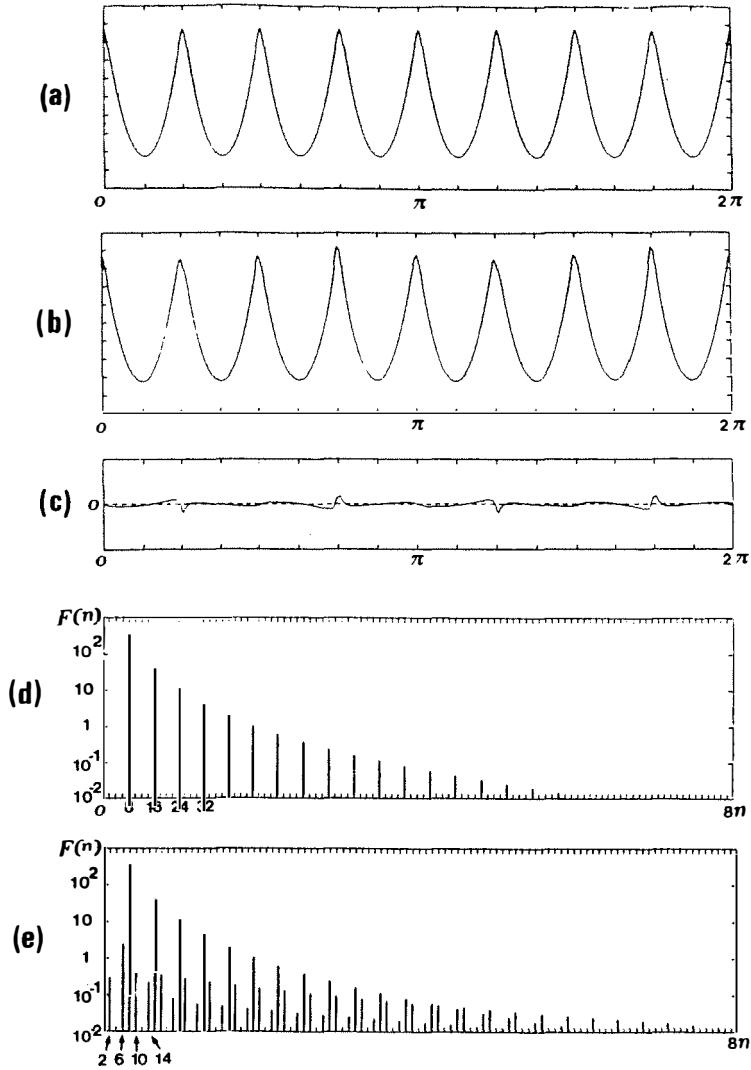


Fig. 8. — Profils et spectres de l'onde non perturbée [(a) et (d)] et de l'onde perturbée [(b) et (e)] correspondants au mode instable $8n=(2, 6, 10, 14)$ pour $ak=0,415$; (c) représente la perturbation.

Fig. 8. — Surface profiles and spectra of the unperturbed waves [(a) and (d)] and perturbed waves [(b) and (e)] corresponding to the unstable mode $8n=(2, 6, 10, 14)$ when $ak=0.415$; (c) represents the perturbation.

de ce manque de précision, certaines discontinuités apparaissent au voisinage des crêtes des ondes de cambrures les plus élevées : elles n'ont aucune signification physique.

De manière à mieux caractériser ces nouveaux modes instables, une analyse spectrale des profils perturbés et non perturbés a été réalisée. Les spectres sont données respectivement par les figures 8(d), 9(d), 10(d) et 8(e), 9(e), 10(e). Le spectre de l'onde de base présente des pics aux fréquences $8n=8, 16, 24, 32, \dots$ qui correspondent au mode

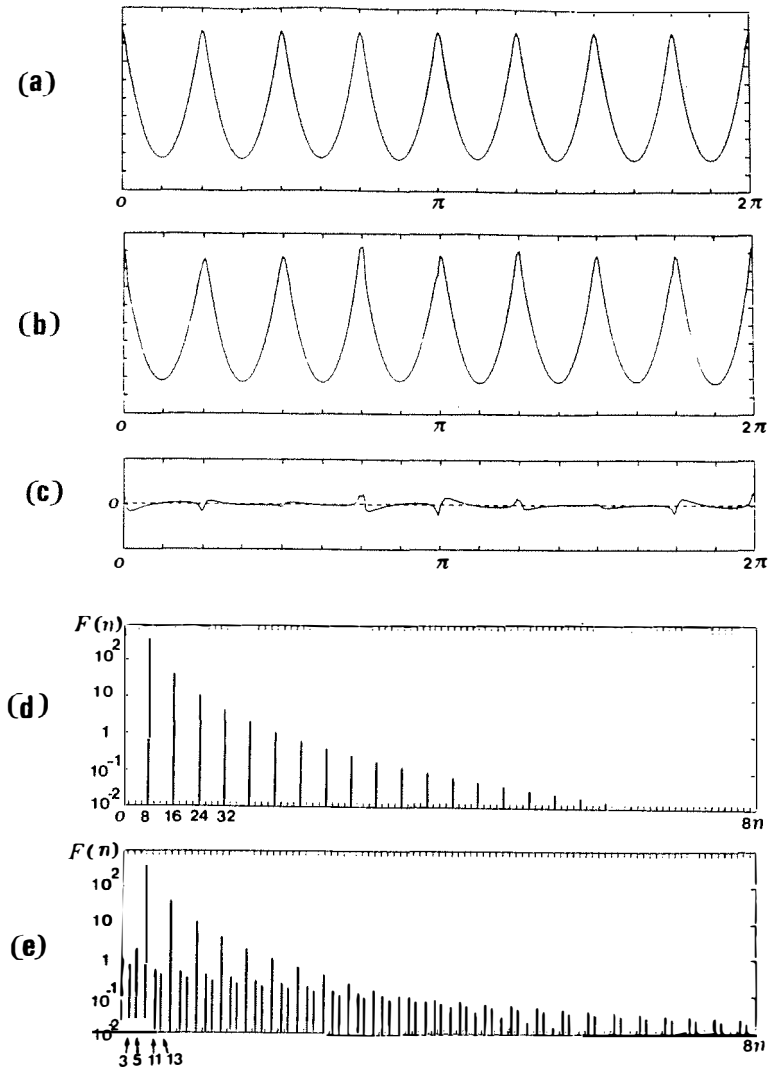


Fig. 9. — Similaire a la figure 8 mais pour le mode instable $8n=(3, 5, 11, 13)$ lorsque $ak=0,420$.

Fig. 9. — As in figure 8 but for the unstable mode $8n=(3, 5, 11, 13)$ when $ak=0.420$.

fondamental et à ses harmoniques. Les spectres des trains d'ondes perturbés comportent des pics supplémentaires qui sont la signature des perturbations. Les quatre premiers pics supplémentaires caractérisent le mode de perturbation. En effet, les pics $8n=2, 6, 10, 14$; $8n=3, 5, 11, 13$ et $8n=1, 7, 9, 15$ représentés successivement par les figures 8(e), 9(e) et 10(e) sont les quatre premiers pics respectivement des modes instables $8n=(2, 6, 10, 14)$; $8n=(3, 5, 11, 13)$ et $8n=(1, 7, 9, 15)$.

Ces spectres analytiques montrent une similitude avec les spectres expérimentaux donnés par Ramamonjarisoa et Mollo-Christensen [11] et Melville [12] correspondant à

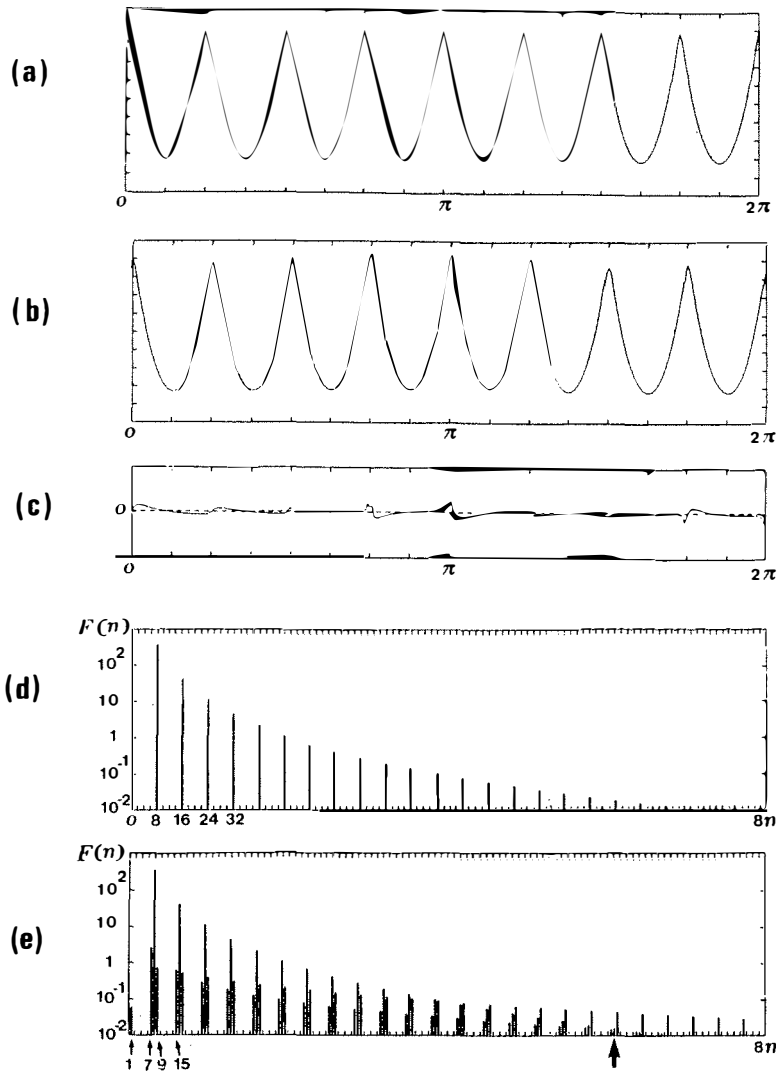


Fig. 10. — Similaire à la figure 8 mais pour le mode instable $8n=(1, 7, 9, 15)$ lorsque $ak=0,425$.

Fig. 10. — As in figure 8 but for the unstable mode $8n=(1, 7, 9, 15)$ when $ak=0.425$.

des trains d'onde proche du déferlement. En particulier on observe une dissymétrie entre les amplitudes des deux pics encadrant le pic du mode fondamental. Le pic de gauche, de plus petit nombre d'onde, est plus important que le pic de droite, de plus grand nombre d'onde.

Les auteurs cités précédemment ont établi un lien entre ce phénomène et les instabilités modulationnelles des ondes proches du déferlement. Les présents résultats montrent à l'évidence l'existence de telles instabilités.

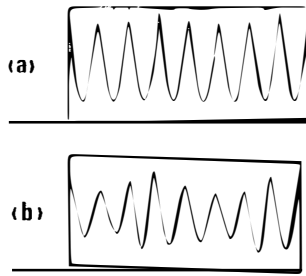


Fig. 11. — Comparaison entre le profil perturbé calculé (a) correspondant au mode $8n=(2, 6, 10, 14)$ lorsque $ak=0.415$ et le profil observé (b) (Viguier [13]).

Fig. 11. — Comparison between calculated perturbed surface profile (a) corresponding to the mode $8n=(2, 6, 10, 14)$ when $ak=0.415$ and observed profile (b) (Viguier [13]).

Comme le montre la figure 11, la similitude est frappante entre les profils de vague calculés numériquement et les profils expérimentaux donnés par Viguier [13]. Sur la figure, le profil calculé correspond au mode $8n=(2, 6, 10, 14)$ pour une cambrure de l'onde de base $ak=0,415$. Le profil tiré du mémoire de Viguier [13] correspond à la même valeur. Dans de nombreuses circonstances, le champ des vagues à la surface de l'océan atteint l'état conduisant au déferlement. Pour ces raisons, les résultats fournis par cette étude devraient être d'un intérêt pratique. Une comparaison avec des expériences bien contrôlées est nécessaire avant de conclure sur la validité du modèle analytique. De telles comparaisons sont actuellement en cours à l'I.M.S.T. La plupart des études faites jusqu'à présent sur la stabilité des ondes de gravité concernaient des écoulements bidimensionnels en absence de vent. Une extension de ces travaux, libre de cette restriction, devrait être considérée.

Alors que cet article était en cours d'examen pour publication dans le présent journal, un article de Longuet-Higgins [14] traitant en partie du même sujet est apparu. Cet auteur fait référence au rapport [15] qui a servi de base à notre manuscrit. A quelques différences près sur les valeurs numériques, peu significatives du point de vue physique, les résultats s'accordent. Les deux articles diffèrent cependant sur les autres contenus : celui de Longuet-Higgins s'attache à des phénomènes de bifurcation alors que notre article s'étend sur l'estimation des fonctions propres et leurs représentations harmoniques, ainsi que sur des comparaisons avec des observations.

Ce travail a été réalisé grâce au support financier de la Direction des Recherches, Études et Techniques (D.R.E.T.) dans le cadre du Contrat D.R.E.T./I.M.S.T. n° 83/366. Les calculs ont été effectués sur le CRAY 1S/1000 du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche (C.C.V.R.).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SCHWARTZ L. W., *Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves* (*J. Fluid Mech.*, vol. 62, part 3, 1974, p. 553-578).

- [2] LONGUET-HIGGINS M. S., *The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics* (*Proc. R. Soc. London, A*, vol. 360, 1978, p. 489-505).
- [3] MAC LEAN J. W., *Instabilities of finite-amplitude water waves* (*J. Fluid Mech.*, vol. 114, 1982, p. 315-330).
- [4] WYNN P., *On a device for computing the $e_m(Sm)$ transformation* (*M.T.A.C.*, vol. 10, 1956, p. 91-96).
- [5] BREZINSKY C., *Algorithmes d'accélération de la convergence. Étude numérique. Collection Langes et Algorithmes de l'Informatique*, Technip, Paris, 1978.
- [6] KHARIF C., ROUX B., *Stabilité des ondes de gravité de fortes cambrures* (*J.M.T.A.*, vol. 3, n° 5, 1984, p. 717-723).
- [7] CHEN B. et SAFFMAN P. G., *Numerical evidence for the existence of new types of gravity waves of permanent form on deep water* (*Stud. Appl. Math.*, vol. 62, 1980, p. 1-21).
- [8] LONGUET-HIGGINS M. S., *On the stability of steep gravity waves* (*Proc. R. Soc. London, A*, vol. 396, 1984, p. 269-280).
- [9] LONGUET-HIGGINS M. S., *Bifurcation in gravity waves* (*J. Fluid Mech.*, vol. 151, 1985, p. 457-475).
- [10] SAFFMAN P. G., *Long wavelength bifurcation of gravity waves on deep water* (*J. Fluid Mech.*, vol. 101, 1980, p. 567-581).
- [11] RAMAMONJIARISOA A. et MOLLO-CHRISTENSEN E., *Modulation characteristics of sea surface wave* (*J. Geophys. Res.*, vol. 84, n° C12, 1979, p. 7769-7775).
- [12] MELVILLE W. K., *The instability and breaking of deep-water waves* (*J. Fluid Mech.*, vol. 115, 1982, p. 165-185).
- [13] VIGUIER P., *Étude de la stabilité des ondes de gravité. Mémoire de D.E.A.*, Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence, Marseille, 1983.
- [14] LONGUET-HIGGINS M. S., *Bifurcation and instability in gravity waves.* (*Proc. Roy. Soc. London, A*, vol. 403, 1986, p. 167-187).
- [15] BRANGER H., RAMAMONJIARISOA A. et KHARIF C., *On the subharmonic instability of very steep deep water gravity waves.* Rep. Inst. Mech. Stat. Turb. Marseille, October 1984 (11 pages).