HAL
open science

Ergodicité, collage et transport anomal

Xavier Leoncini, Cristel Chandre, Ouerdia Ourrad

▶ **To cite this version:**

Xavier Leoncini, Cristel Chandre, Ouerdia Ourrad. Ergodicité, collage et transport anomal. Comptes Rendus Mécanique, 2008, 336, pp.530-535. 10.1016/j.CRME.2008.02.006 . hal-00187190v2

HAL Id: hal-00187190

https://hal.science/hal-00187190v2

Submitted on 16 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00187190, version 2 - 16 May 2008

Ergodicité, collage et transport anomal

Xavier Leoncini [a] Cristel Chandre [a] Ouerdia Ourrad [b]

[a] *Centre de Physique Théorique, UMR 6207, Aix-Marseille Universités, Luminy, Case 907 F-13288 Marseilles cedex 9, France*

[b] *Laboratoire de Physique Théorique, Université A. Mira - Targa Ouzemour 06000, Bejaia, Algerie*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par £££££

Résumé

Nous nous intéressons à la convergence vers sa moyenne spatiale ergodique de la moyenne temporelle d'une observable d'un flow hamiltonien à un degré et demi de liberté avec espace des phases mixte. L'analyse est faite au travers de l'évolution de la distribution des moyennes en temps fini d'un ensemble de conditions initiales sur la même composante ergodique. Un exposant caractérisant la vitesse de convergence est défini. Les résultats indiquent que pour le système considéré la convergence évolue en t^{α}, avec $\alpha = 0.45$ pour alors qu'elle évolue en $t^{1/2}$ lorsque la dynamique est globalement chaotique dans l'espace des phases. De même une loi $\alpha = 1 - \beta/2$ reliant cet exposant α à l'exposant caractéristique du deuxième moment associé aux propriétés de transport β est proposée et est vérifiée pour les cas considérés. *Pour citer cet article : A. Nom1, A. Nom2, C. R. Mecanique 333 (2005).*

Abstract

Ergodicity, stickiness and anomalous transport We consider the problem of convergence towards spatial ergodic average of the time average of an observable defined for a one and half degree of freedom Hamiltonian flow with mixed phase space. The analysis is performed by analysing the evolution of the distribution of finite-time averages. An exponent characterising the "speed of convergence" is defined. Results indicate that for the considered mixed case, the rate of convergence goes as t^{α}, with $\alpha = 0.45$ while it goes as $t^{1/2}$ when the full phase space is chaotic. Moreover a formula linking this characteristic exponent to the one corresponding to transport properties β is proposed $\alpha = 1 - \beta/2$ and good agreement is found for the considered cases. *To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Mecanique 333 (2005).*

Key words: Dynamical Systems ; Hamiltonian Chaos ; Anomalous Transport

Mots-clés : Systèmes Dynamiques; Chaos Hamiltonien; Transport Anomal

Email addresses: `Xavier.Leoncini@cpt.univ-mrs.fr` (Xavier Leoncini), `Cristel.Chandre@cpt.univ-mrs.fr` (Cristel Chandre), `omeziani@yahoo.fr` (Ouerdia Ourrad).

Abridged English version In this note we consider the problem of convergence to the ergodic average of an observable of a one and a half degree of freedom Hamiltonian flow, and its connection to transport properties. The considered observable is the norm of the speed ($\dot{p}$, $\dot{q}$) defined in phase space, and the transport properties of the associated variable, namely the length in phase space of trajectories.

Assuming ergodicity we conclude that the infinite time limit distribution of time averaged speeds (1), is a Dirac. Then when supposing that we have a very chaotic system of Anosov type, we can expect from the central limit theorem that the finite time average distribution has a maximum peak which grows to infinity as $t^{1/2}$. We consider this last property of the height of the maximum of the probability distribution function of finite-time averages for a system with mixed phase space and use it to define a characteristic exponent α, expecting an algebraic growth as t^{α}.

In order to link this exponent to transport properties we make the crude approximation of neglecting the tails (described in Fig .1) to link the exponent β characterising the second moment of transport properties with α and obtain the law $\alpha = 1 - \beta/2$, which should be valid for Gaussian transport.

We then test the ideas numerically with the simple pertubed pendulum (4) for two different values of the parameters, one giving us more or less uniform chaos in a given region of phase space, the other one presenting a chaotic sea within which regular islands are present (see Fig. 2). Numerical results are made using the fifth order optimal symplectic scheme described in [3], using 1024 different initial conditions. Trajectories are computed for 10^6 periods with a time step $\delta t = T/200$. Histograms have been computed with a resolution of 5000 bins. The evolution of the averaged speed distribution and the evolution of the maximum in log-log plot are represented in Fig. 3. One typically see that for both cases, the exponent α can be determined. We find $\alpha = 1/2$ for the chaotic case while $\alpha = 0.43$ for the mixed case. More over we compute the transport properties for both system and compare the measured β's with the ones expected from Eq. (3). Results are presented in table 1, and a good agreement is found with the extrapolated exponents form the $\alpha = 1 - \beta/2$ rule.

1. Introduction

Dans cette note nous considérons un flot hamiltonien à un degré et demi de liberté $H(p, q, t)$ et périodique dans le temps et nous nous intéressons à la convergence de la moyenne temporelle d'une observable, la norme de la vitesse dans l'espace des phases. Plus précisément nous considérons l'évolution de la distribution des moyennes temporelles d'un ensemble de différentes conditions initiales et étudions les propriétés d'ergodicité du système[1]. Pour une condition initiale donnée i, la vitesse moyenne au bout de n périodes s'écrit :

$$\bar{v}_i(n) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \sqrt{\dot{q}_i^2 + \dot{p}_i^2} dt \,. \tag{1}$$

On considère alors un ensemble de conditions initiales que l'on suppose équivalentes. Ainsi si la dynamique est ergodique chaque $\bar{v}_i(n)$ va tendre vers la moyenne spatiale quand $n \to \infty$, et donc la distribution des $\bar{v}_i(n)$ pour l'ensemble des conditions initiales équivalentes tendra vers une distribution de Dirac. L'objet de ce travail est d'étudier comment cette distribution est approchée (si elle existe) et de définir un exposant caractéristique. Nous considérons dans un premier temps un cas "idéal" d'un système Hamiltonien globalement chaotique pour lequel les résultats observés sont conformes au théorème de la limite centrale, pour considérer ensuite un système où l'espace des phases est mixte, c'est-à-dire un système pour lequel

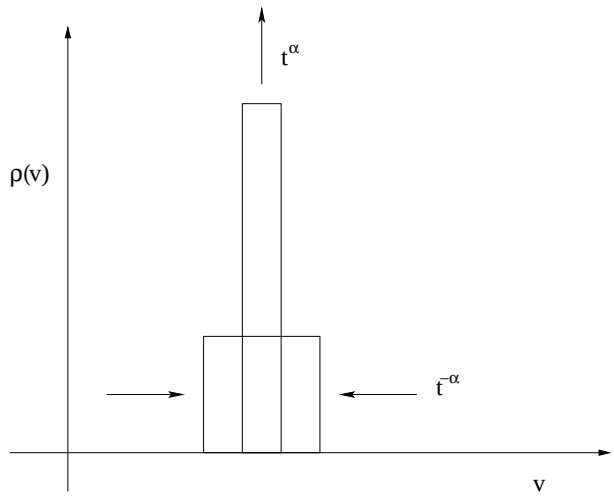

FIG. 1. Estimation de la relation entre l'écart type et le maximum d'une distribution

nous avons une mer chaotique peuplée d'îlots de stabilité au sein desquels la dynamique est régulière. Pour ce dernier système nous considérons uniquement des conditions initiales dans la mer chaotique.

2. Définitions

Nous nous proposons de définir un exposant caractéristique à partir des considérations suivantes. Tout d'abord imaginons un système chaotique, de type Anosov, tel que l'on puisse appliquer le théorème de la limite centrale. Dans ce cas la variable $y_i(n) = \sqrt{n}\bar{v}_i(n)$ pour n grand va se comporter comme une variable aléatoire distribuée sur une gaussienne d'écart type fini. Savoir comment la distribution converge vers la distribution limite est l'objet de la théorie des grandes déviations mais cette propriété de convergence ergodique implique que la distribution des $\bar{v}_i(n)$ va tendre vers un Dirac (une gaussienne d'écart type nul). De même on peut anticiper que l'écart type de cette distribution va décroître en $1/\sqrt{n}$ et que par conservation des aires (la probabilité totale est conservée) le maximum de la distribution $\rho_{max}(n)$ va croître en $\sqrt{n}$[2]. Cette dernière propriété permet de définir un exposant

$$\rho_{max}(n) \sim n^{\alpha} \tag{2}$$

(avec $\alpha = 1/2$), que nous pouvons à priori généraliser pour des systèmes moins chaotiques avec la possibilité d'avoir $\alpha \neq 1/2$.

Intéressons nous maintenant aux propriétés de transport du système de type Anosov, en mesurant la longueur des trajectoires dans l'espace des phases, et donc à l'évolution de la distribution des variables $s_i(n) = \sqrt{n}Ty_i(n)$. Par les mêmes considérations que celles faites précédemment nous attendons un comportement diffusif avec une croissance linéaire de la variance. Maintenant considérons un système où le transport est anomal comme par exemple un système hamiltonien à un degré et demi de liberté [4]. Le transport est dit anomal, dans le sens où la variance $M_2 = \langle (s_i(n) - \langle s_i(n) \rangle)^2 \rangle \sim n^{\beta}$ a un comportement non-linéaire. Cette anomalie fait suite aux effets de mémoires engendrés par le phénomène de collage autour d'îlots de stabilité [5,4] qui engendrent une décroissance en loi de puissance des queues de la distribution de $s_i(n)$. Dans ce cas en faisant le même type de raisonnement que celui illustré sur la figure 1, un raisonnement négligeant la contribution des queues de distribution et en utilisant la proportionalité $\bar{v}_i(n)$=$s_i(n)/nT$, nous obtenons

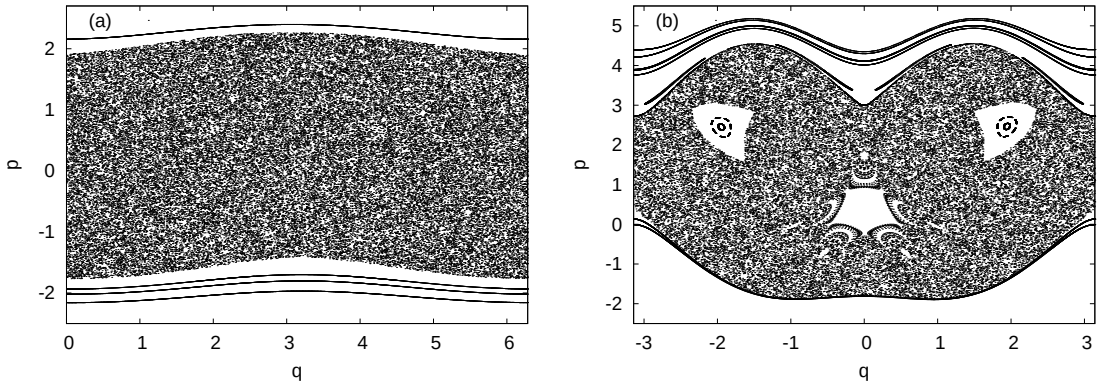

FIG. 2. Section de Poincaré du hamiltonien (4) pour les paramètres suivants : (a) $\nu = 0.5$, $k = 1$, $\varepsilon = 1$ et (b) $\nu = 5$, $k = 2$, $\varepsilon = 1$.

$$\alpha = 1 - \beta/2 \,. \tag{3}$$

Ainsi on qualifiera (par abus de langage) le transport de diffusif si $\alpha = 1/2$, mais aussi on pourra anticiper un comportement anomal avec $\alpha < 1/2$ si le transport est superdiffusif et $\alpha > 1/2$ si il est sous-diffusif. De même la condition de convergence ergodique $\alpha \geq 0$ implique dans le cadre où la loi (3) s'applique $\beta \leq 2$.

3. Résultats

Afin de tester les idées et définitions énoncées auparavant nous considérons le système hamiltonien du pendule perturbé, qui est également le hamiltonien décrivant l'évolution d'une particule chargée évoluant dans le potentiel créé par deux ondes "électrostatiques" dans le référentiel lié à l'une d'elle [6,7,8] :

$$H = \frac{p^2}{2m} + A\left(\cos(k_1 q) + \varepsilon \cos(k_2 q - \omega t + \varphi)\right) \,, \tag{4}$$

où le couple (p, q) désigne les variables conjuguées du hamiltonien. Dans la suite et sans perte de généralité nous prendrons $m = A = k_1 = 1$,$\varphi = 0$ et notons $k_2 = k$ et considérerons les deux cas (a) $\nu = 0.5$, $k = 1$, $\varepsilon = 1$ et (b) $\nu = 5$, $k = 2$, $\varepsilon = 1$. Nous pouvons noter que sur les différentes sections de Poincaré représentées en Fig. 2 que le cas (a) correspond à une zone chaotique étendue délimitée par des tores de rotation réguliers de type KAM, tandis que pour le cas (b) la zone chaotique est peuplée d'îlots au sein desquels des trajectoires régulières sont présentes.

Nous suivons alors l'évolution de la distribution des $\bar{v}_i(n)$, pour cela nous considérons un ensemble de conditions initiales prises dans la mer chaotique. L'évolution vers un Dirac de cette distribution pour les cas (a) et (b) et l'évolution du maximum de la distribution sont représentées sur la figure 3. A la différence du cas (a) nous notons la présence de pics secondaires dans la distribution pour le cas (b). Ces pics s'expliquent par le phénomène de collage autour des îlots [4]. Ce phénomène n'est quasiment pas observé pour presque toutes les conditions initiales dans le cas (a) (une trajectoire se met à coller sur le tore supérieur après 10^5 périodes). Numériquement, nous avons intégré la dynamique en utilisant le schéma symplectique d'ordre cinq optimal décrit dans [3]. Nous avons considéré un ensemble de 1024 trajectoires différentes que nous avons calculées pendant 10^6 périodes avec un pas de temps $\delta t = T/200$.

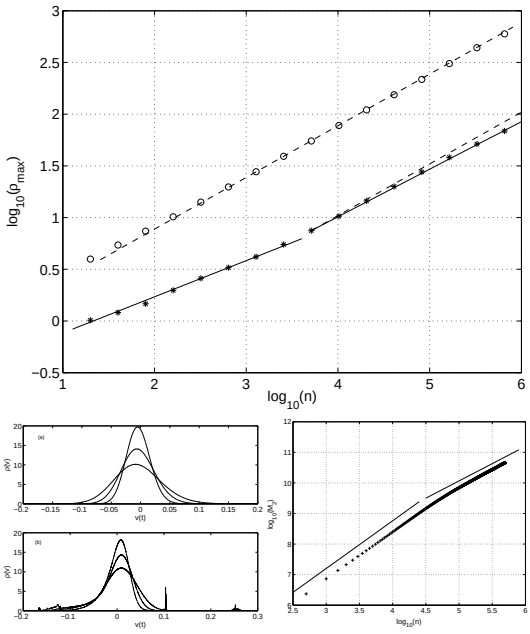

FIG. 3. Haut : Évolution du maximum de la distribution des vitesses moyennes $\rho_{max}(n)$ en fonction du nombre de périodes pour les deux cas considérés. L'exposant α caractérisant la "convergence vers l'ergodicité" $\rho_{max}(n) \sim n^{\alpha}$ est mesuré à $\alpha \approx 0.5^{-}$ pour le cas (a) et pour le cas (b) on note deux pentes $\alpha \approx 0.35$ pour $n < 2.5\ 10^3$ et $\alpha \approx 0.45$ pour $2.5\ 10^3 < n < 6.5\ 10^5$, les lignes en pointillé ont une pente 1/2. Bas : A gauche, densité de probabilité des vitesses moyennes pour les cas (a) et (b) pour différents temps ($\tau = 160$, 320, et 640 périodes). Les distributions ont été calculées avec une résolution de 5000 points à partir de 1024 trajectoires calculées pendant 10^6 périodes. Le pas de temps est $\delta t = T/200$. A droite, évolution du second moment de la distribution des longueurs parcourues M_2, les pentes mesurées sont $\beta = 1.55$ puis $\beta = 1.13$ aux temps longs.

	(a)	(b)
α	0.5	0.45
β	1	1.13
$1-\beta/2$	0.5	0.44

TAB. 1
Récapitulatif des exposants observés.

Nous pouvons noter vu les résultats présentés sur la Fig. 3 que la caractérisation de l'exposant α est relativement aisée, les lois étant assez linéaires sur plusieurs ordres de grandeurs. De même la mesure de l'exposant caractéristique du transport associé à s_i, calculé pour les presque toutes 1023 trajectoires pour le cas (a) et toutes les trajectoires dans le cas (b) (voir tableau 1) montre que la loi approximative reliant les deux exposants est bien vérifiée pour les temps long, alors qu'elle ne l'est pas pour des temps courts dans le cas ou l'espace des phases est mixte.

Dans cette note nous avons défini un exposant caractéristique lié à la convergence vers la moyenne ergodique d'une observable. Pour les cas considérés, la connaissance de cet exposant permet de prédire la nature du transport et ce même pour un cas où l'espace des phases est mixte. Du point de vue du transport anomal nous pensons que cette approche est complémentaire de celle liée à la notion de jets chaotiques [9] et de $\varepsilon-$complexité [10].

Remerciements X. L. tient à remercier Bastien Fernandez et Ricardo Lima, pour leurs nombreuses remarques, conseils et corrections lors de l'élaboration de ce manuscrit.
Ce travail s'inscrit au sein du contrat LRC DSM-06-35.

Références

[1] P. Collet. *A short Ergodic Theory Refresher*, volume 182 of *NATO Science Series*, pages 1–14. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2005.

[2] J-R. Chazottes. *Entropie Relative, Dynamique Symbolique et Turbulence.* PhD thesis, Université de Provence, 1999.

[3] R.I. McLachlan and P. Atela. The accuracy of symplectic integrators. *Nonlinearity*, 5 :541, 1992.

[4] X. Leoncini, L. Kuznetsov, and G. M. Zaslavsky. Chaotic advection near a 3-vortex collapse. *Phys. Rev. E*, 63(3) :036224, 2001.

[5] G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Phys. Rep.*, 371 :641, 2002.

[6] G. M. Zaslavsky and N. N. Filonenko. Stochastic instability of trapped particles and conditions of applicability of the quasi-linear approximation. *Soviet Physics JETP*, 25 :851, 1968.

[7] D. F. Escande. Stochasticity in classical hamiltonian systems : universal aspects. *Phys. Rep.*, 121, 1985.

[8] C. Chandre and H. R. Jauslin. Renormalization-group analysis for the transition to chaos in hamiltonian systems. *Phys. Rep.*, 365 :1–64, July 2002.

[9] Xavier Leoncini and George M. Zaslavsky. Chaotic jets. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 8 :265–271, 2003.

[10] V. Afraimovich and G. M. Zaslavsky. Space-time complexity in hamiltonian dynamics. *CHAOS*, 13(2) :519, 2003.