



**HAL**  
open science

## Comparaison de deux méthodes d'identification non entière

Stéphane Victor, Rachid R. Malti, Alain Oustaloup

► **To cite this version:**

Stéphane Victor, Rachid R. Malti, Alain Oustaloup. Comparaison de deux méthodes d'identification non entière. Journées Doctorales - Journées Nationales MACS, Jul 2007, France. pp.1-6. hal-00182383

**HAL Id: hal-00182383**

**<https://hal.science/hal-00182383>**

Submitted on 25 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaison de deux méthodes d'identification non entière

Stéphane VICTOR, Rachid MALTI et Alain OUSTALOUP

IMS UMR 5218 CNRS, Département LAPS – Université Bordeaux I – ENSEIRB – ENSCPB  
 351, cours de la Libération – F 33405 Talence cedex – France  
 Tél : +33 (0)5 4000 3709 – Fax : +33 (0)5 4000 6644  
 {stephane.victor, rachid.malti, alain.oustaloup}@laps.ims-bordeaux.fr  
 http://www.ims-bordeaux.fr

*Résumé* — Deux méthodes d'identification non entière, basées sur la définition de Grünwald de la dérivée non entière, sont comparées dans cet article. La première, minimisant l'erreur de prédiction à un pas, est plus délicate à mettre en œuvre. La seconde est plus facile à mettre en œuvre car elle est basée sur la différenciation directe des signaux d'entrée et de sortie. D'un point de vue mise en œuvre, la principale différence entre les deux méthodes réside donc dans la prise en compte ou non du dernier échantillon de la sortie.

*Mots-clés* — Identification, système non entier, définition de Grünwald, modèle ARX, ARX généralisé.

## I. INTRODUCTION

Sous la forme la plus générale, un modèle non entier monovarié peut être défini par une équation différentielle caractérisée par des ordres de dérivation réels, entiers ou non entiers, soit :

$$a_0 \mathbf{D}^{n_{a0}} y(t) + a_1 \mathbf{D}^{n_{a1}} y(t) + \dots + a_L \mathbf{D}^{n_{aL}} y(t) = b_0 \mathbf{D}^{n_{b0}} u(t) + \dots + b_M \mathbf{D}^{n_{bM}} u(t). \quad (1)$$

Pour des raisons évidentes d'identifiabilité et sans aucune perte de généralité,  $a_0$  est fixé à 1 et  $n_{a0}$  à 0, tout au long de l'article. Par ailleurs, les ordres de dérivation sont supposés connus ou fixés selon une connaissance *a priori* et seuls les coefficients  $a_l$  et  $b_m$  de l'équation différentielle :

$$y(t) + a_1 \mathbf{D}^{n_{a1}} y(t) + \dots + a_L \mathbf{D}^{n_{aL}} y(t) = b_0 \mathbf{D}^{n_{b0}} u(t) + \dots + b_M \mathbf{D}^{n_{bM}} u(t) \quad (2)$$

sont estimés.

## II. MÉTHODE INDIRECTE DE LE LAY

La méthode d'estimation indirecte de L. Le Lay et de B. Mathieu [1], [2], [3] a été initialement développée à partir de l'équation différentielle (1), tout en imposant une contrainte sur les coefficients  $a_l$ , rendant l'identifiabilité des  $a_l$  et  $b_m$  possible. La présentation de cette méthode est simplifiée dans cet article, en fixant d'emblée  $a_0$  à 1 et  $n_{a0}$  à 0 sans aucune perte de généralité.

Conformément à la méthode indirecte de Le Lay, l'estimation paramétrique se décompose en quatre parties bien distinctes : dans un premier temps, l'équation (2) est discrétisée ; puis un changement de variables du modèle discret est effectué ; les nouveaux paramètres sont estimés par moindres carrés linéaires ; et enfin, les paramètres initiaux

(coefficients  $a_l$  et  $b_m$ ) sont calculés à partir de l'inversion du changement de variables.

### A. Modèle discret

La discrétisation de l'équation (2) s'effectue en remplaçant les dérivées continues par une approximation discrète issue de la définition de Grünwald :

$$\mathbf{D}^n f(Kh) \approx \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n}{k} f((K-k)h), \quad (3)$$

où  $h$  correspond à la période d'échantillonnage.

Le modèle discret ainsi obtenu s'écrit sous la forme :

$$y(Kh) + \sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_l}}{k} u((K-k)h). \quad (4)$$

Ce modèle est de dimension croissante avec le temps  $t = Kh$ , car la dérivée non entière d'un signal dépend de tout son passé (d'où la somme sur  $k$ ). Lorsque le nombre de données est important, la somme est souvent tronquée et les paramètres estimés sur une fenêtre réduite.

La sortie du modèle à l'instant  $Kh$  (prédicteur à un pas) s'exprime en fonction des entrées et des sorties passées en isolant tous les termes  $y(Kh)$ , correspondant à  $k = 0$  de (3), ce qui permet d'obtenir :

$$y(Kh) = - \frac{\sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h)}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}} + \frac{\sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_l}}{k} u((K-k)h)}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}}, \quad (5)$$

équation qui peut aussi s'écrire, en rajoutant et en retran-

chant le terme  $\frac{y(Kh)}{h^{n_{a_l}}}$  :

$$y(Kh) = - \sum_{l=1}^L \frac{a_l}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}} \left( \mathbf{D}^{n_{a_l}} y(t)|_{t=Kh} - \frac{y(Kh)}{h^{n_{a_l}}} \right) + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}} (\mathbf{D}^{n_{b_m}} u(t)|_{t=Kh}). \quad (6)$$

### B. Changement de variable

Les changements de variable :

$$a'_l = \frac{a_l}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}} \quad \text{où} \quad 1 \leq l \leq L, \quad (7)$$

$$b'_m = \frac{b_m}{1 + \sum_{j=1}^L \frac{a_j}{h^{n_{a_j}}}} \quad \text{où} \quad 0 \leq m \leq M, \quad (8)$$

$$Y_l((K-1)h) = \mathbf{D}^{n_{a_l}} y(t)|_{t=Kh} - \frac{y(Kh)}{h^{n_{a_l}}}, \quad (9)$$

et

$$U_m(Kh) = \mathbf{D}^{n_{b_m}} u(t)|_{t=Kh}, \quad (10)$$

permettent de réécrire (6) sous une forme linéaire par rapport aux coefficients  $a'_l$  et  $b'_m$  :

$$y(Kh) = - \sum_{l=1}^L a'_l Y_l((K-1)h) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(Kh), \quad (11)$$

soit sous la forme matricielle :

$$y(Kh, \theta') = \varphi(Kh) \theta'^T, \quad (12)$$

avec  $\theta' = [a'_1 \dots a'_L \ b'_0 \dots b'_M]$  et  $\varphi(Kh)$  le vecteur de régression défini par :

$$\varphi(Kh) = [-Y_1((K-1)h) \ \dots \ -Y_L((K-1)h) \ U_0(Kh) \ \dots \ U_M(Kh)]. \quad (13)$$

### C. Estimation paramétrique du modèle discret

Le modèle typique considéré est de type ARX généralisé donné par l'équation différentielle suivante :

$$y(t) + \sum_{l=1}^L a_l \mathbf{D}^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m \mathbf{D}^{n_{b_m}} u(t) + e(t), \quad (14)$$

avec  $n_{a_l}, n_{b_m} \in \mathbb{R}$  et  $e(t)$  représentant un bruit stochastique.

Compte tenu de (6) ou (11), la sortie discrétisée du modèle ARX généralisé s'écrit :

$$y(Kh) = - \sum_{l=1}^L a'_l Y_l((K-1)h) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(Kh) + e'(Kh), \quad (15)$$

où

$$e'(Kh) = \frac{e(Kh)}{1 + \sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad (16)$$

représente le nouveau terme de bruit.

Compte tenu de (15), l'estimée de la sortie du modèle linéaire s'exprime en fonction du vecteur de paramètres modifiés  $\hat{\theta} = [\hat{a}'_1 \dots \hat{a}'_L \ \hat{b}'_0 \dots \hat{b}'_M]^T$  :

$$\hat{y}(Kh, \hat{\theta}) = - \sum_{l=1}^L \hat{a}'_l Y_l((K-1)h) + \sum_{m=0}^M \hat{b}'_m U_m(Kh). \quad (17)$$

L'écriture de l'équation (17) pour  $N+1$  points de mesures entre  $Kh$  et  $(K+N)h$  conduit à la régression linéaire suivante :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\hat{\theta}) = \Phi \hat{\theta}^T, \quad (18)$$

avec

$$\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}(Kh) \dots \hat{y}((K+N)h)]^T \quad (19)$$

et

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Y_1((K-1)h) & \dots & -Y_L((K-1)h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -Y_1((K+N-1)h) & \dots & -Y_L((K+N-1)h) \\ U_0(Kh) & \dots & U_M(Kh) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_0((K+N)h) & \dots & U_M((K+N)h) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

L'erreur de prédiction s'écrit :

$$\varepsilon(kh) = y(kh) - \hat{y}(kh). \quad (21)$$

L'estimée optimale du vecteur des paramètres,

$$\hat{\theta}'_{opt} = \operatorname{argmin}(J_N(\hat{\theta})), \quad (22)$$

minimisant le critère quadratique de l'erreur de prédiction,

$$J_N(\hat{\theta}) = \mathbf{E}_N^T \mathbf{E}_N \quad (23)$$

où  $\mathbf{E}_N^T = [\varepsilon(Kh) \dots \varepsilon((K+N)h)]$ , est donnée par les moindres carrés :

$$\hat{\theta}'_{opt} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{Y}. \quad (24)$$

### D. Retour aux coefficients de l'équation différentielle

Le retour aux coefficients  $a_l$  du modèle continu se fait par la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} (a'_1 h^{-n_{a_1}} - 1) & a'_1 h^{-n_{a_2}} & \dots & a'_1 h^{-n_{a_L}} \\ a'_2 h^{-n_{a_1}} & (a'_2 h^{-n_{a_2}} - 1) & \dots & a'_2 h^{-n_{a_L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_L h^{-n_{a_1}} & a'_L h^{-n_{a_2}} & \dots & (a'_L h^{-n_{a_L}} - 1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a'_1 \\ -a'_2 \\ \vdots \\ -a'_L \end{bmatrix}, \quad (25)$$

les coefficients  $b_m$  s'expriment alors directement par :

$$b_m = b'_m \left( 1 + \sum_{l=1}^L a_l h^{-n_{a_l}} \right). \quad (26)$$

### E. Estimateur de la variable instrumentale

L'estimateur de la variable instrumentale, variante classique de la méthode des moindres carrés, consiste à introduire un vecteur  $\varphi_{iv}(Kh)$ , tel que ses composantes soient suffisamment corrélées avec les composantes du vecteur de régression  $\varphi(Kh)$  et totalement décorréliées du bruit. Il en découle [4] :

$$\begin{cases} E\{\varphi_{iv}(Kh)\varphi^T(Kh)\} & \text{est non singulière} \\ E\{\varphi_{iv}(Kh)e(Kh)\} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

où  $E\{\cdot\}$  représente l'espérance mathématique.

Les variables instrumentales sont généralement issues du modèle auxiliaire,  $H(p, \theta^0)$ , obtenu lors d'une première identification par moindres carrés linéaires :

$$y_{iv}^i(t, \theta^i) = H(p, \theta^i)u(t) \quad i = 0, \dots, N_{iter} \quad (28)$$

Ainsi, le vecteur  $\varphi_{iv}^i$  est formé conformément à (13) où les  $Y_l$  sont remplacés par des  $Y_{l-iv}^i$ , calculés à partir de (9) où la sortie bruitée du système  $y$  est remplacée par la sortie du modèle auxiliaire  $y_{iv}^i$ . Le vecteur des paramètres,  $\theta^i$ , est ensuite estimé à partir de :

$$\hat{\theta}_{opt}^i = (\Phi_{iv}^T \Phi)^{-1} \Phi_{iv}^T \mathbf{Y}. \quad (29)$$

L'estimation paramétrique est ensuite améliorée en calculant de nouvelles variables instrumentales  $y_{iv}^i$  pour  $i = 1, \dots, N_{iter}$ , à partir du nouveau modèle  $H(p, \theta^i)$  et en itérant sur la variable  $i$ , jusqu'à convergence des coefficients  $\theta^i$  [5].

### III. MÉTHODE DIRECTE

La méthode d'identification directe, basée sur les travaux de Cois [2], consiste à estimer les coefficients  $a_l$  et  $b_m$  de l'équation différentielle (2), à partir des dérivées non entières de  $y(t)$  et de  $u(t)$ , calculées directement par la formule de Grünwald :

$$y(Kh) = - \sum_{l=1}^L a_l Y_l(Kh) + \sum_{m=0}^M b_m U_m(Kh), \quad (30)$$

avec

$$Y_l(Kh) = \mathbf{D}^{n_{a_l}} y(t)|_{t=Kh} = \frac{1}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) \quad (31)$$

et

$$U_m(Kh) = \mathbf{D}^{n_{b_m}} u(t)|_{t=Kh} = \frac{1}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h) \quad (32)$$

L'équation (30) présente une forme linéaire de la sortie du système par rapport au vecteur des paramètres  $\theta = [a_1 \dots a_L \ b_0 \dots b_M]$  :

$$y(Kh, \theta) = \varphi(Kh)\theta^T. \quad (33)$$

Le vecteur de régression est défini par :

$$\varphi(Kh) = [-Y_1(Kh) \ \dots \ -Y_L(Kh) \ U_0(Kh) \ \dots \ U_M(Kh)]. \quad (34)$$

Là aussi, le modèle typique considéré est de type ARX généralisé donné par l'équation différentielle (14) que l'on peut écrire sous la forme discrétisée :

$$y(Kh) = - \sum_{l=1}^L a_l Y_l(Kh) + \sum_{m=0}^M b_m U_m(Kh) + e(Kh). \quad (35)$$

L'écriture de l'équation (35) pour  $N+1$  points de mesures entre  $Kh$  et  $(K+N)h$  conduit à la régression linéaire suivante :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\hat{\theta}) = \Phi \hat{\theta}^T, \quad (36)$$

avec

$$\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}(Kh) \ \dots \ \hat{y}((K+N)h)]^T \quad (37)$$

et

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Y_1(Kh) & \dots & -Y_L(Kh) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -Y_1((K+N)h) & \dots & -Y_L((K+N)h) \\ U_0(Kh) & \dots & U_M(Kh) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_0((K+N)h) & \dots & U_M((K+N)h) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Le critère quadratique à minimiser se formulant toujours de la même façon (voir (21) et (23)), la solution des moindres carrés correspond à (29), où la nouvelle matrice de régression s'écrit conformément à (38).

### Estimateur de la variable instrumentale

Afin d'améliorer l'estimateur des moindres carrés de la méthode directe, en présence de bruit de sortie, là aussi la variable instrumentale est utilisée conformément à la description du paragraphe II-E. La seule modification consiste à calculer  $Y_{l-iv}^i$  conformément à la méthode directe et à l'équation (31).

### IV. COMPARAISON DES MÉTHODES D'IDENTIFICATION INDIRECTE ET DIRECTE

On constate facilement que l'implantation de la méthode directe est beaucoup plus simple et intuitive comparée à la méthode indirecte : on raisonne ainsi sur les signaux d'entrée/sortie et leurs dérivées directes. Cependant, compte-tenu de la dépendance de la dérivée d'un signal évaluée à l'instant  $Kh$  de l'échantillon  $Kh$  de ce même signal, les deux méthodes diffèrent dans la manière de prendre en compte l'échantillon  $Kh$  :

- dans la méthode indirecte, les échantillons  $Kh$  de toutes les dérivées de la sortie sont rassemblés afin d'exprimer le prédicteur à un pas; ainsi le prédicteur à un pas de la sortie évalué à l'instant  $Kh$  dépend de la sortie évaluée aux instants précédents  $(K-1, K-2, \dots, 1)$  ainsi que l'entrée évaluée aux instants précédents et présent  $(K, K-1, \dots, 1)$ ;
- dans la méthode directe, les échantillons  $Kh$  ne sont pas isolés; la sortie estimée à l'instant  $Kh$  dépend donc de la sortie et de l'entrée évaluées à tous les instants passés et présent  $(K, K-1, K-2, \dots, 1)$ .

## V. EXEMPLE D'APPLICATION

Afin de comparer les méthodes directe et indirecte, un exemple illustratif issu de la simulation de la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{0.40384s^{0.6} + 0.2}{0.09563s^{1.2} + 0.63192s^{0.6} + 1}. \quad (39)$$

est traité dans un contexte non bruité, puis dans un contexte bruité. L'entrée, signal binaire pseudo aléatoire, ainsi que la sortie sont tracées sur la fig.1.

Tout au long de ce paragraphe, la structure du modèle ainsi que les ordres de dérivation sont supposés connus. Seuls les paramètres  $a_l$  et  $b_m$  du modèle :

$$H(s) = \frac{b_1 s^{0.6} + b_0}{a_2 s^{1.2} + a_1 s^{0.6} + 1}. \quad (40)$$

sont estimés.

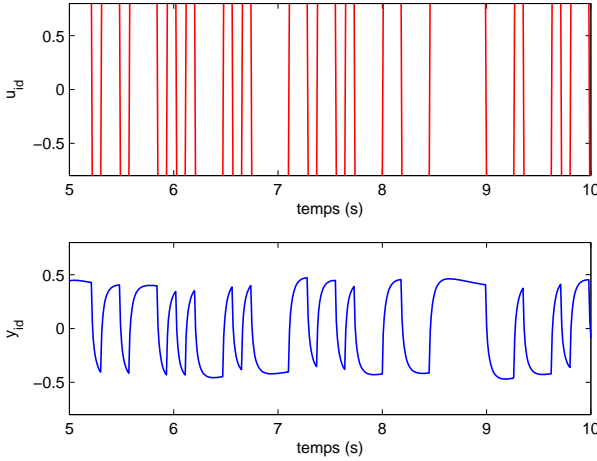


Fig. 1. Signaux de sortie  $y_{id}$  et d'entrée  $u_{id}$

### A. Modèle sans bruit

L'algorithme d'identification indirecte permet d'obtenir la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{0.40338s^{0.6} + 0.20036}{0.09552s^{1.2} + 0.63129s^{0.6} + 1}. \quad (41)$$

L'algorithme d'identification direct, permet quant à lui d'obtenir la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{0.40337s^{0.6} + 0.20036}{0.09552s^{1.2} + 0.63128s^{0.6} + 1}. \quad (42)$$

Dans un contexte non bruité et si la structure du modèle est connu, les deux méthodes d'identification conduisent aux vrais paramètres du système. Cependant, les mesures de sortie sont généralement bruitées, il est donc intéressant d'étudier l'influence du bruit sur les deux méthodes d'identification.

### B. Modèle avec bruit

Un bruit additif Gaussien de moyenne nulle est rajouté à la sortie. Le rapport signal sur bruit est fixé à 20dB.

### B.1 Identification par moindres carrés linéaires

Pour une réalisation du bruit, la méthode d'identification indirecte conduit au modèle suivant :

$$H(s) = \frac{0.00576s^{0.6} + 0.48598}{0.00258s^{1.2} + 0.08836s^{0.6} + 1}. \quad (43)$$

On remarque que les estimés sont relativement éloignés des vrais paramètres du système (39), ce qui témoigne de la présence d'un biais lors de l'estimation paramétrique. Les sorties du modèle et du système initial sont comparées sur la fig. 2.

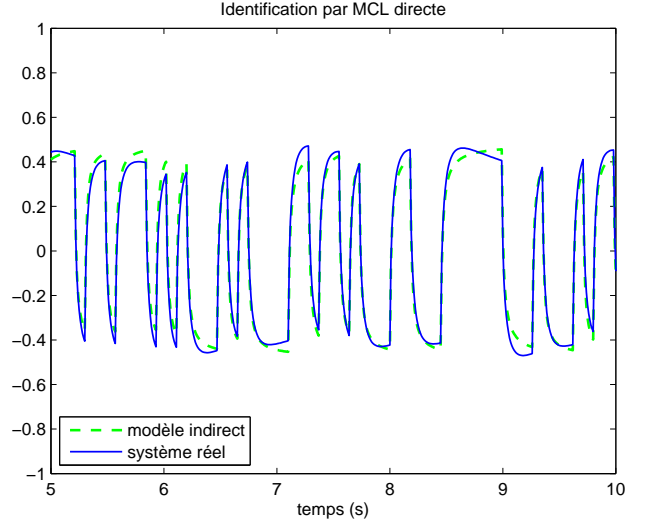


Fig. 2. Comportement dynamique de  $y_{id}$  par rapport à  $u_{id}$

Pour la même réalisation du bruit, la méthode d'identification directe conduit au modèle suivant :

$$H(s) = \frac{-0.02258s^{0.6} + 0.45990}{-0.00240s^{1.2} + 0.01649s^{0.6} + 1}. \quad (44)$$

On remarque que les estimés sont relativement éloignés des vrais paramètres du système (39). Elles sont également éloignées des estimées obtenues par la méthode indirecte (43). La méthode présente clairement un biais. Les sorties du modèle et du système initial sont comparées sur la fig. 3.

Eu égard des signaux de sortie des fig 2 et 3, on remarque une bien meilleure précision de la méthode indirecte comparée à la méthode directe. Les deux méthodes restent cependant sensibles au bruit, puisqu'une dérivation directe des signaux d'entrée/sortie amplifie le bruit.

Afin de diminuer la sensibilité au bruit, il est plus judicieux d'employer la méthode de la variable instrumentale.

### B.2 Identification par la méthode de la Variable Instrumentale

On s'intéresse maintenant à une identification par Variable Instrumentale (IV). Comme décrit dans les paragraphes II-E et III, les variables instrumentales sont calculées de façon itérative afin d'affiner l'estimation paramétrique.

Pour une meilleure comparaison, des simulations de Monté Carlo sont effectuées sur 100 réalisations de bruit

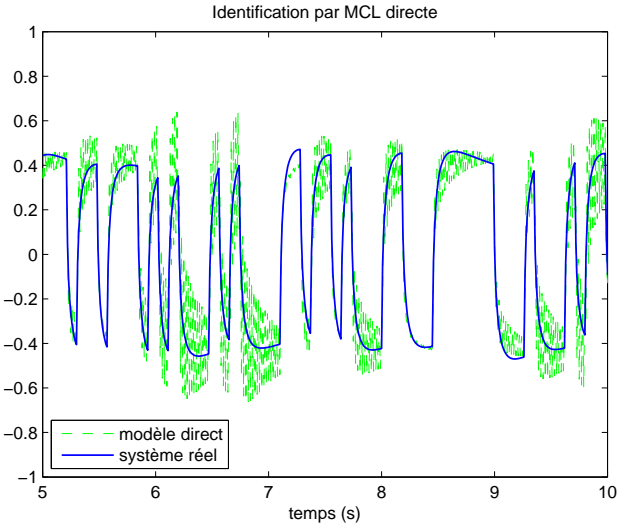


Fig. 3. Comportement dynamique de  $y_{id}$  par rapport à  $u_{id}$

différentes de rapport signal sur bruit de 20dB. Les 100 modèles estimés sont comparés au vrai système (39) sur les diagrammes de Bode des fig 4 et 5.

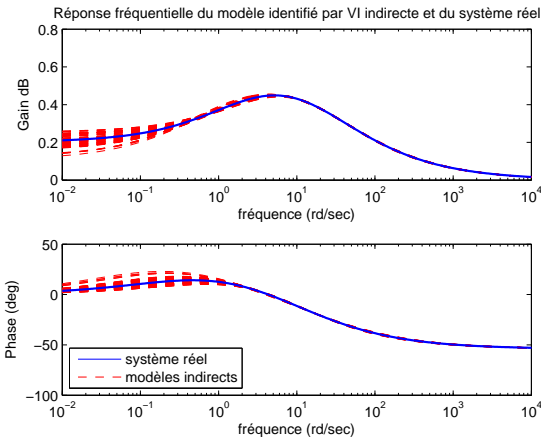


Fig. 4. Simulation par Méthode Variables Instrumentales Indirectes par Monte Carlo

Ainsi, les modèles obtenus par l'approche indirecte sont très proches des modèles obtenus par l'approche directe. On constate cependant une moins bonne identification des basses fréquences.

Les valeurs présentées sur la table I sont représentatives de l'ensemble des résultats de simulation par Monté Carlo. En utilisant une identification par variable instrumentale directe ou indirecte, la convergence des paramètres est bien plus nette et significative pour de faibles niveaux de bruit. On remarque une valeur moyenne quasi-similaire pour les deux approches qui tend vers les vrais paramètres. Cependant, il est à noter la simplicité de l'approche directe par rapport à l'approche indirecte.

## VI. CONCLUSION

Deux méthodes d'identification non entière utilisant la définition de Grünwald ont été comparées dans cet article. La différence de formulation entre les deux méthodes a pu

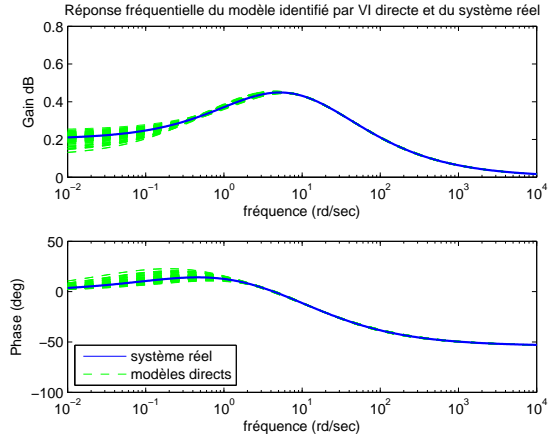


Fig. 5. Simulation par Méthodes Variables Instrumentales Directes par Monte Carlo

Paramètres	Estimateur IV direct		Estimateur IV indirect		
	vrais	VM	ET	VM	ET
$a_1$	0.63192	0.6599	0.1262	0.6599	0.1175
$a_2$	0.09563	0.0993	0.0166	0.0990	0.0155
$b_0$	0.20000	0.1924	0.0326	0.1947	0.0312
$b_1$	0.40384	0.4213	0.0784	0.4205	0.0730

TABLE I

TABEAU DE SYNTHÈSE APRÈS SIMULATIONS PAR MONTE CARLO ;  
VM=VALEUR MOYENNE ; ET=ECART-TYPE

être établie à travers les équations (6) et (30). La méthode indirecte minimise l'erreur de prédiction à un pas ; elle est plus délicate à mettre en œuvre ; et ne prend pas en compte le dernier échantillon de la sortie lors de l'estimation paramétrique. La méthode directe quant à elle minimise l'erreur d'approximation qui tient compte du dernier échantillon de la sortie ; elle est plus facile à mettre en œuvre.

La prise en compte ou non du dernier échantillon de la sortie influence peu l'estimation paramétrique dans un contexte non bruité, comme le montre l'exemple traité. En revanche en présence du bruit, les résultats obtenus par les méthodes directe et indirecte sont complètement différents.

A de faibles niveaux du bruit, l'utilisation de la variable instrumentale permet de s'affranchir du biais. Cependant à de plus fort niveau de bruit, la dérivation, même non entière, de signaux bruités amplifie le bruit. L'estimation paramétrique se trouve alors fortement biaisée. Il serait alors nécessaire d'appliquer des méthodes de type filtres à variables d'état combinées aux variables instrumentales [2].

## RÉFÉRENCES

- [1] L. LE LAY : *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Talence, France, Octobre 1998.
- [2] O. COIS : *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Talence, France, 2002.
- [3] A. OUSTALOUP, O. COIS et Lelay L. : *Représentation et identification par modèle non-entier*. 04 2005.
- [4] L. LJUNG : *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall, 2 édition, January 1999.
- [5] H. GARNIER, M. GILSON et T. BASTOGNE : *Identification de modèles paramétriques à temps continu. méthodes, outil logiciel et*

avantages. *In Journées Identification et Modélisation Expérimentale JIME*, Poitiers, France, 2006.