



**HAL**  
open science

## Prise en compte des conditions initiales lors de la simulation de fonctions de transfert non entières

Rodolfo Orjuela, Rachid Malti, Mathieu Moze, Alain Oustaloup

► **To cite this version:**

Rodolfo Orjuela, Rachid Malti, Mathieu Moze, Alain Oustaloup. Prise en compte des conditions initiales lors de la simulation de fonctions de transfert non entières. e-STA Sciences et Technologies de l'Automatique, 2006, 3 (4), pp.Revue électronique. hal-00182282

**HAL Id: hal-00182282**

**<https://hal.science/hal-00182282>**

Submitted on 25 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Prise en compte des conditions initiales lors de la simulation de fonctions de transfert non entières

RODOLFO ORJUELA<sup>1</sup>, RACHID MALTI<sup>2</sup>, MATHIEU MOZE<sup>2</sup> et ALAIN OUSTALOUP<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centre de Recherche en Automatique de Nancy  
CRAN UMR 7039  
INPL Nancy – 2, av. de la forêt de Haye  
54516 Vandœuvre-Lès-Nancy  
Tél. +33.3.83.59.56.84 – Fax. +33.3.83.59.54.55  
Rodolfo.Orjuela@ensem.inpl-nancy.fr  
http://www.cran.uhp.fr

<sup>2</sup>Laboratoire d'Automatique, Productique et Signal  
LAPS UMR 5131  
Université Bordeaux 1, 351 cours de la libération,  
33405 Talence Cedex, France  
Tél. +33 5 4000 3709 – Fax. +33 5 4000 6644  
prénom.nom@laps.u-bordeaux1.fr  
http://www.laps.u-bordeaux1.fr

**Résumé** — Le travail présenté dans ce document traite de l'influence des conditions initiales en dérivation non entière. Il existe plusieurs définitions de la dérivée non entière, ce qui implique une prise en compte différente des conditions initiales. Si la dérivée entière d'une fonction fournit sa caractérisation locale, la dérivée non entière fournit quant à elle sa caractérisation globale. Ainsi, la dérivation non entière permet de discriminer des fonctions dont le passé est différent. Pour caractériser la réponse en régime libre d'un système non entier, Hartley et Lorenzo proposent d'utiliser des fonctions d'initialisation. L'apport principal de cet article est la prise en compte d'un nombre fini de conditions initiales à partir de la méthode de synthèse des opérateurs non entiers bornés en fréquence d'Oustaloup.

**Mots clés** — système non entier, dérivation non entière, condition initiale.

## I. INTRODUCTION

Des études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes thermiques [1], électrochimiques [2] et viscoélastiques [3] sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont, par conséquent, été développés [4].

Si l'influence des conditions initiales sur l'évolution dynamique des systèmes «classiques» est depuis longtemps connue, il n'en est pas de même pour les Systèmes Non Entiers (S.N.E.) dont la sortie dépend de tout le passé. C'est pourquoi la majorité des études actuelles sur les S.N.E. considère l'hypothèse selon laquelle ces systèmes sont initialement au repos. L'étude de l'influence des conditions initiales en dérivation non entière proposée dans cet article permet la simulation du comportement dynamique de S.N.E. à partir d'un état initial quelconque.

## II. OPERATEURS D'INTEGRATION ET DE DERIVATION NON ENTIERES

Dans ce paragraphe, les opérateurs d'intégration et de dérivation non entiers sont présentés. Une définition unique de l'intégrale non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière sont considérées. Elles induisent des prises en compte différentes des conditions initiales.

### A. Intégrale non entière

La généralisation de l'opérateur d'intégration d'une fonction  $f(t)$  à des ordres non entiers est donnée par [5] :

$${}_0 D_t^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau, \quad n \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

où  $\Gamma(n)$  représente la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du, \quad \text{pour } n \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

### B. Dérivée non entière

Les deux définitions les plus utilisées de la dérivée non entière sont celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

#### 1) Définition de Riemann-Liouville

La dérivée non entière d'ordre  $n \in \mathbb{R}^+$  de Riemann-Liouville [6] est définie comme étant la dérivée entière d'ordre  $\lfloor n \rfloor + 1$  ( $\lfloor n \rfloor$  étant le plus grand minorant entier de  $n$ ) de l'intégrale non entière d'ordre  $\lfloor n \rfloor + 1 - n$  :

$${}^{RL}{}_0 D_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor n \rfloor + 1 - n)} \frac{d^{\lfloor n \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor n \rfloor + 1}} \left[ \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{n-\lfloor n \rfloor}} d\tau \right]. \quad (3)$$

#### 2) Définition de Caputo

La dérivée non entière d'ordre  $n \in \mathbb{R}^+$  de Caputo [7] est définie comme étant l'intégrale non entière d'ordre  $\lfloor n \rfloor + 1 - n$  de la dérivée entière d'ordre  $\lfloor n \rfloor + 1$  :

$${}_0^C D_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor n \rfloor + 1 - n)} \int_0^t \frac{d^{\lfloor n \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor n \rfloor + 1}} f(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{n-\lfloor n \rfloor}}. \quad (4)$$

#### 3) Autres définitions

Dans le cas le plus général, le calcul de la dérivée non entière peut se faire selon une séquence d'intégréo-différentiation (*sequential differintegration*) [8] :

$$D^n f(t) = \left[ \prod_{i=1}^N D^{\sigma_i} \right] f(t) \text{ avec } n = \sum_{i=1}^n \sigma_i \text{ et } \sigma_i \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{N}. \quad (5)$$

Par conséquent, les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo sont des cas particuliers d'une séquence d'intégration-différentiation non entière. Il existe donc une infinité de séquences pour calculer une dérivée non entière et par conséquent une infinité de définitions de la dérivée non entière.

*Remarque :*

La dérivée non entière prend en compte les valeurs de  $f(t)$  à tous les instants passés grâce à l'intégration qui apparaît dans sa définition. Elle fournit donc une caractérisation globale de  $f(t)$ . C'est cet effet de «mémoire» qui fait de l'opérateur de dérivation non entière un excellent outil de modélisation des phénomènes de diffusion connus pour être à «mémoire longue».

### C. Transformées de Laplace des opérateurs non entiers

La transformée de Laplace permet de mettre en évidence la façon dont les conditions initiales sont prises en compte dans chaque définition de la dérivée non entière.

#### 1) Transformée de Laplace de l'intégrale non entière

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration d'ordre non entier défini par (1) est donnée par [6] :

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0 D_t^{-n} f(t) \right\} = \frac{f(s)}{s^n}, \text{ avec } n > 0 \quad (6)$$

Seules les transformées de Laplace des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo sont étudiées.

#### 2) Transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville

La transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville est donnée par [6] :

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0^{RL} D_t^n f(t) \right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} s^k \left[ {}_0 D_t^{(n-k-1)} f(t) \right]_{t=0} \quad (7)$$

où  $s$  représente la variable de Laplace.

Les conditions initiales apparaissant dans (7) sont données en fonction d'une dérivée non entière évaluée à l'origine.

#### 3) Transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Caputo est donnée par [8] :

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0^C D_t^n f(t) \right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} s^{n-k-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0}. \quad (8)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (8) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

*Remarques :*

R.1. Les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour tout  $t < 0$ . Les transformées de Laplace de la dérivée non

entière au sens de Riemann-Liouville et de Caputo se réduisent alors à :

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0^{RL} D_t^n f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ {}_0^C D_t^n f(t) \right\} = s^n F(s). \quad (9)$$

R.2. Lorsque le système n'est pas au repos pour  $t < 0$ , les sommes dans (7) et (8) ne sont pas nulles et les intégrales de Riemann-Liouville et de Caputo sont différentes :

$${}_0^{RL} D_t^n (f) \neq {}_0^C D_t^n (f).$$

R.3. La définition donnée par Caputo semble au premier abord mieux se prêter à la résolution d'équations différentielles non entières [8]. En effet, les conditions initiales données en fonction des dérivées entières ont une interprétation physique (par exemple : position, vitesse, accélération, jerk).

### D. Synthèse d'opérateurs non entiers bornés en fréquence

Soient  $s^n$  un opérateur non entier d'ordre  $n \in \mathbb{R}$  et  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$  un opérateur dont le comportement non entier d'ordre  $n$  est limité à la bande fréquentielle  $[\omega_A, \omega_B]$ , tel que

$$s^n = s^n_{[\omega_A, \omega_B]} \quad \forall \omega \in [\omega_A, \omega_B]. \quad (10)$$

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur non entier  $s^n$ , à savoir :

- un gain de  $6n$  dB/octave,
- une phase de  $n \frac{\pi}{2}$ ,

sont ainsi équivalentes à celle de  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$  dans la bande de fréquence  $[\omega_A, \omega_B]$ .

Oustaloup [9] a développé une méthode de synthèse de l'opérateur non entier borné en fréquence  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$  à partir d'une distribution récursive de zéros et de pôles donnée par :

$$s^n_{[\omega_A, \omega_B]} = \lim_{N \rightarrow \infty} C_0 \prod_{k=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right). \quad (11)$$

La récursivité des zéros et des pôles se traduit par une distribution des fréquences transitionnelles  $\omega_k$  et  $\omega'_k$ , mise en évidence figure 1, de telle sorte que :

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \eta \alpha > 1, \quad (12)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha; \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_{k+1}} = \eta, \quad (13)$$

et 
$$n = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha) + \log(\eta)}, \quad (14)$$

les facteurs récursifs  $\alpha$  et  $\eta$  étant donnés par

$$\alpha = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{n}{N}} \text{ et } \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-n}{N}}, \quad (15)$$

et les pulsations  $\omega_1 = \omega_b$  et  $\omega_N = \omega_h$  étant généralement fixées à  $\omega_A / 10$  et  $10\omega_B$ , soit une décade de part et d'autre de la bande fréquentielle  $[\omega_A, \omega_B]$  afin de minimiser l'effet de bord [9].

La synthèse de l'opérateur non entier borné en fréquence se fait ainsi à partir de seulement quatre paramètres : les fréquences  $\omega_A$  et  $\omega_B$ , définissant la bande de fréquence, le nombre  $N$  de pôles et de zéros et l'ordre de dérivation  $n$ .

En théorie, un nombre  $N$  infini de pôles et de zéros est nécessaire à l'obtention de la réponse fréquentielle exacte de la dérivée. En pratique, cependant, il suffit d'un nombre  $N$  fini pour obtenir une approximation satisfaisante. Le choix de  $N$  peut être basé sur une analyse énergétique de la réponse impulsionnelle de  $s^n$  (voir [9] ou [10] pour une discussion plus détaillée).

La figure 1 représente les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur d'intégration non entier  $s^n$  (en pointillés) et de l'opérateur d'intégration non entier borné en fréquence  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$  (en trait plein).

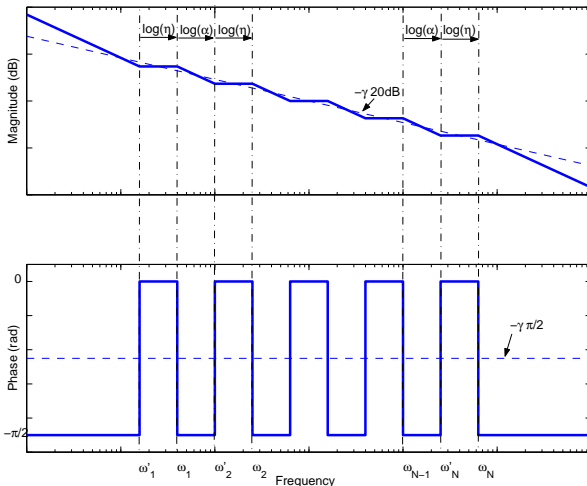


Figure 1 – Diagrammes asymptotiques de l'opérateur d'intégration non entier borné en fréquence (–) et droites de lissage (..)

### E. Comportement dynamique d'un système non entier

Le comportement dynamique d'un S.N.E. mono entrée mono sortie, linéaire, et invariant dans le temps, peut être modélisé par une équation différentielle non entière.

Comme dans le cas des systèmes entiers, la *réponse complète*  $y(t)$  d'un S.N.E. est la somme de la *réponse en régime forcé*  $y_F(t)$  et celle *en régime libre*  $y_L(t)$  :

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t). \quad (16)$$

La réponse forcée est calculée uniquement à partir de l'excitation du système, les conditions initiales étant supposées nulles. La remarque R1 permet alors de conclure sur l'unicité de la réponse forcée quelle que soit la définition de la dérivée utilisée.

La réponse libre est quant à elle calculée uniquement à partir des conditions initiales du système, l'excitation étant supposée nulle. La remarque R2 permet alors de conclure que la réponse libre dépend de la définition de la dérivée utilisée.

### F. Fonction d'initialisation induite par l'approche de Riemann-Liouville

Le nombre fini de conditions initiales apparaissant dans (7) et (8) ne suffit pas pour représenter correctement le passé d'une fonction [11]. C'est pourquoi, *Lorenzo et Hartley* [12] proposent de remplacer les conditions initiales dans le cas non entier par une fonction dite d'initialisation qui caractérise la réponse en régime libre d'un S.N.E.

Soit  $f(t)$  une fonction continue, nulle pour  $t < a$  ( $a$  peut tendre vers  $-\infty$ ). Soit  $c \geq a$  la nouvelle origine des temps et donc la borne inférieure d'intégration de (17). L'évolution de  $f(t)$  entre  $t = a$  et  $t = c$  constitue le passé de  $f(t)$  qui doit être pris en compte par la fonction d'initialisation  $\Psi$  de manière à ce que l'intégrale de  $f(t)$  à compter de  $t = c$  soit identique à celle de  $f(t)$  à compter de  $t = a$  :

$${}_c D_t^{-n} f(t) + \Psi(f, -n, a, c, t) = {}_a D_t^{-n} f(t) \quad n > 0 \text{ et } t > c. \quad (17)$$

#### 1) Fonction d'initialisation de l'intégrale non entière

A partir de la relation (17) et de la définition (1), il est évident que la fonction d'initialisation associée à l'intégrale non entière correspond à :

$$\Psi(f, -n, a, c, t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^c f(\tau) (t - \tau)^{n-1} d\tau. \quad (18)$$

#### 2) Fonction d'initialisation de la dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville

De même, la fonction d'initialisation associée à la dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}^{RL} \Psi(f, n, a, c, t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor n \rfloor + 1 - n)} \frac{d^{\lfloor n \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor n \rfloor + 1}} \left[ \int_a^c \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{n - \lfloor n \rfloor}} d\tau \right]. \quad (19)$$

#### 3) Fonction d'initialisation de la dérivée non entière au sens de Caputo

La fonction d'initialisation associée à la dérivée non entière au sens de Caputo est quant à elle donnée par :

$${}_c \Psi(f, n, a, c, t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor n \rfloor + 1 - n)} \int_a^c \frac{d^{\lfloor n \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor n \rfloor + 1}} f(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{n - \lfloor n \rfloor}}. \quad (20)$$

### III. PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS INITIALES A PARTIR DE LA SYNTHÈSE RECURSIVE DE L'OPERATEUR NON ENTIER BORNE EN FREQUENCE

Une nouvelle méthode, basée sur la synthèse de l'opérateur non entier borné en fréquence, est proposée pour la prise en compte des conditions initiales à partir d'un nombre fini de points. Elle permet de s'affranchir de la notion de fonction d'initialisation définie à partir d'un nombre infini de points.

A partir de la forme factorisée de la synthèse de l'opérateur non entier borné en fréquence (11), Oustaloup [9] propose une forme développée :

$$s^n_{[\omega_A, \omega_B]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ Y_0 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}} \right\}, \quad (21)$$

$$\text{où } Y_0 = \frac{1}{R_0} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}, \quad (22)$$

$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\alpha} \text{ et } C_{i+1} = \frac{C_i}{\eta}, \quad (23)$$

l'ordre de dérivation non entier s'exprimant toujours à partir des coefficients récurrents  $\alpha$  et  $\eta$  par la relation (15).

La relation (21) montre que l'opérateur  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$  peut être réalisé par un *arrangement parallèle récursif de cellules RC série* (voir figure 2) où le courant  $i(t)$  correspond à la dérivée non entière de la tension  $v(t)$ .

La tension aux bornes de la capacité de la  $i^{\text{ème}}$  cellule RC série est donnée par :

$$V_{ci}(s) = \frac{Y_i(s)}{C_i s} V(s), \quad (24)$$

où :  $Y_i(s) = \frac{C_i s}{1 + s C_i R_i}$  est l'admittance de la cellule.

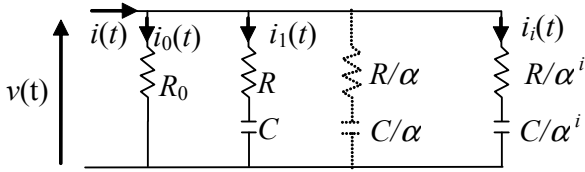


Figure 2 – Arrangement parallèle récursif de cellules RC série

La prise en compte des conditions initiales peut désormais se faire en considérant l'état de charge initial des capacités, seuls éléments actifs présents dans le circuit. Le modèle reliant le courant  $i(t)$  à la tension  $v(t)$  est ainsi donné en fonction de l'état de charge initial de chaque capacité, par :

$$I(s) = s^n_{[\omega_A, \omega_B]} V(s) + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N C_i R_i Y_i(s) V_{ci}(0) \right\}. \quad (25)$$

Il est donc possible d'obtenir une approximation de la dérivée non entière à partir d'un instant quelconque si les conditions initiales associées à la charge de chaque capacité sont connues. La distribution des tensions aux bornes de chaque capacité est unique et dépend de la forme de la fonction  $v(t)$ . A partir des contraintes données pour définir la fonction d'initialisation (paragraphe II.F), il est possible de conclure sur l'existence d'une distribution unique de conditions initiales qui caractérise complètement le passé de la fonction (de la tension)  $v(t)$ .

#### IV. EXEMPLES

Deux exemples d'application sont présentés dans cette section. Le premier illustre la façon de prendre en compte les conditions initiales à partir de la synthèse d'un opérateur non entier borné en fréquence. Le second montre comment prendre en compte les conditions initiales lors de la résolution d'une équation différentielle non entière.

##### A. Exemple 1 : dérivation d'une fonction

L'objectif de cet exemple est de calculer la dérivée non entière d'ordre  $n = 0.3$  de la fonction continue :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a \\ \sin(0.2\pi t) & \forall t \geq a \end{cases},$$

à partir de  $t = c \geq a$  (avec  $c = 2$  et  $a = -1$ ). Par conséquent, on considère  $c$  comme la nouvelle origine des temps, le passé de la fonction étant compris entre les instants  $a$  et  $c$ . Si le passé est correctement pris en compte, la dérivée non entière de  $f(t)$  à compter de  $t = c$  doit être identique à celle de  $f(t)$  à compter de  $t = a$ .

L'opérateur non entier borné dans l'intervalle fréquentiel  $[10^{-4}, 10^4]$  rad/s est synthétisé avec 15 cellules ayant les facteurs récurrents  $\alpha = 1.45$  et  $\eta = 2.36$ , puis appliqué à la fonction  $f(t)$  afin de calculer sa dérivée à l'ordre 0.3.

La figure 3 représente la dérivée non entière de  $f(t)$  à partir de l'instant  $a = -1$  ainsi que l'évolution de la dérivée non entière de  $f(t)$  à partir de l'instant  $c = 2$  (conditions initiales non nulles) en fonction du nombre de conditions initiales  $N_{ci}$  non nulles utilisées pour caractériser le passé.

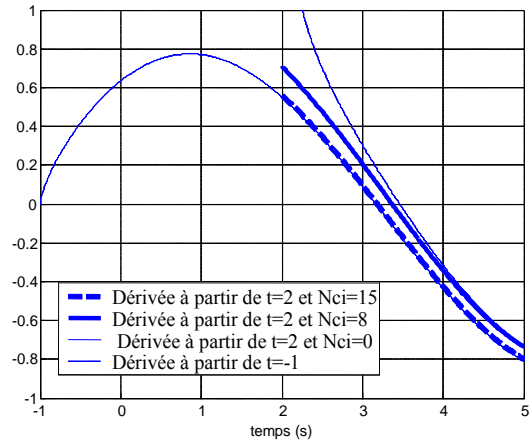


Figure 3 – Exemple de dérivée non entière de  $f(t) = \sin(0.2\pi t)$  pour  $t > 2$

Il est évident que plus le nombre de conditions initiales  $N_{ci}$  pris en compte est important, plus on s'approche de la vraie dérivée de  $f(t)$ . Il convient également de signaler que, pour un nombre  $N_{ci}$  proche de zéro, le comportement asymptotique de la dérivée non entière est de la forme :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow c} D_t^\alpha f(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t). \end{cases}$$

Il est possible d'expliquer ce comportement asymptotique à partir de la théorie des circuits électriques. En effet, à  $t = c^+$  et en présence de conditions initiales nulles, les capacités d'un *arrangement parallèle récursif de N cellules RC série* se comportent comme des courts-circuits, résultant en un circuit parallèle purement résistif. L'impédance équivalente d'un tel circuit est donnée par :

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_N}}, \quad (26)$$

impédance pouvant être sommairement approchée par la plus petite résistance :

$$Z \approx \min(R_1, \dots, R_i, \dots, R_N) = R_{\min}. \quad (27)$$

Les valeurs des résistances  $R_i$  du circuit considéré étant comprises dans cet exemple dans l'intervalle  $[0.011, 2.920]$ , l'impédance instantanée (à  $t = c^+$ ) équivalente du circuit est proche de  $R_{\min}$ . Par conséquent, l'intensité du courant qui traverse le circuit à cet instant est très grande, de l'ordre de  $i(t_0^+) \approx \frac{v(t_0^+)}{R_{\min}} \rightarrow \infty$ .

Lorsque  $t$  augmente, les capacités sont de plus en plus chargées et l'intensité du courant diminue tendant vers la sinusoïde. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  présente un saut à  $t = c$  et si les conditions initiales dans l'arrangement parallèle récursif de  $N$  cellules RC série sont toutes nulles à l'instant  $t = c$ , la dérivée d'ordre non entier peut avoir un comportement tendant vers l'infini à  $t = c$ , comportement dû à l'intensité du courant  $i(t)$  traversant le circuit. Celle-ci décroît, voire disparaît, quand les conditions initiales aux bornes de chaque capacité sont correctement prises en compte.

### B. Exemple 2 : prise en compte des conditions initiales lors de la résolution d'une équation différentielle non entière

L'objectif de ce deuxième exemple est d'étudier le comportement dynamique d'un système non entier régi par l'équation différentielle d'ordre 0.5 :

$$\tau y^{(0.5)}(t) + y(t) = f(t). \quad (28)$$

Le système est considéré au repos pour  $t < a$ , soumis à une excitation  $f(t)$  de type échelon à partir de  $t = a$ , de manière à obtenir la réponse qui servira de référence à partir de la nouvelle origine des temps  $t = c > a$ . La réponse globale du système est alors composée de la réponse en régime libre (réponse due à l'excitation entre les instants  $a$  et  $c$ ) et la réponse en régime forcé (réponse due à l'excitation à partir de l'instant  $c$ ).

Si le passé est correctement pris en compte, la réponse référence doit être identique à la réponse complète du système calculée à partir de l'instant  $c$ .

Plusieurs algorithmes [13, 14], basés sur les définitions de la dérivée non entière de Riemann-Liouville et de Caputo, permettent d'intégrer numériquement une équation différentielle d'ordre non entier. Il a été montré, au paragraphe III, qu'un nombre fini de conditions initiales ne suffit pas à caractériser correctement la réponse libre d'un système non entier, d'où l'introduction de la notion de fonction d'initialisation. Ces algorithmes ne sont donc pas adaptés au formalisme proposé ici.

Il est cependant possible de résoudre analytiquement cette équation différentielle en utilisant l'approche de Caputo [15]. Dans ce cas, la solution de (28) est donnée par :

$$Y(s) = \frac{1/\tau}{s^n + 1/\tau} \frac{1}{s} + \frac{y(0) s^{n-1}}{s^n + 1/\tau}, \quad (29)$$

dont la transformée inverse de Laplace est :

$$y(t) = \frac{t^n}{\tau} E_{n,n+1}\left(-\frac{t^n}{\tau}\right) + y(0)E_{n,1}\left(-\frac{t^n}{\tau}\right), \quad (30)$$

où  $E_{\alpha,\beta}$  est la fonction de Mittag-Leffler [8]. Ici la valeur initiale  $y(c)$  vaut 0.5 (voir figure 4).

La figure 4 présente la réponse complète, en régime forcé et en régime libre du système obtenue en utilisant l'approche de Caputo.

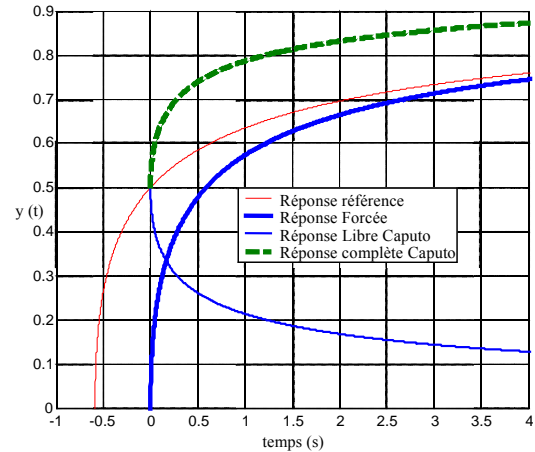


Figure 4 – Solution de l'équation  $y^{(n)}(t) + y(t) = f(t)$  avec  $y(0) = 0.5$  en utilisant l'approche de Caputo

L'écart entre la réponse référence et la réponse complète du système obtenue par l'approche de Caputo (figure 4) provient de la manière dont les conditions initiales sont prises en compte dans l'approche de Caputo (8) :

$$Y_L(s) = \frac{y(0) s^{n-1}}{s^n + 1/\tau}. \quad (31)$$

Dans cette expression le passé de  $y(t)$  est pris en compte par le terme du numérateur toujours considéré de la même façon quel que soit le passé de  $y(t)$ . Pour obtenir le comportement dynamique souhaité, l'effet du passé de  $y(t)$  doit être caractérisé par une fonction d'initialisation et ne peut nullement être pris en compte comme le préconisent les définitions de Caputo (8) et de Riemann-Liouville (7).

On souhaite, à présent, résoudre l'équation différentielle (28) en utilisant l'opérateur non entier borné en fréquence. A cet effet, le système non entier modélisé par (28) est représenté par le circuit électrique de la figure 5 où la constante de temps  $\tau$  est remplacée par une résistance et une impédance non entière  $s^n$  approchée par un arrangement parallèle récursif de  $N = 15$  cellules RC série synthétisé dans l'intervalle de fréquences  $[10^{-4}, 10^4]$  rad/s.

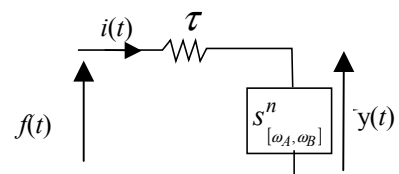


Figure 5 – Représentation de l'équation différentielle  $\tau y^{(0.5)}(t) + y(t) = f(t)$

Il s'agit donc de calculer la tension  $y(t)$  aux bornes de l'arrangement parallèle récursif de cellules RC série en fonction de la tension  $f(t)$  appliquée au circuit. La résolution peut alors s'effectuer à l'aide de techniques classiques d'analyse de circuits.

La figure 6 présente la réponse complète, en régime forcé et en régime libre, du système obtenue en utilisant l'opérateur borné en fréquence.

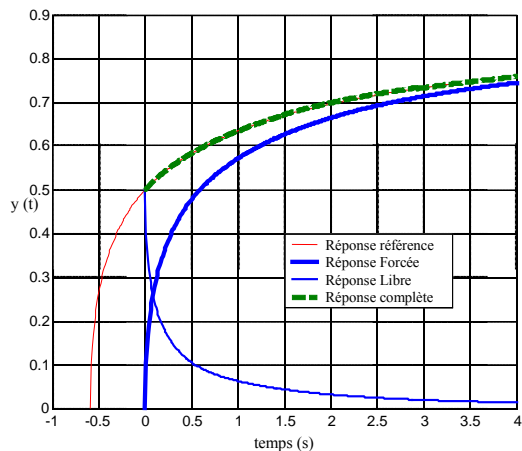


Figure 6 – Solutions de l'équation  $y^{(n)}(t) + y(t) = f(t)$  en utilisant l'opérateur borné en fréquence

Il convient de remarquer que la réponse complète du système, constituée de la somme des réponses en régime libre et en régime forcé, obtenue en utilisant l'opérateur borné en fréquence correspond exactement au comportement souhaité.

## V. CONCLUSION

La dérivée non entière d'une fonction fournit une caractérisation globale et non locale, comme dans le cas entier. C'est pourquoi les sorties présente et future d'un système non entier dépendent de tout son passé, par opposition aux systèmes entiers dont la sortie ne dépend que d'un nombre limité de conditions initiales égal à l'ordre du système. C'est pourquoi Hartley et Lorenzo préconisent d'utiliser la notion de fonction d'initialisation par opposition à celle de conditions initiales présente dans les systèmes entiers classiques. Il est cependant difficile de caractériser la réponse en régime libre d'un système à partir d'une fonction d'initialisation qui, bien que définie sur un intervalle limité, dépend d'un nombre infini de points.

Dans cet article, la réponse en régime libre (due à un passé non nul) a été caractérisée à partir d'un nombre fini de points en s'inspirant de la méthode de synthèse des opérateurs non entiers proposée par Oustaloup [9]. Cette nouvelle caractérisation ouvre des perspectives intéressantes notamment en identification de systèmes non entiers à partir d'un passé non nul. On peut désormais envisager d'estimer un nombre fini de conditions initiales au même titre que les paramètres du modèle.

## VI. REFERENCES

[1] J.-L. Battaglia, L. Le Lay, Batsale J.-C., Oustaloup A. and Cois O. Heat flux stimulation through inverted non integer identification models. *International Journal of Thermal Science*, 39(3) : 374-389, 2000.

[2] R. Darling and J. Newman. On the short behaviour of porous interaction electrodes. *J. Electrochem. Soc.*, 144(9) : 3057-3063, 1997.

[3] C. Ramus-Serment, Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, Talence, 2001.

[4] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia et J.-L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. 12<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification SYSID, Santa Barbara, USA, 2000.

[5] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Gordon and Breach Science, 1993.

[6] K. S. Miller, B. Ross, *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional differential equations*, Wiley & Sons, New York, 1993.

[7] M. Caputo, Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, 2(13):529-539, 1967.

[8] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, ACADEMIC PRESS, San Diego, 1999.

[9] A. Oustaloup, *La dérivation non entière : Théorie, synthèse et application dans les sciences de l'ingénieur*, Edition Hermès, 1995.

[10] A. Oustaloup, F. Levron, F. Nanot, B. Mathieu, Frequency-band complex non integer differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on circuits and systems*, Volume 47, Nr1 :25-44, 2000.

[11] S. Kempfle, I. Schäfer, Fractional differential equations and initial conditions, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, Volume 3, Number 4, 2000.

[12] C. Lorenzo, T. Hartley, *Initialized Fractional Calculus*, NASA TP-2000-209943.

[13] L. Blank, Numerical treatment of differential equations of fractional order, *Numerical Analysis Report 287*. Manchester Centre for Computational Mathematics, 1996.

[14] K. Diethelm, An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Elec. Transact. Numer. Anal.*, Volume 5 : 1-6, 1997.

[15] Y. Luchko, R. Gorenflo. The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Partially supported by the Research Commission of Free University of Berlin*, 1998.