



HAL
open science

Recherche de conclusions robustes dans une problématique de placements financiers en environnement incertain

Philippe Vallin

► **To cite this version:**

Philippe Vallin. Recherche de conclusions robustes dans une problématique de placements financiers en environnement incertain. 2007. hal-00180651

HAL Id: hal-00180651

<https://hal.science/hal-00180651>

Preprint submitted on 19 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Recherche de conclusions robustes dans une problématique de placements financiers en environnement incertain

Philippe Vallin ¹

Résumé

Dans cette analyse, on cherche à exhiber des conclusions et solutions robustes dans un problème d'investissement sous contrainte budgétaire dans un environnement incertain.

La notion de robustesse est traduite par le critère de Savage. L'incertitude se traduit par la méconnaissance des rentabilités des investissements (ou placements), sur un horizon fixé. Celles-ci peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. L'impact du critère sur le choix des politiques nous a paru intéressant à observer en comparaison des pratiques usuelles.

On obtient les conclusions suivantes :

1. Une solution optimale pour un jeu de rentabilité fixé n'est pas robuste
2. N'investir dans aucun placement n'est pas non plus une politique « robuste »
3. Lorsque le taux maximum de perte est supérieur ou égal au taux maximum de gain,
 - a. La consommation totale du budget n'est pas une politique robuste, compte tenu du critère cela ne semble pas étonnant, mais,
 - b. Pour obtenir une politique robuste, il faut investir dans les deux placements à plus faible coût (un seul ou éventuellement deux).
4. Bien que les coûts unitaires des placements soient supposés déterminés, il est inutile d'estimer le coût des placements les plus onéreux, ils n'interviennent pas dans la décision.

Mots-clefs : décision robuste, investissement, critère de Savage.

¹ Lamsade, Université Paris Dauphine, {vallin@lamsade.dauphine.fr}

Abstract

In this analysis, we seek robust conclusions and solutions in an investment problem under budgetary constraint and uncertainty.

The concept of robustness is given by the Savage criterion. Uncertainty comes from ignorance of profitability rates of the investments (or placements), on a fixed horizon. They can have positive or negative values. The impact of the criterion on the choice of the policies appears interesting comparing the usual practice. The following conclusions are obtained:

1. An optimal solution for a fixed set of profitability rates is not robust
2. No investment is not a “robust” policy
3. When the maximum rate of loss is higher than the maximum rate of profit,
 - a. The overall consumption of the budget is not a robust policy, taking into account the criterion that does not seem astonishing, but,
 - b. To obtain a robust policy, it is necessary to invest in the two cheaper placements (only one or both).
4. Although the unit costs of the placements are supposed to be given, it is useless to evaluate the cost of the most expensive placements; they are not taken into account in the decision.

Key Words: robust decision, investment, Savage criterion.

1 Contexte et modèle

On cherche à investir en choisissant dans un portefeuille de n types ($i = 1, \dots, n$) de placements possibles (actions, obligations, d’emprunt d’Etat, immobilier ...) en avenir incertain.

On dispose d’un budget disponible par convention égal à 1, ce qui ne nuit pas à la généralité.

On supposera que sur l’horizon de l’étude on peut multiplier par un facteur r le capital investi ou perdre tout ou partie du capital.

La notion de robustesse est traduite par le critère de Savage (max du regret appliqué au gain net) que l’on minimise évidemment !

On peut par exemple se situer dans le cadre d’une institution financière qui gère des patrimoines pour le compte de ses clients. Le regret paraît assez naturel comme critère pour le client qui juge en fin d’horizon pour un état du marché donné : « ah ! si vous m’aviez conseillé cet investissement j’aurais gagné x k€ de plus ! ». On peut donc concevoir qu’un gestionnaire prudent choisisse un portefeuille qui minimise le risque de

regret en fonction des états possibles du marché, risque traduit par le regret maximum, c'est-à-dire le pire cas en fonction des évolutions des marchés.

Le critère est le gain ou la perte relatifs au capital investi, il s'exprime par :

$$Z = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n,$$

où

r_i , $-s \leq r_i \leq a$, est le taux de gain (ou perte) ; $a > 0$ sinon la solution consiste à ne pas investir puisque la perte est assurée ; $0 < s \leq 1$ est le seuil plancher de perte ($s=1$ signifie que la totalité du capital investi peut être perdu) , a et s sont supposés liés au marché il sont identiques pour tous les types d'investissements du portefeuille ; $a+s$ peut être considéré comme un indicateur de « volatilité ». Lorsque $r_i = +1$, le capital est doublé, si $r_i = -1$, le capital est perdu.

x_i , le montant du capital investi dans le placement i , exprimé en unité monétaire, comme le budget est 1 par convention, x_i peut être interprétée comme une part du budget.

Au capital investi s'ajoute un coût, c_i , ou droit d'entrée (frais de courtage, droits de gardes, coût de gestion, taxe, droits d'enregistrement)² que nous considérons comme proportionnel au capital investi. Le montant total de l'investissement est donc

$$p_i x_i = (1 + c_i) x_i$$

La contrainte budgétaire s'exprime par :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq 1 \text{ (l'unité monétaire est le budget connu et fixé).}$$

On suppose $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, c'est-à-dire que les investissements sont classés dans l'ordre croissant des coûts : $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, inégalités strictes car on ne distingue pas deux placements de même coût puisqu'on ne dispose d'aucune information discriminante sur les rendements. Sous cette hypothèse, on peut considérer que les i représentent d'avantage des familles d'investissements que des investissements spécifiés.

La solution « robuste » (au sens de Savage) est dans ce contexte définie par :

$$\text{Min}_{x_1, x_2, \dots, x_n} \{ \text{Max}_{r_1, r_2, \dots, r_n} (Z^*(r_1, \dots, r_n) - Z(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n)) \}$$

$$\sum_i p_i x_i \leq 1$$

$$-s \leq r_i \leq a$$

² Le critère à optimiser pourrait être $Z = (r_1 - c_1)x_1 + \dots + (r_n - c_n)x_n$ représentant le gain net. Nous négligeons ici l'impact de ces coûts dans le critère considérant qu'il est négligeable compte tenu de l'incertitude prise en compte.

où $Z^*(r_1, \dots, r_n)$ est la solution optimale pour un ensemble de paramètres (r_1, \dots, r_n) fixé.

2 Analyse

Le tableau classique des regrets avec les « actions possibles » en lignes et les « états de la nature » en colonnes s'exprime ici par une infinité de lignes et de colonnes puisque le choix des portefeuilles se caractérise par des attributions monétaires et les taux de rendement sont des paramètres continus. Mais on peut dans ce contexte se ramener à un cas discret en ce qui concerne les « états de la nature ».

Lemme 1 : Pour un portefeuille donné, la valeur du regret maximum ne met en jeu que $n+1$ valeurs de regrets.

Preuve :

En effet, quelles que soient les valeurs des r_i , le gain optimal $Z^*(r_1, \dots, r_n)$ ne s'exprime que par $n+1$ expressions distinctes. Ceci est lié à la simplicité de la solution pour un jeu de r_i donné : il suffit de concentrer l'investissement sur le placement dont le rapport r_i/p_i est maximum à condition que ce rapport soit positif. Dans le cas contraire (tous les r_i étant négatifs ou nuls) la meilleure solution consiste à ne rien investir.

Géométriquement les solutions optimales correspondent aux sommets du polyèdre des solutions réalisables qui sont situés sur chaque axe et à l'origine (cf. fig. 1).

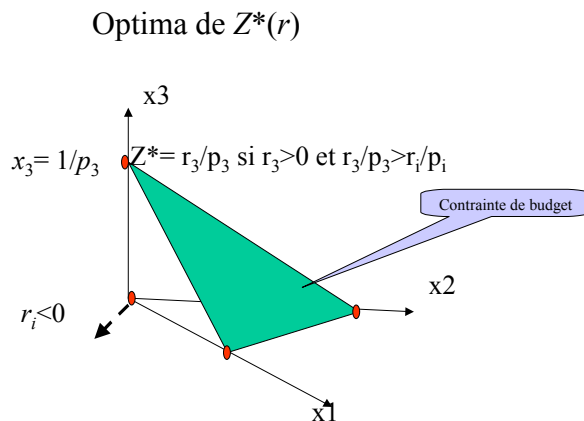


Figure 1. Points optimaux possibles en fonction des r_i

Les $n+1$ expressions de $Z^* : Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_i^*, \dots, Z_{n+1}^*$, sont exprimées ci-dessous :

$$1. \quad Z_1^* = r_1/p_1 \text{ lorsque } r_1 \geq 0 \text{ et } r_1/p_1 \geq r_j/p_j \text{ quel que soit } j \neq 1$$

...

$$i \quad Z_i^* = r_i/p_i \text{ lorsque } r_i \geq 0 \text{ et } r_i/p_i \geq r_j/p_j \text{ quel que soit } j \neq i$$

...

$$n+1 \quad Z_{n+1}^* = 0 \text{ lorsque } r_i \leq 0 \text{ pour tout } i$$

L'hypercube des r_i est partitionné par les domaines définis ci-dessus. Les classes de la partition ont des frontières communes lorsque $r_i/p_i = r_j/p_j$

Pour un portefeuille (x_1, \dots, x_n) fixé il n'y a donc que $n+1$ expressions du regret en fonction des $n+1$ domaines de r_i définis ci-dessus:

$$\text{Domaine 1 : } R_1 = r_1/p_1 - \sum_i r_i x_i = (1/p_1 - x_1)r_1 - \sum_{j \neq 1} r_j x_j$$

Puisque $x_1 \leq 1/p_1$ (contrainte de budget), R_1 prend sa valeur maximum

$R_1^* = a/p_1 - ax_1 + sx_2 + \dots + sx_n$, obtenue pour $r_1 = a$ et $r_j = -s$; $j \neq 1$ qui est bien un élément du domaine $\{ r_i \mid r_i \geq 0 \text{ et } r_i/p_i \geq r_j/p_j \forall j \}$. Dans le contexte, cela signifie que le regret est constitué du manque à gagner de ne pas avoir tout investi sur l'investissement 1 moins les « gains algébriques » obtenus sur les autres investissements. Le regret prend sa valeur maximale lorsque r_1 prend sa valeur maximale et que les autres rapports prennent leur valeur minimale (la valeur du capital s'est partiellement réduite).

$$\text{Domaine } i : \quad R_i = (r_i/p_i) - \sum_i r_i x_i = (1/p_i - x_i)r_i - \sum_{j \neq i} r_j x_j$$

qui prend sa valeur maximum $R_i^* = a/p_i - ax_i + \sum_{j \neq i} sx_j = a/p_i - (s+a)x_i + \sum_j sx_j$, obtenue

pour $r_j = -s$ et $r_i = a$

Domaine $n+1$: $R_{n+1} = 0 - (r_1 x_1 + \dots + r_n x_n)$ dont la valeur maximale vaut $R_{n+1}^* = sx_1 + \dots + sx_n$ obtenue pour $r_1 = r_n = -s$

Par hypothèse, une solution robuste est définie par $\text{Min}_{x_1 \times x_2 \dots} \{ \text{Max}_{r_i} (R_1, \dots, R_i, \dots, R_{n+1}) \}$

Or, $\text{Max}_{ri} (R_{1,..}, R_{i,..}, R_{n+1}) = \text{Max} (R_{1..}^*, R_{i..}^*, R_{n+1}^*)$ puisque les $R^*_{i..}$ majorent les $R_{i..}$ dans chaque domaine. En pratique il n'y a donc que $n+1$ « états de la nature » à prendre en compte et non pas une infinité. •

Recherchons les $R_{i..}^*$ maximaux, $R_{i..}^* = \text{Max} (R_{1..}^*, R_{i..}^*, R_{n+1}^*)$

Notation : Dans la suite nous notons M le plus petit entier supérieur ou égal à $1+a/s$.

Théorème 1 : La solution robuste $x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$ définie par l'optimisation : $\text{Min}_{x_1, \dots, x_n} \{ \text{Max} (R^*_{1,..}, R^*_{i,..}, R^*_{n}) \}$ est caractérisée par :

$x^*_{M+1} = x^*_{M+2} = \dots = x^*_n = 0$; seules $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_M$ peuvent être non nulles .

x^*_1 est strictement positive.

Preuve:

La solution « robuste » peut être trouvée par le programme linéaire classique à $n+1$ variables et $n + 2$ contraintes suivant :

Min λ ;

$R^*_{i..} \leq \lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$

$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq 1$

Soit compte tenu de l'expression des $R^*_{i..}$

P : Min λ

$$\lambda + a x_1 - s x_2 - s x_3 \dots - s x_n \geq a/p_1 \quad (\text{P1})$$

$$\lambda - s x_1 + a x_2 - s x_3 \dots - s x_n \geq a/p_2 \quad (\text{P2})$$

.....

$$\lambda - s x_1 - s x_2 - s x_3 \dots + a x_n \geq a/p_n \quad (\text{Pn})$$

$$\lambda - s x_1 - s x_2 - s x_3 \dots - s x_n \geq 0 \quad (\text{P}_{n+1})$$

$$0 - p_1 x_1 - p_2 x_2 \dots - p_n x_n \geq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \dots, x_n \geq 0$$

λ de signe quelconque (en fait puisqu'il majore un regret il est toujours non négatif).

Le programme dual (en variables positives $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, v$) du programme précédent s'écrit :

$$D : \text{Max } a u_1/p_1 + a u_2/p_2 + \dots + a u_n/p_n - v$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = 1 \quad (D0)$$

$$a u_1 - s u_2 - \dots - s u_n - s u_{n+1} - p_1 v \leq 0 \quad \text{ou } (s+a) u_1 \leq s + p_1 v \quad (D1)$$

$$-u_1 + a u_2 - \dots - u_n - u_{n+1} - p_2 v \leq 0 \quad \text{ou } (s+a) u_2 \leq s + p_2 v \quad (D2)$$

$$-s u_1 - s u_2 + a u_3 - \dots - s u_n - s u_{n+1} - p_3 v \leq 0 \quad \text{ou } (s+a) u_3 \leq s + p_3 v \quad (D3)$$

...

$$s u_1 + s u_2 + \dots - a u_n - s u_{n+1} - p_n v \leq 0 \quad \text{ou } (s+a) u_n \leq s + p_n v \quad (Dn)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, v \geq 0$$

Lemme 2 : A l'optimum du Dual, il y a au maximum les M premières variables non nulles.

Preuve :

Pour v fixé, il faut donner la valeur maximale aux premières valeurs de u_i puisque les coefficients de la fonction économique sont décroissants et que la borne supérieure des u_i ne dépend que de v .

1. Cas $v^* = 0$

Les contraintes D1, D2, Di, ..., Dn s'écrivent : $u_i \leq s / (s+a)$

Compte tenu de D0, de la positivité de a , et de la décroissance des a/p_i , la solution du programme est dans ce cas :

$$u_i = s / (s+a) \text{ pour } i \leq M-1 ; u_M = 1 - \frac{M-1}{s+a} s ; u_i = 0, \text{ pour } M+1 \leq i \leq n .$$

$$\text{La valeur de la fonction économique est alors : } \frac{as}{s+a} \sum_{i=1}^{[M-1]} \frac{1}{p_i} + \left(1 - \frac{M-1}{s+a}\right) \frac{as}{p_M}$$

Notons que si $M < n$, les contraintes D_i pour $M \leq i \leq n$ ne sont pas saturées à l'optimum

2. cas $v^* > 0$

Dans ce cas les seconds membres augmentent en fonction du rang i de chaque contrainte car les p_i sont croissants. La solution construite avec les u_i de la solution

précédente (trouvée pour $v = 0$) et v^* est une solution réalisable. Si cette solution n'est pas optimale, il existe une solution voisine qui est préférable (propriété classique liée à la convexité du domaine des solutions réalisables). Compte tenu de la contrainte D0 toute augmentation d'une variable u_i pour $M \leq i \leq n$ diminue la valeur d'au moins une variable de base de la solution ($i < M$) et par suite pénalise le critère puisque les $1/p_i$ sont décroissant. Donc toute solution possédant une composante u_i strictement positive pour $i > M$ ne peut être optimale. Il y a donc au plus les M premières variables non nulles et au plus les M premières contraintes du dual sont saturées.

$$u_i^* = \frac{1}{s+a}(s+p_i v^*) \text{ pour } i < M; u_M^* = 1 - \sum_{i=1}^{M-1} u_i^*; u_i = 0, \text{ pour } M+1 \leq i \leq n \bullet$$

En conséquence d'après les conditions de complémentarité vérifiées pour les solutions optimales des deux programmes (primal et dual), il suit que :

$x_{M+1}^* = x_{M+2}^* = \dots = x_n^* = 0$ puisque D_{M+1}, \dots, D_n ne sont pas saturées. Les investissements de rangs strictement supérieurs à M ne sont jamais utilisés. •

Lemme 3 : A l'optimum du programme dual, si $u_i^* > 0$ alors $u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^* > 0$.

Preuve :

En effet, quelle que soit la valeur optimale v^* les variables sont bornées par des valeurs strictement positives et par suite, selon le résultat classique du problème « du sac à dos » en variables continues, la décroissance des a/p_i implique que les variables précédentes de u_i (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}) doivent prendre leur valeurs maximales. •

Lemme 4 : A l'optimum on a toujours $u_1^*, u_2^* > 0$

Preuve :

u_1^* ne peut pas être la seule valeurs non nulle car dans ce cas $u_1^* = 1$ d'après D0 et $s+a \leq s+p_1 v$ d'après D1, donc $v^* \geq a/p_1$. La fonction « objectif » du problème D est négative ou nulle ce qui n'est manifestement pas optimal ! D'après le Lemme 3 : on a donc $u_1^*, u_2^* > 0$ •

Il s'ensuit d'après les conditions de complémentarité entre programme primal et dual que les contraintes P1 et P2 sont saturées ce qui se traduit par $R^*_1(x^*) = R^*_2(x^*) = \lambda$. Ces deux regrets sont maximaux et les variables x_1^* et x_2^* sont liées par la relation :

$$x_1^* - x_2^* = \frac{a}{a+s} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right).$$

Ce qui implique comme conséquences :

— L'investissement dans le placement 1 est toujours strictement positif.

Il est supérieur à l'investissement du placement 2, cela se justifie par un coût plus faible pour 1 et une absence d'information sur les rentabilités.

L'écart entre ces investissements est inversement proportionnel à la volatilité ($a + s$) pour une rentabilité maximale (a) fixée. Cet écart croît avec la rentabilité maximale supposée et décroît avec le risque.

Théorème 2 : Un point optimal pour un jeu donné de r_i (point extrême du polyèdre) ne peut être solution robuste.

Preuve :

En effet, ces points ont pour coordonnées $(0, 0, \dots, 1/p_i, 0, \dots, 0)$. D'après la première conclusion du Lemme 3 : cela ne peut être que le point $(x_1=1/p_1, 0, 0, \dots, 0)$. Pour ce point les regrets sont $R^*_1=0$ (évidemment puisqu'on est à l'optimum) ; $R^*_i = a/p_i - 0 + s x_1$ pour $1 < i < n+1$; $R^*_{n+1} = s x_1$. En diminuant x_1 d'une petite quantité on diminue les R^*_i pour $i > 1$ tout en maintenant R^*_1 inférieur aux R^*_i pour $i > 1$. Le critère du regret maximum est donc amélioré. •

Le choix d'une solution optimale pour une hypothèse de rentabilités fixées n'est donc pas optimal.

Théorème 3 : $\text{Max}(R^*_{1,\dots}, R^*_{i,\dots}, R^*_n, R^*_{n+1}) = R^*_1 = R^*_2 = \dots = R^*_M$, c'est à dire que les regrets maximum ne sont à rechercher que sur les champs de paramètres 1, 2 ... M

Ce résultat vient de la positivité de u^*_i pour $i \leq M$; au moins les M premières contraintes du primal sont saturées et de valeur égale

3 Applications

- Cas où $a \leq s, n \geq 2$

Ce cas traduit que le risque est plus important que le gain, par exemple on peut gagner 30% du capital investi ($a = 0,3$) et perdre 50% ($s = 0,5$).

Dans ce cas $M = 2 > 1 + a/s$

Par suite, seules x_1, x_2 sont positives ou nulle (pour x_2), pour $i \geq 3$ $R^*_i = a/p_i + s x_1 + s x_2$ pour $i \geq 3$, on a donc $R^*_3 > R^*_4 > \dots > R^*_n > R^*_{n+1} = x_1 + x_2$ (d'après les hypothèses de croissance des p_i). $R^*_4, R^*_5, \dots, R^*_{n+1}$ n'interviennent pas dans le calcul du maximum. En revanche R^*_3 peut être égale à R^*_1 et R^*_2 .

Par suite, seules les contraintes P1, P2 et P3 sont nécessaires à la résolution de P.

Les solutions « robustes » sont dans un domaine, \mathbf{R} , à une dimension défini par $R^*_1=R^*_2$ et $R^*_3 \leq (R^*_1+R^*_2)/2=R^*_1=R^*_2$, soit

$$1. \quad x^*_1 - x^*_2 = a/(s+a) \times (1/p_1 - 1/p_2) \quad (c1)$$

$$2. \quad x^*_1 + x^*_2 \leq a/(s+a)(1/p_1 + 1/p_2 - 2/p_3). \quad (c2)$$

Dans ce domaine R^*_2 (et R^*_1) doivent être le plus petit possible.

Or $R^*_2 = a/p_2 + (s-a)x_2 + s x_1 - s x_2 = a/p_2 + (s-a)x_2 + s a/(s+a) \times (1/p_1 - 1/p_2)$, x_2 doit donc être nul si $a < s$; alors $x_1 = a/(s+a) \times (1/p_1 - 1/p_2)$

Interprétation : si le risque est plus fort que le gain, le portefeuille n'est constitué que de l'actif 1 (le moins onéreux). Le budget consacré est : $a/(s+a) \times (1/p_1 - 1/p_2)$. Il est d'autant plus élevé que l'écart entre p_1 et p_2 est grand.

Le budget n'est jamais consommé intégralement. En effet, $c1$ et $c2$ impliquent :

$$_ x^*_1 \leq a/(s+a)(1/p_1 - 1/p_3).$$

$$_ x^*_2 \leq a/(s+a)(1/p_2 - 1/p_3).$$

D'où $p_1 x^*_1 + p_2 x^*_2 \leq a/(s+a)(2 - p_1/p_3 - p_2/p_3) < 0,5 \times 2 = 1$.

Puisque l'écart $x_1 - x_2$ est constant le budget minimum est obtenu avec $x_2 = 0$, ce budget minimum est donc : $a/(s+a) \times (1/p_1 - 1/p_2)$.

Si $a = s$, x_1 et x_2 peuvent prendre n'importe quelles valeurs (respectant $c1$ et $c2$)

- Cas où $a > s$

Dans ce cas il y a en général $\min(n, M-1)$ ou $\min(n, M)$ investissements avec consommation totale ou partielle du budget. La diversification des investissements est liée au rapport a/s .

4 Conclusion

Il est amusant de remarquer que les conseils des gestionnaires de patrimoine préconisent de préférence une diversification des investissements plutôt que le choix d'un nombre réduit d'investissements au moindre coût d'entrée.

Ceci vient peut être du fait que pour le gestionnaire,

- D'une part, le critère implicite est vraisemblablement l'espérance mathématique du gain et non pas le risque encouru dans le pire cas.
- D'autre part les risques ou les gains des différents investissements sont estimés différemment selon le type de placement.

Notre analyse qui ne fait aucune distinction entre les investissements en termes d'informations, hormis le coût d'entrée, s'appliquerait donc avec plus de pertinence à un groupe homogène -en termes de volatilité- de placements.

Les résultats obtenus traduisent le caractère pessimiste du critère de Savage qui conduit généralement à un choix très prudent.

Il serait intéressant d'introduire dans cette analyse une diversification des taux de gain ou de perte en fonction du type d'investissement en conservant des relations du type $a-s = \text{constante}$ ou $a/s = \text{constante}$ traduisant l'équilibre entre espérance de gain et risques de pertes afin de voir quelles conclusions subsistent.

L'optimisation des gains nets ($r_i - c_i$) ne modifie pas les conclusions obtenues d'après les calculs numériques effectués, la démonstration légèrement plus complexe reste à être effectuée.

Références

Averbakh, Minmax regret linear resource allocation problems, Operations Research Letters 32 (2004), p 174-180

P. Kouvelis, G. Yu, Robust Discrete Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.