HAL open science

l'α -robustesse lexicographique : une relaxation de la β-robustesse

Rim Kalaï, Claude Lamboray

▶ **To cite this version:**

Rim Kalaï, Claude Lamboray. l'α -robustesse lexicographique : une relaxation de la β-robustesse. 2007. hal-00180062

HAL Id: hal-00180062

https://hal.science/hal-00180062v1

Preprint submitted on 19 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'α-robustesse lexicographique : une relaxation de la β-robustesse

Rim Kalaï*, Claude Lamboray†

Résumé

Dans ce papier, nous nous intéressons à deux approches de robustesse : d'un côté une approche fondée sur la quasi-optimalité que nous appellerons dans cet article la β-robustesse et d'un autre côté l'α-robustesse lexicographique. Nous mettons en évidence quelques propriétés communes aux deux approches. En outre, nous établissons un lien entre la β-robustesse et l'α-robustesse lexicographique qui montre que la seconde approche peut être considérée comme une relaxation de la première.

Mots-clefs : α-robustesse lexicographique, β-robustesse.

Abstract

In this paper, we are interested in two particular robustness approaches: on the one hand an approach based on the concept of quasi-optimality which we will call β-robustness and on the other hand lexicographic α-robustness. We will focus on properties that these two approaches have in common. Furthermore, we will establish a link between lexicographic α-robustness and β-robustness which will show that the first approach is indeed a relaxation of the latter approach.

Key words : Lexicographic α-robustness, β-robustness.

*LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 75775 Paris cedex 16, France / ESC Rouen, 76825 Mont-Saint-Aignan Cedex, France. {kalai@lamsade.dauphine.fr}

†SMG, Université Libre de Bruxelles, B-1050 Bruxelles, Belgique. clambora@ulb.ac.be

1 Introduction

Pour répondre à la préoccupation de robustesse, des approches extrêmement variées peuvent être envisagées. Nous nous intéressons ici à une forme de réponse particulièrement étudiée dans la littérature actuelle illustrée notamment dans [3, 4, 8, 12, 14, 15, 17]. Ces approches se divisent en deux grandes familles : celles qui se basent sur l'optimisation d'un critère de robustesse et celles qui imposent des conditions de robustesse qu'une solution doit vérifier pour être considérée comme robuste [2]. Dans ce travail, nous nous intéressons à deux approches de robustesse appartenant à la seconde famille. Nous nous limitons au cas où l'incertitude est représentée par un ensemble discret et fini de scénarios.

Dans la première approche, une solution est dite robuste si elle n'est pas très loin de l'optimum quel que soit le scénario considéré. Cette mesure de robustesse a été initialement introduite par Kouvelis et al. dans le cadre du problème d'aménagement d'usine [11]. Les auteurs cherchent à déterminer les solutions dont le coût est à moins de $(100 + p)\%$ de celui de la solution optimale pour tous les scénarios, p étant un réel positif fixé. Les solutions robustes sont donc celles dont le regret relatif est inférieur à $p\%$. Dans [19], Snyder appelle cette mesure de robustesse la *p-robustesse*. Ce concept de robustesse basé sur la proximité de l'optimum a été également repris par Gutiérrez et al. dans le cas du problème de conception de réseaux (*network design problem*) [6] et du problème d'approvisionnement international (*international sourcing*) [5], ainsi que par Mulvey et al. en programmation mathématique [14].

La seconde approche se fonde sur le fait qu'en situation d'incertitude pure, aucun scénario ne peut être distingué et donc l'ordre des scénarios n'a pas d'importance. Remarquons que l'ordre des scénarios n'a pas d'importance non plus dans la première approche. Néanmoins, la seconde approche va davantage plus loin en supposant que le vecteur de performance d'une solution (représentant les valeurs possibles que prend la solution pour les différents scénarios) est équivalent à tout vecteur obtenu par permutation, notamment le vecteur obtenu en ordonnant les performances de la pire à la meilleure. Une solution est alors considérée comme robuste, selon cette seconde approche, si chacune de ses performances réordonnées est proche de l'optimum. Cette approche, appelée *α-robustesse lexicographique*, a été proposée par Kalaï dans [7] et a été appliquée au problème de localisation 1-médian [8] ainsi qu'aux problèmes de sac à dos [9] et de plus court chemin [10].

En plus du fait d'appartenir à la famille d'approches imposant des conditions de robustesse, plusieurs points communs existent entre ces deux approches :

- Elles cherchent un ensemble de solutions et non pas une seule solution robuste.
- Elles peuvent donner un ensemble vide de solutions robustes, à la différence des approches fondées sur l'optimisation d'un critère de robustesse, comme par exemple le critère du coût ou du regret maximal.
- Elles tiennent compte de la dimension subjective de la robustesse [20] par le biais

d'un seuil d'indifférence à fixer par le décideur. En effet, ce paramètre traduit la perception du décideur d'être "proche de l'optimum".
- Elles considèrent tous les scénarios pour déterminer les solutions robustes, à la différence de l'approche minmax qui ne tient compte que du pire scénario.

Le but de ce travail est de mettre en relation ces deux approches ayant des philosophies similaires. Par souci d'homogénéité et vu que la p-robustesse fait appel à un seuil relatif alors que la α-robustesse lexicographique utilise un seuil absolu, nous proposons de comparer cette dernière avec l'approche qui considère qu'une solution est robuste si son regret absolu (non relatif) est inférieur à un seuil β pour tous les scénarios. Nous appelons cette dernière approche la *β-robustesse*. Soulignons que la β-robustesse et la p-robustesse reflètent le même concept de robustesse, la seule différence réside dans le choix de la nature du seuil (absolu ou relatif).

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous introduisons les notations utilisées le long de cet article ainsi qu'un exemple illustratif. La section 3 est dédiée à certaines propriétés vérifiées par les deux approches. Un lien entre la β-robustesse et la α-robustesse lexicographique est établi dans la section 4. La section 5 est consacrée aux conclusions.

2 Notations et exemple

2.1 Notations

Nous considérons un ensemble fini de solutions ou d'alternatives, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et un nombre fini de scénarios S, avec $|X| = n$ et $|S| = q$. Chaque alternative $x \in X$ est évaluée pour le scénario s par une fonction $f_s(x)$ (par exemple le coût). Sans perte de généralité, nous allons supposer que les fonctions $f_s(.)$ sont à minimiser.

Notons $f(x)$ le vecteur d'évaluations $(f_{s^1}(x), f_{s^2}(x), \ldots, f_{s^q}(x))$ de la solution x pour les différents scénarios. Le *vecteur de désutilité* de x, noté $\hat{f}(x)$, est obtenu en réordonnant $f(x)$ de la pire (c'est-à-dire la plus grande) évaluation à la meilleure (c'est-à-dire la plus petite) évaluation. On a donc :

$$\hat{f}_1(x) \geq \hat{f}_2(x) \geq \ldots \geq \hat{f}_q(x)$$

Notons que le vecteur de désutilité d'une solution x introduit un préordre complet sur l'ensemble des scénarios qui dépend de la solution x considérée. Soit x_s^* une solution optimale pour le scénario s (elle peut ne pas être unique) :

$$x_s^* = \arg\min_{x \in X} f_s(x) \tag{1}$$

De façon similaire, $\hat{x}_j^*$ est défini par rapport à la fonction $\hat{f}_j(.)$ comme suit :

$$\hat{x}_j^* = \arg\min_{x \in X} \hat{f}_j(x) \tag{2}$$

A partir de ces solutions, nous définissons deux nouvelles solutions notées x^* et $\hat{x}^*$ vérifiant :

$$f_s(x^*) = f_s(x_s^*) \qquad \forall s \in S \tag{3}$$
$$\hat{f}_j(\hat{x}^*) = \hat{f}_j(\hat{x}_j^*) \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\} \tag{4}$$

Si f est une fonction coût par exemple, la solution x^* correspond à la solution dont le coût est minimum pour chacun des q scénarios, alors que la solution $\hat{x}^*$ correspond à la solution dont le $k^{\text{ème}}$ plus grand coût est minimum pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. Signalons que, la plupart du temps, x^* et $\hat{x}^*$ ne sont pas des solutions réalisables mais correspondent à des solutions idéales. Elles jouent le rôle de *points de référence* auxquelles nous comparerons les solutions de X pour déterminer celles qui peuvent être considérées comme robustes.

Soient α et β deux réels positifs. Dans ce qui suit, nous allons noter :

- $\mathcal{R}_\beta$ l'ensemble des *solutions β-robustes* défini comme suit :

$$\mathcal{R}_\beta(X) \;=\; \{x \in X : \forall s \in S,\ f_s(x) - f_s(x_s^*) \leq \beta\} \tag{5}$$

- $\mathcal{R}_{\alpha-lex}$ l'ensemble des solutions *α-robustes lexicographiques* défini comme suit :

$$\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) \;=\; \{x \in X : \forall j \in \{1, \ldots, q\},\ \hat{f}_j(x) - \hat{f}_j(\hat{x}_j^*) \leq \alpha\} \tag{6}$$

Dans la sous-section qui suit, nous illustrons ces deux ensembles par un exemple pour que le lecteur puisse mieux se les représenter.

2.2 Exemple

Considérons l'exemple indiqué dans le tableau 1 avec $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $S = \{s_1, s_2\}$:

Le point idéal x^* de ce jeu de données correspond à la solution qui prend les valeurs 1 dans le premier scénario et 3 dans le deuxième scénario. Cette solution ainsi que celles de l'ensemble X sont représentées dans la Figure 1, où les axes correspondent aux deux scénarios. Pour une valeur de $\beta = 4$ par exemple, l'ensemble robuste $\mathcal{R}_\beta(X)$ est constitué de l'unique solution a_2. En effet, a_2 est à moins de 4 unités du point de référence à la fois pour le premier et le second scénario.

Afin de calculer l'ensemble $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$, les vecteurs de performance des différentes solutions doivent être réordonnés comme le montre le Tableau 2.

	s_1	s_2
$f_s(a_1)$	6	3
$f_s(a_2)$	4	7
$f_s(a_3)$	3	10
$f_s(a_4)$	1	11
$f_s(x^*)$	1	3

TAB. 1 – Evaluations des quatre solutions pour les deux scénarios

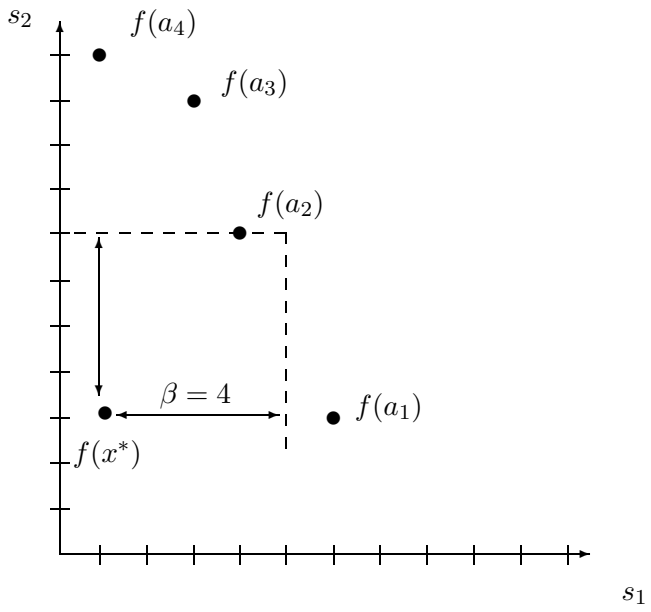

FIG. 1 – Evaluation des solutions dans les deux scénarios.

	$j = 1$	$j = 2$
$\hat{f}_j(a_1)$	6	3
$\hat{f}_j(a_2)$	7	4
$\hat{f}_j(a_3)$	10	3
$\hat{f}_j(a_4)$	11	1
$\hat{f}_j(\hat{x}^*)$	6	1

TAB. 2 – Evaluations réordonnées des quatre solutions

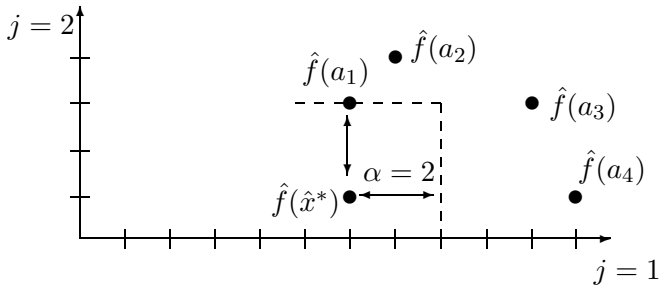

FIG. 2 – Evaluations réordonnées des solutions.

La solution $\hat{x}^*$ correspond maintenant au point idéal du jeu de données réordonné. Remarquons que les nouvelles dimensions ne correspondent plus forcément à un scénario en particulier. Par exemple, $\hat{f}_1(a_1) = 6 = f_1(a_1)$ provient du premier scénario et $\hat{f}_1(a_2) = 7 = f_2(a_2)$ provient du deuxième scénario. Ces solutions sont représentées dans la Figure 2. Pour une valeur $\alpha = 2$ par exemple, l'ensemble robuste $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ est constitué de l'unique solution a_1. En effet, a_1 est à moins de 2 unités du point idéal $\hat{x}^*$ à la fois pour la première et la deuxième composantes.

Les Figures 1 et 2 montrent une propriété intéressante des deux approches étudiées dans cet article et évoquée dans l'introduction. Pour une valeur $\beta < 4$ (resp. α < 2), l'ensemble $\mathcal{R}_\beta(X)$ (resp. $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$) est vide. En effet, les seuils β et α expriment un niveau de tolérance fixé par le décideur pour exprimer son point de vue quant à la robustesse d'une solution par rapport au point idéal. S'il fixe un seuil trop faible et si le point de référence n'est pas une solution réalisable, il n'y aura pas de solutions robustes selon ses exigences. Nous expliciterons, dans la section 3 les seuils minimaux garantissant l'existence de solutions robustes pour les deux approches, ainsi que plusieurs autres propriétés.

3 Propriétés des ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$

Dans cette section, nous mettons en évidence certaines propriétés vérifiées par les deux ensembles de solutions robustes $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ et $\mathcal{R}_\beta(X)$. Pour se référer génériquement aux deux ensembles, nous les notons $\mathcal{R}$ ou encore $\mathcal{R}(Y)$ pour spécifier qu'ils sont définis sur un sous-ensemble $Y \subseteq X$.

Propriété 1 *Soit $a \in X$. Si $f_s(a) \leq f_s(x)$ pour tout $x \in X$ et $s \in S$, alors $a \in \mathcal{R}(X)$.*

Preuve:
Remarque préliminaire : Soient x et y deux solutions de X. Podinovskii démontre dans

[16] que $\hat{f}_j(x) \leq \hat{f}_j(y)$ pour tout j si et seulement si il existe deux permutations σ et π telles que $f_{\sigma(s)}(x) \leq f_{\pi(s)}(y)$ pour tout s. En particulier, si $f_s(x) \leq f_s(y)$ pour tout $s \in S$ alors $\forall j \in \{1, \ldots, q\}, \hat{f}_j(x) \leq \hat{f}_j(y)$.

Par définition de a, $f_s(a) = f_s(x_s^*)$ pour tout $s \in S$. Donc $a \in \mathcal{R}_\beta(X)$. Par ailleurs et d'après le résultat de Podinovskii, on a $\forall k \leq q, \hat{f}_k(a) \leq \hat{f}_k(x)$ pour tout $x \in X$. Donc, $\forall k, \hat{f}_k(a) = \hat{f}_k(\hat{x}_k^*)$ et $a \in \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$. □

On comprend bien que la propriété 1 est une propriété souhaitée dans tout ensemble de solutions robustes. En effet, s'il existe dans X une solution qui domine toutes les autres, c'est-à-dire une même solution qui est optimale dans tous les scénarios, il est évident que cette solution doit être considérée comme robuste. Dans ce cas particulier, les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ sont non vides quel que soit le seuil choisi.

Propriété 2 *Les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ sont monotones respectivement par rapport à β et à α, i.e. :*

$$\begin{aligned} \beta \leq \beta' \;&\Rightarrow\; \mathcal{R}_\beta(X) \subseteq \mathcal{R}_{\beta'}(X) \\ \alpha \leq \alpha' \;&\Rightarrow\; \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) \subseteq \mathcal{R}_{\alpha'-lex}(X) \end{aligned}$$

Preuve: $x \in \mathcal{R}_\beta(X) \;\Rightarrow\; \forall s \in S, f_s(x) - f_s(x_s^*) \leq \beta \leq \beta' \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{R}_{\beta'}(X)$.
$x \in \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) \;\Rightarrow\; \forall k \leq q, \hat{f}_k(x) - \hat{f}_k(\hat{x}_k^*) \leq \alpha \leq \alpha' \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{R}_{\alpha'-lex}(X)$. □

Les paramètres β et α caractérisent le degré d'exigence du décideur par rapport à une solution idéale. Il est clair que plus cette exigence est faible (et donc plus le paramètre est grand), plus il y a de solutions qui répondent aux préférences du décideur.

Il peut arriver que, pour des seuils β ou α trop petits, aucune solution dans X ne vérifie la condition de robustesse requise. Par conséquent, les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ peuvent être vides. Notons β_{min} le seuil minimum pour lequel $\mathcal{R}_\beta(X)$ est non vide et α_{min} le seuil minimum pour lequel $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ est non vide. Soulignons que ces seuils minimaux dépendent de l'ensemble X. En toute rigueur, ils doivent être notés $\beta_{min}(X)$ et $\alpha_{min}(X)$. Néanmoins, par souci de simplicité, nous n'utiliserons ces dernières notations que s'il y a possibilité de confusion. Il est évident que, suite à la propriété de monotonie (propriété 2), les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ restent non vides pour tout $\beta \geq \beta_{min}$ et tout $\alpha \geq \alpha_{min}$.

Proposition 1

$$\beta_{min} = \min_{x \in X} \max_{s \in S} (f_s(x) - f_s(x_s^*))$$

$$\alpha_{min} = \min_{x \in X} \max_{1 \leq j \leq q} (\hat{f}_j(x) - \hat{f}_j(\hat{x}_j^*))$$

Preuve: $x \in \mathcal{R}_\beta(X) \Leftrightarrow \forall s \in S, f_s(x) - f_s(x_s^*) \leq \beta \Leftrightarrow \max_{s\in S}(f_s(x) - f_s(x_s^*)) \leq \beta$
Donc, $\beta_{min} = \min_{x\in X} \max_{s\in S}(f_s(x) - f_s(x_s^*))$.
Pour α_{min}, même preuve que précédemment en remplaçant $f_s(.)$ par $\hat{f}_j(.)$, x_s^* par $\hat{x}_j^*$ et β par α. □

De manière similaire, il existe un seuil à partir duquel chaque solution est robuste. Remarquons que, d'après la proposition 1, l'ensemble $\mathcal{R}_{\beta_{min}}(X)$ correspond exactement à l'ensemble des solutions optimales suivant le critère du regret maximal.

Propriété 3 *Les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ vérifient la propriété suivante :*

$$\textit{Si } Y \subseteq X \textit{ alors } \big(\mathcal{R}(X) \cap Y\big) \subseteq \mathcal{R}(Y)$$

Preuve: Soient Y une partie de X et a une solution telle que $a \in \mathcal{R}_\beta(X) \cap Y$.
On a donc $f_s(a) - f_s(x_s^*) \leq \beta$, $\forall s \in S$. Posons $x_s^*(Y) = \arg\min_{x\in Y} f_s(x)$. Par définition de x_s^*, on a $f_s(x_s^*(Y)) \geq f_s(x_s^*)$. Donc, pour tout $s \in S$, $f_s(a) - f_s(x_s^*(Y)) \leq \beta$, ce qui signifie $a \in \mathcal{R}_\beta(Y)$. Idem pour $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$. □

Cette propriété est appelée *propriété de Chernoff* [13] ou encore *condition d'hérédité* [1] en théorie de choix social. Elle signifie qu'une solution robuste sur un ensemble reste robuste sur une partie de cet ensemble. En d'autres termes, si une alternative n'est pas considérée comme robuste par rapport à une partie de X, elle ne peut être considérée robuste par rapport à l'ensemble X.

En particulier, si $a \notin \mathcal{R}(X)$, on peut alors déduire de cette propriété que $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(X \backslash \{a\})$ (il suffit de considérer $Y = X \backslash \{a\}$ dans la propriété 3). Il est donc intéressant de remarquer que, lorsqu'une solution de X n'appartenant pas à l'ensemble robuste est enlevée, l'ensemble robuste risque de s'agrandir. Soulignons que cela ne se produit que si l'on enlève une solution x telle qu'il existe s pour lequel $f_s(x) = f_s(x_s^*)$, respectivement il existe j pour lequel $\hat{f}_j(x) = \hat{f}_j(\hat{x}_j^*)$. En agissant de la sorte, on modifie le point de référence. Comme les ensembles sont définis par rapport à ces points de référence, la modification de ces points influence l'ensemble des solutions robustes.

Pour résumer, si on réduit l'ensemble de solutions, une solution robuste reste robuste (si elle n'est pas enlevée) et une solution non robuste peut devenir robuste. Si, en revanche, on augmente l'ensemble de solutions, une solution initialement non robuste reste non robuste tandis qu'une solution robuste peut cesser de l'être. Cela peut même se produire lorsque l'ensemble des solutions est enrichi d'une seule solution qui ne sera pas considérée comme robuste. Imaginons que, dans l'exemple de la section 2, la solution $f(a_5) = (8, 2)$ est ajoutée. Dès lors, l'ensemble des solutions β-robustes devient vide pour $\beta = 4$ alors qu'il contenait initialement la solution a_2.

D'autre part, si dans la propriété de Chernoff, on considère le cas particulier $Y = \mathcal{R}(X)$, il en découle le résultat suivant :

Propriété 4 *$\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ et $\mathcal{R}_{\beta}(X)$ sont idempotents, i.e. :*

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}(X)) = \mathcal{R}(X)$$

L'idempotence des ensembles $\mathcal{R}_{\beta}(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ implique qu'ils sont minimaux en un certain sens, puisqu'en ré-appliquant la démarche de recherche de solutions robustes à ces ensembles, on ne peut pas les réduire.

Les ensembles de solutions β-robustes et α-robustes lexicographiques vérifient une autre propriété faisant référence à deux sous-ensembles de X.

Propriété 5 *Les ensembles $\mathcal{R}_{\beta}(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ vérifient la propriété suivante :*

$$\forall Y_1, Y_2 \subseteq X, \quad \mathcal{R}(Y_1) \cap \mathcal{R}(Y_2) \subseteq \mathcal{R}(Y_1 \cup Y_2)$$

Preuve: $a \in \mathcal{R}_{\beta}(Y_1) \cap \mathcal{R}_{\beta}(Y_2) \Rightarrow \begin{cases} f_s(a) - \min_{y_1 \in Y_1} f_s(y_1) \leq \beta & \forall s \in S \\ f_s(a) - \min_{y_2 \in Y_2} f_s(y_2) \leq \beta & \forall s \in S \end{cases}$
Comme $\min_{z \in Y_1 \cup Y_2} f_s(z) = \min\{\min_{y_1 \in Y_1} f_s(y_1), \min_{y_2 \in Y_2} f_s(y_2)\}$, on en déduit que $f_s(a) - \min_{z \in Y_1 \cup Y_2} f_s(z) \leq \beta, \ \forall s \in S$. Ce qui implique $a \in \mathcal{R}(Y_1 \cup Y_2)$.
La preuve est similaire pour $R_{\alpha-lex}(X)$. □

Cette propriété est appelée *propriété d'expansion* [13]. Elle signifie que si une solution est robuste sur deux sous-ensembles séparément, alors elle reste robuste sur l'union de ces deux sous-ensembles.

En théorie du choix social, les propriétés de Chernoff et d'expansion sont importantes car elles caractérisent les fonctions de choix *rationalisables* par une relation ayant une partie asymétrique acyclique (voir théorème de Sen [13, 18])[1]. Une *fonction de choix* est une fonction qui, à tout sous-ensemble non vide $Y \subseteq X$, associe un sous-ensemble non vide $C(Y) \subseteq Y$. Une fonction de choix est dite *rationalisable* lorsqu'il existe une relation binaire S telle que l'ensemble des éléments maximaux de cette relation correspond à l'ensemble de choix. En fait, d'après Moulin [13], cette relation binaire correspond à la *relation de base* S associée à la fonction de choix et définie comme suit :

$$xSy \ \text{ ssi } \ x \in C(\{x, y\}) \tag{7}$$

[1]Pour que cette relation acyclique soit quasi-transitive, il faut qu'elle vérifie, en plus des propriétés de Chernoff et d'expansion, une troisième propriété appelée propriété d'Aizermann. Cette dernière stipule que si $\mathcal{R}(X) \subseteq Y \subseteq X$ alors $\mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)$. La propriété d'Aizermann n'est vérifiée ni pour $\mathcal{R}_{\alpha-lex}$ ni pour $\mathcal{R}_{\beta}$, comme le montre le contre-exemple suivant : f(x)=(6,3,3), f(y)=(4,4,4) et f(z)=(5,2,2).

où $C(\{x, y\})$ indique la fonction de choix appliquée au sous-ensemble $\{x, y\}$.

Notons que les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ ne correspondent pas toujours à des fonctions de choix, même s'ils ne sont pas vides sur X. En effet, considérons l'exemple de la section 2.2 pour $Y = \{a_1, a_4\}$ et $\beta = \beta_{min}(X) = 4$. On a $\mathcal{R}_\beta(Y) = \emptyset$ alors que $\mathcal{R}_\beta(X) = \{a_2\}$. La même constatation peut être faite sur l'exemple pour l'ensemble $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ en prenant $Y = \{a_2, a_4\}$ et $\alpha = \alpha_{min}(X) = 2$.

Néanmoins, il existe un seuil à partir duquel chacun de ces deux ensembles robustes correspond à une fonction de choix. Notons β^c le seuil tel que :

$$\forall Y \subseteq X,\ Y \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \mathcal{R}_{\beta^c}(Y) \neq \emptyset \tag{8}$$

De même, notons α^c le seuil tel que :

$$\forall Y \subseteq X,\ Y \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \mathcal{R}_{\alpha^c-lex}(Y) \neq \emptyset \tag{9}$$

Il est clair que $\beta^c \geq \beta_{min}(X)$ et $\alpha^c \geq \alpha_{min}(X)$. Dans l'exemple de la section 2.2, on a $\beta^c = 5 > \beta_{min}(X)$ et $\alpha^c = 3 > \alpha_{min}(X)$. D'après la définition de β^c et α^c, nous avons :

Proposition 2

$$\beta^c = \max_{Y \subseteq X, Y \neq \emptyset} \beta_{min}(Y)$$
$$\alpha^c = \max_{Y \subseteq X, Y \neq \emptyset} \alpha_{min}(Y)$$

Preuve: On a $\forall Y \subseteq X,\ Y \neq \emptyset,\quad \beta \geq \beta^c \geq \beta_{min}(Y) \ \Rightarrow\ \mathcal{R}_\beta(Y) \neq \emptyset$. Ce qui démontre que $\forall \beta \geq \beta^c$, $\mathcal{R}_\beta(X)$ est une fonction de choix. Il est clair que β^c est le plus petit seuil vérifiant cette propriété. Idem pour α^c. □

Si $\beta \geq \beta^c$ et $\alpha \geq \alpha^c$, alors les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ sont des fonctions de choix rationalisables par les relations de base suivantes :

$$\begin{aligned} xS_\beta y &\Leftrightarrow x \in \mathcal{R}_\beta(\{x, y\}) && (10)\\ &\Leftrightarrow f_s(x) - \min\{f_s(x), f_s(y)\} \leq \beta, \forall s \in S && (11)\\ &\Leftrightarrow f_s(x) - f_s(y) \leq \beta, \forall s \in S && (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xS_\alpha y &\Leftrightarrow x \in \mathcal{R}_{\alpha-lex}(\{x, y\}) && (13)\\ &\Leftrightarrow \hat{f}_j(x) - \min\{\hat{f}_j(x), \hat{f}_j(y)\} \leq \alpha, \forall j \in \{1, \ldots, q\} && (14)\\ &\Leftrightarrow \hat{f}_j(x) - \hat{f}_j(y) \leq \alpha, \forall j \in \{1, \ldots, q\} && (15)\end{aligned}$$

Notons qu'en plus d'avoir une partie asymétrique acyclique, les relations S_β et S_α sont complètes [13]. Les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ correspondent respectivement aux éléments maximaux de S_β et S_α.

Proposition 3

$$\forall \beta \geq \beta^c, \mathcal{R}_\beta(X) = \{x \in X : \forall y \in X \;\; xS_\beta y\}$$

$$\forall \alpha \geq \alpha^c, \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) = \{x \in X : \forall y \in X \;\; xS_\alpha y\}$$

Une interprétation de ce résultat est qu'au-delà d'un certain seuil, une solution robuste ne dépend plus du contexte (l'ensemble X entier) mais uniquement des évaluations par paire. En effet, une solution peut être éliminée dès lors qu'elle n'est pas robuste par rapport à une autre.

En plus des points communs énumérés dans l'introduction, nous venons de voir que les deux ensembles de solutions robustes se comportent de façon similaire par rapport à certaines propriétés. Cette ressemblance entre la β-robustesse et l'α-robustesse lexicographique suggère de chercher un lien entre ces deux approches, ce que nous nous proposons de faire dans la section qui suit.

4 Liens entre $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$

Dans cette section, nous établissons une relation entre l'ensemble des solutions β-robustes $\mathcal{R}_\beta(X)$ et l'ensemble des solutions α-robustes lexicographiques $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$.

Pour donner une idée intuitive du résultat, regardons l'évolution des ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ en fonction des seuils β et α dans l'exemple de la section 2.2. Le Tableau 3 représente cette évolution pour des seuils variant de 1 à 8. Par exemple, pour $\beta = \alpha = 4$, $\mathcal{R}_\beta(X) = \{a_2\}$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Dans cet exemple, il apparaît que pour des seuils β et α égaux, l'ensemble $\mathcal{R}_\beta(X)$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ quelle que soit la valeur de ces paramètres. Par monotonie de l'ensemble des solutions β-robustes, cette constatation reste valable pour $\beta \leq \alpha$.

Valeur du seuil	$\mathcal{R}_\beta(X)$	$\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$
0 - 1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{a_1\}$
3	$\emptyset$	$\{a_1, a_2\}$
4	$\{a_2\}$	$\{a_1, a_2, a_3\}$
5 - 6	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = X$
7	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = X$
8	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = X$	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = X$

TAB. 3 – Les ensembles $\mathcal{R}_\beta(X)$ and $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$ en fonction du seuil

Nous démontrons dans ce qui suit que cette relation est toujours vérifiée.

Théorème 1 *Si $\beta \leq \alpha$ alors $\mathcal{R}_\beta(X) \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$.*

Preuve: Soit $x \in \mathcal{R}_\beta(X)$. On a :

$$\forall s \in S,\ f_s(x) \leq f_s(x^*) + \beta \tag{16}$$

La solution x^* étant celle définie par l'équation (3). Grâce au résultat de Podinovskii énoncé dans la preuve de la propriété 1, nous pouvons déduire que :

$$\forall j \leq q,\ \hat{f}_j(x) \quad \leq \quad \hat{f}_j(x^*) + \beta. \tag{17}$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $k \leq q$:

$$\hat{f}_k(x^*) \quad \leq \quad \hat{f}_k(\hat{x}_k^*). \tag{18}$$

Par définition de x^*, nous avons, pour tout $x \in X$:

$$\forall s \in S :\ f_s(x^*) \leq f_s(x). \tag{19}$$

Cette inégalité est vraie en particulier pour $x = \hat{x}_k^* = \arg\min_{x \in X} \hat{f}_k(x)$, k étant fixé :

$$\forall s \in S :\ f_s(x^*) \leq f_s(\hat{x}_k^*). \tag{20}$$

Nous pouvons déduire que :

$$\forall j \leq q :\ \hat{f}_j(x^*) \leq \hat{f}_j(\hat{x}_k^*). \tag{21}$$

Ceci étant vrai pour tout j, c'est vrai pour $j = k$, ce qui démontre l'inégalité (18). Etant données l'inégalité (17) et le fait que $\beta \leq \alpha$, il s'en suit que :

$$\forall j \leq q,\ \hat{f}_j(x) \leq \hat{f}_j(\hat{x}_j^*) + \alpha. \tag{22}$$

Par conséquent, $x \in \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X)$. □

Remarquons que la démonstration reste vraie si on considère non pas l'ensemble X entier, mais seulement un sous-ensemble non vide $Y \subseteq X$. Ainsi, si $\beta \leq \alpha$ alors $\mathcal{R}_\beta(Y) \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-lex}(Y)$.

Il découle du théorème 1 que les seuils α_{min} et β_{min} vérifient la relation suivante :

Corollaire 1 $\alpha_{min} \leq \beta_{min}$

Preuve: Supposons que $\alpha_{min} > \beta_{min}$ et choisissons $\beta = \alpha = \beta_{min}$. On a donc $\mathcal{R}_\beta(X) \neq \emptyset$ et $\mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) = \emptyset$ ce qui contredit le théorème 1. □

Les seuils β^c et α^c, définis respectivement par les équations (8) et (9), vérifient ce qui suit :

Corollaire 2 $\alpha^c \leq \beta^c$

Preuve: Supposons que $\beta = \alpha = \beta^c$. On a donc :

$$\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \quad \mathcal{R}_\beta(X) \neq \emptyset$$

D'après le théorème 1, ceci implique que :

$$\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \quad \mathcal{R}_{\alpha-lex}(X) \neq \emptyset$$

Par conséquent, $\alpha^c \leq \alpha = \beta^c$. □

Le théorème 1 indique que l'α-robustesse lexicographique, tout en ayant beaucoup de propriétés communes avec la β-robustesse, est moins "sévère" que cette dernière puisqu'elle donne des solutions pour des seuils plus faibles que ceux exigés par la seconde approche. Cette caractéristique semble donner un argument en défaveur de l'α-robustesse lexicographique puisque, généralement, on cherche à réduire un ensemble de choix et non à l'augmenter. Néanmoins, rappelons que le seuil β_{min}, donnant le plus petit ensemble de solutions β-robustes non vide, n'est autre que le regret maximal minimal. Cette valeur peut être importante dans certains cas ; dans l'exemple de la section 2.2, β_{min} est deux fois plus grand que α_{min}. Il n'est donc pas toujours possible de trouver des solutions β-robustes pour des seuils raisonnables, d'où l'intérêt d'avoir une approche similaire qui donne des solutions pour des seuils plus faibles.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons voulu mettre en évidence la similitude entre l'α-robustesse lexicographique et la β-robustesse sur la base d'un certain nombre de propriétés. De plus, nous avons pu établir un lien direct entre ces deux approches qui suggère que la première approche est en quelque sorte une relaxation de la seconde.

Ce travail de comparaison entre les deux approches ne constitue qu'un premier pas dans cette direction. Nous nous interrogeons, par exemple, sur les problèmes pour lesquels les deux seuils minimaux α_{min} et β_{min} sont différents. La réponse à cette question pourrait donner plus de crédibilité à l'α-robustesse lexicographique si de tels problèmes étaient nombreux. Il faudrait aussi étudier davantage la relation de base qui rationalise les deux ensembles, dans un but algorithmique par exemple. Finalement, une caractérisation axiomatique des deux ensembles de solutions robustes permettra de pouvoir clairement les distinguer.

De manière plus générale, nous pensons qu'il est utile d'élargir ce type de comparaison à d'autres approches de robustesse existantes. En effet, cela permettra de mieux guider un analyste ou un décideur dans le choix de l'approche robuste la plus appropriée dans une application concrète.

Références

[1] ALESKEROV F. and MONJARDET B. *Utility maximization, choice and preference*. Springer, 2002.

[2] ALOULOU M.A., KALAÏ R., and VANDERPOOTEN D. Une nouvelle approche de robustesse : α-robustesse lexicographique. *Bulletin du Groupe de Travail Européen Aide Multicritère à la Décision*, Series 3(12), automne 2005.

[3] BERTSIMAS D. and SIM M. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, Ser.B 98 :49–71, 2003.

[4] GUPTA S.K. and ROSENHEAD J. Robustness in sequential investment decisions. *Management Science*, 15(2) :B18–B29, october 1968.

[5] GUTIÉRREZ G.J. and KOUVELIS P. A robustness approach to international sourcing. *Annals of Operations Research*, 59 :165–193, 1995.

[6] GUTIÉRREZ G.J., KOUVELIS P., and KURAWARWALA S.A. A robustness approach to uncapacitated network design problem. *European Journal of Operational Research*, 94(2) :362–376, 1996.

[7] KALAÏ R. *Une nouvelle approche de robustesse : application à quelques problèmes d'optimisation*. Phd thesis, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Paris, France, october 2006.

[8] KALAÏ R., ALOULOU M.A., VALLIN P., and VANDERPOOTEN D. Robust 1-median location problem on a tree. In *Proceedings of the third ORP3 conference (a Euro Conference for Young OR Reserchers and Practitioners)*, pages 201–212, Valencia, Spain, 6-10 september 2005.

[9] KALAÏ R. and VANDERPOOTEN D. Lexicographic α-robust knapsack problem : Complexity results. In *International Conference on Service Systems & Service Management (IEEE SSSM'06)*, Troyes, France, 25-27 october 2006.

[10] KALAÏ R. and VANDERPOOTEN D. Lexicographic α-robust shortest path problem. In *International Network Optimization Conference (INOC 2007)*, Spa, Belgique, april 2007.

[11] KOUVELIS P., KURAWARWALA A.A., and GUTIÉRREZ G.J. Algorithms for robust single and multiple period layout planning for manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, 63(2) :287–303, 1992.

[12] KOUVELIS P. and YU G. *Robust Discrete Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[13] MOULIN H. Choice functions over a finite set : a summary. *Social Choice Welfare*, 2 :147–160, 1985.

[14] MULVEY J.M., VANDERBEI R.J., and ZENIOS S.A. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43(2) :264–281, 1995.

[15] PERNY P. and SPANJAARD O. An axiomatic approach to robustness in search problems with multiple scenarios. *Nineteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 8-10 Août 2003. UAI 2003, Acapulco (Mexique).

[16] PODINOVSKII V.V. Multi-criterion problems with uniform equivalent criteria. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 15 :47–60, 1975.

[17] ROSENBLATT M.J. and LEE H.L. A robustness approach to facilities design. *International Journal of Production Research*, 25(4) :479–486, 1987.

[18] SEN A.K. Choice functions and revealed preferences. *The Review of Economic Studies*, 38(3) :307–317, 1971.

[19] SNYDER L.V. Facility location under uncertainty : A review. *IIE Transactions*, 38(7) :537–554, 2006.

[20] VINCKE P. About robustness analysis. In *Newsletters of the European Working Group «Multicriteria Aid for Decisions»*, number 8 in 3, pages 7–9, 2003.