



**HAL**  
open science

# Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière

Cyril Imbert, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

► **To cite this version:**

Cyril Imbert, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1998, 326, pp.1275-1278. hal-00176520

**HAL Id: hal-00176520**

**<https://hal.science/hal-00176520>**

Submitted on 3 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY et Cyril IMBERT

Université Paul Sabatier Toulouse III, UFR de Math. Infor. Gestion,  
118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE Cedex.

---

**Résumé.** Etant donné  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne et  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  sa jacobienne généralisée (au sens de Clarke) en  $\bar{x} \in \mathcal{O}$ , nous déterminons la fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , c'est-à-dire :  $\max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$  pour tout  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . L'enveloppe plénière de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  est définie par  $\{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\}$ ; c'est un convexe compact dont nous déterminons également la fonction d'appui.

*The support functions of Clarke's generalized jacobian matrix and of its plenary hull*

**Abstract.** Given a locally Lipschitz mapping  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  and its generalized jacobian matrix  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  at  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  (in Clarke's sense), we determine the support function of  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , that is :  $\max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$  for all  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . The plenary hull of  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  is defined as  $\{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u \text{ for all } u \in \mathbb{R}^n\}$ ; it is a compact and convex set whose support function is also determined.

---

## 1 Notations et préliminaires

**1.1** On note  $\langle, \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\langle\langle, \rangle\rangle$  celui dans l'espace matriciel  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire  $\langle\langle A, B \rangle\rangle := \text{tr}(A^T B)$ ). Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction (vectorielle) localement lipschitzienne sur  $\mathcal{O}$ , la (matrice) jacobienne généralisée au sens de Clarke de  $F$  en  $\bar{x}$  est l'ensemble convexe

compact non vide de  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  défini comme suit ([1]) :

$$(1) \quad \mathcal{J}F(\bar{x}) := \text{co}\{\lim JF(x_k) : x_k \rightarrow \bar{x}, x_k \in D_F\},$$

où  $D_F$  désigne l'ensemble des points de  $\mathcal{O}$  en lesquels  $F$  est différentiable, et  $JF(x_k)$  est la matrice jacobienne de  $F$  en  $x_k$ . Lorsqu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , le *gradient (ou sous-différentiel) généralisé* au sens de Clarke de  $f$  en  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  est le convexe compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  défini comme :

$$(2) \quad \partial f(\bar{x}) = \text{co}\{\lim \nabla f(x_k) : x_k \rightarrow \bar{x}, x_k \in D_f\},$$

où  $\nabla f(x_k)$  désigne le vecteur gradient de  $f$  en  $x_k$ . Cet objet  $\partial f$  a été énormément étudié, généralisé, et utilisé depuis son introduction par Clarke en 1973. Il n'en est pas de même de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  (pour les fonctions à valeurs *vectorielles*  $F$ ) et l'une des raisons est le manque d'une formule explicite de la fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , analogue à (ou généralisant) celle connue pour  $\partial f(\bar{x})$  depuis son introduction il y a vingt cinq ans. L'objet  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  pour  $F = (f_1, \dots, f_m)$  est plus précis que (i.e. contenu dans)

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial f_1(\bar{x}) \times \dots \times \partial f_m(\bar{x}) &:= \{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : \text{la } j\text{-ème ligne de } X \text{ est dans } \partial f_j(\bar{x}) \\ &\text{pour tout } j = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

car il prend en compte l'interdépendance éventuelle des fonctions-composantes  $f_j$ . Sont connus à propos de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  : le fait (démonstré par Warga, Yomdin, Fabian et Preiss) que sa définition est "insensible aux ensembles de mesure nulle" (i.e. on ne modifie pas  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  en imposant dans (1) que  $x_k \notin N_0$ , où  $N_0$  est de mesure de Lebesgue nulle) ; la fonction d'appui de ses *images*  $\mathcal{J}F(\bar{x})u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  ; son rôle dans des résultats d'Analyse non-différentiable comme le théorème des fonctions inverses ([1, 2]).

**1.2** Soit  $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ . La connaissance de  $Au$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , ne détermine pas  $\mathcal{A}$ , ce qui a conduit Halkin et Sweetser ([7, section3]) à proposer la notion d'ensemble *plein* :  $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$  est dit plein s'il contient tout  $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  tel que  $Bu \in \mathcal{A}$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ . L'*enveloppe plénière* de  $\mathcal{A}$ , notée  $\text{plen}\mathcal{A}$ , est le plus petit ensemble plein contenant  $\mathcal{A}$ . Dans notre contexte,  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  n'est pas toujours plein, excepté lorsque  $m$  ou  $n$  vaut 1 ; donc  $\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$  est un nouvel objet, convexe et compact, intermédiaire entre  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  et  $\partial f_1(\bar{x}) \times \dots \times \partial f_m(\bar{x})$ , dont les images (de  $u \in \mathbb{R}^n$ ) sont les mêmes que celles de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  néanmoins.

## 2 La fonction d'appui de la jacobienne généralisée

Le résultat principal de ce paragraphe concerne l'évaluation de

$$\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) := \max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$$

pour tout  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**THÉORÈME 2.1** Soit  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne et  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . On désigne par  $P_\epsilon(x)$  l'hypercube de  $\mathbb{R}^n$  de sommet  $x$  dont les arêtes issues de  $x$  sont les éléments de la base canonique, i.e.

$$P_\epsilon(x) := \{x + \epsilon t_1 e_1 + \dots + \epsilon t_n e_n : t_i \in [0, 1] \text{ pour tout } i\},$$

$frP_\epsilon(x)$  sa frontière,  $n(y)$  le vecteur normal sortant en  $y \in P_\epsilon(x)$ , et  $\sigma$  la mesure (de surface) de Lebesgue sur  $frP_\epsilon(x)$ , c'est-à-dire sur les faces de l'hypercube.

Alors pour  $n \geq 2$  :

$$(4) \quad \sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{frP_\epsilon(x)} \langle F(y), Mn(y) \rangle d\sigma(y).$$

Dans le cas où  $n = 1$  :

$$(5) \quad \sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(\bar{x}; 1),$$

où  $(\langle v, F \rangle)^\circ$  désigne la dérivée directionnelle généralisée (au sens de Clarke) de la fonction "scalarisée"  $\langle v, F \rangle$ .

La démonstration se fait en trois étapes :

(1). On se ramène à  $m = n$  et  $M = I_n$  (matrice identité) en posant  $G = M^T F$ ; alors  $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(I_n)$ .

(2). On démontre (c'est l'étape-clé) :

$$(6) \quad \sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(I_n) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{P_\epsilon(x)} \operatorname{div} G(y) d\mu(y),$$

où  $\operatorname{div}$  note la divergence et  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

(3). On applique la formule de Green-Stokes à la fonction localement lipschitzienne  $G$  sur l'hypercube  $P_\epsilon(x)$  pour  $n \geq 2$ .

**REMARQUES. 1.** La frontière de l'hypercube  $P_\epsilon(x)$  est la réunion de  $2n$  faces que l'on paramètre par  $[0, 1]^{n-1}$ . Si l'on note  $\hat{t}_i = t_1 e_1 + \dots + t_{n-1} e_{n-1}$ , somme dans laquelle n'intervient pas  $e_i$ , alors  $F_i^+ := \{x + \epsilon e_i + \epsilon \hat{t}_i : (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}\}$  et  $F_i^- := \{x + \epsilon \hat{t}_i : (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}\}$  sont deux faces dont les vecteurs normaux sortant sont  $e_i$  et  $-e_i$  respectivement. On décrit ainsi les  $2n$  faces de  $P_\epsilon(x)$  quand  $i$  parcourt  $\{1, \dots, n\}$ . Par changement de variables dans (4) on obtient

$$(7) \quad \sigma_{\mathcal{J}f(x_0)}(M) = \limsup_{x \rightarrow x_0, \epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{\langle f(x + \epsilon e_i + \epsilon \hat{t}_i) - f(x + \epsilon \hat{t}_i), M e_i \rangle}{\epsilon} dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Cette forme technique ne fait intervenir que des quotients différentiels et nous permet de travailler plus facilement avec la fonction d'appui.

**2.** Lorsque  $n = 1$ , l'intégrale de surface disparaît dans (7), ce qui conduit à (5), résultat qui avait déjà été établi dans [4].

Le Théorème 2.1 permet d'accéder à la règle de composition pour les jacobiniennes généralisées (la plus générale)  $\mathcal{J}(F_1 \circ F_2)(\bar{x}) \subset \operatorname{co}\{\mathcal{J}F_1(F_2(\bar{x})) \circ \mathcal{J}F_2(\bar{x})\}$ ; le seul endroit à notre connaissance où cette règle a été établie dans toute sa généralité est [3].

### 3 La fonction d'appui de l'enveloppe plénière de la jacobienne généralisée

Pour  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^m$ , on note  $u \otimes v$  la matrice (de rang 1) représentant l'application linéaire  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, x \rangle v$  dans les bases canoniques. La fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  ou de  $\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$  dans les directions particulières  $M = u \otimes v$  est connue depuis [4] :  $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(u \otimes v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u)$  ; le résultat qui suit généralise cette expression au cas de  $M$  quelconque.

THÉORÈME 3.1 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.1 :*

$$(8) \quad \sigma_{\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k (\langle v_i, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u_i) : \sum_{i=1}^k u_i \otimes v_i = M \right\}.$$

Un corollaire immédiat de ce théorème est : si on considère  $u, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $v, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$  tels que  $u \otimes v = u_1 \otimes v_1 + \dots + u_k \otimes v_k$ , alors

$$(9) \quad (\langle v, f \rangle)^\circ(x_0; u) \leq (\langle v_1, f \rangle)^\circ(x_0; u_1) + \dots + (\langle v_k, f \rangle)^\circ(x_0; u_k),$$

ce qui constitue le résultat principal (le Théorème 7) de [6]. Par ailleurs, les cas où l'infimum est atteint dans l'expression (8) est élucidé dans [5].

### Références

- [1] F. H. Clarke. On the inverse function theorem. Pac. J. Math., 64 :97–102, 1976.
- [2] F. H. Clarke. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, New York, 1983.
- [3] F. H. Clarke. Analyse non lisse et optimisation. Cours de 3ème cycle, Ecole doctorale de mathématiques, Université Paul Sabatier, 1993-1994.
- [4] J.-B. Hiriart-Urruty. Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix. Mathematical Programming Study, 17 :1–12, 1982.
- [5] C. Imbert. Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière. Technical report, LAO 98-02, Laboratoire "Approximation et Optimisation", Université Paul Sabatier de Toulouse, 1998.
- [6] Zs. Páles and V. Zeidan. Generalized Hessian for  $C^{1,1}$  functions in infinite dimensional normed spaces. Mathematical programming, 74 :p. 59–78, 1996.
- [7] T. H. Sweetser. A minimal set-valued strong derivative for vector-valued Lipschitz functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 23(4) :549–62, 1977.