HAL open science

Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables

Dominique Lecomte

To cite this version:

Dominique Lecomte. Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1993, 317, pp.1045-1048. hal-00175690

HAL Id: hal-00175690

https://hal.science/hal-00175690v1

Submitted on 30 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables.

Dominique LECOMTE

C. R. Acad. Sci. Paris 317, Série 1 (1993), 1045-1048

Résumé. On donne, pour chaque classe de Wadge non auto-duale Γ contenue dans la classe des G_δ, une caractérisation des boréliens qui ne sont pas potentiellement dans Γ, parmi les boréliens à coupes verticales dénombrables ; pour ce faire, on utilise des résultats d'uniformisation partielle.

Potential Wadge classes of Borel sets with countable sections.

Abstract. We give, for each non self-dual Wadge class Γ contained in the class of the G_δ sets, a characterization of Borel sets which are not potentially in Γ, among Borel sets with countable vertical sections; to do this, we use results of partial uniformization.

hal-00175690, version 1 - 30 Sep 2007

On va poursuivre dans cette Note l'étude des classes de Wadge potentielles entamée dans [L]. On utilisera les notations standard de la théorie descriptive des ensembles, qui peuvent être trouvées dans [Mo]. Par exemple, si ξ est un ordinal dénombrable impair, on notera $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ la classe des ensembles de la forme $\bigcup_{\eta<\xi,\ \eta \text{ pair}} U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$, où $(U_\eta)_{\eta<\xi}$ est une suite croissante d'ouverts. Rappelons les définitions de base :

Définitions. *(a) Soit Γ une classe de parties d'espaces polonais de dimension 0. On dit que Γ est une $classe\ de\ Wadge$ s'il existe un espace polonais P_0 de dimension 0, et un borélien A_0 de P_0 tels que pour tout espace polonais P de dimension 0 et pour toute partie A de P, A est dans Γ si et seulement s'il existe une fonction continue f de P dans P_0 telle que $A = f^{-1}(A_0)$.*
(b) Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X \times Y$. Si Γ est une classe de Wadge, on dira que A est $potentiellement\ dans$ Γ (ce qu'on notera $A \in pot(\Gamma)$) s'il existe des topologies polonaises de dimension 0, σ (sur X) et τ (sur Y), plus fines que les topologies initiales, telles que A, considéré comme partie de $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$, soit dans Γ.

Dans l'étude des relations d'équivalence boréliennes, par exemple dans [HKL], on étudie le pré-ordre qui suit. Si E (resp. E') est une relation d'équivalence borélienne sur l'espace polonais X (resp. X'), on pose

$$E \leq E' \Leftrightarrow \text{ il existe } f \text{ borélienne de } X \text{ dans } X' \text{ telle que } xEy \Leftrightarrow f(x)E'f(y).$$

La dernière relation peut s'écrire $E = (f \times f)^{-1}(E')$; or si E' est dans Γ (ou même si E' est pot(Γ)) et $E = (f \times f)^{-1}(E')$, E est pot(Γ). Ceci motive l'introduction de la notion de classe de Wadge potentielle.

Les classes de Wadge envisagées dans cette Note seront les classes de Baire $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, et leurs classes duales (la classe duale $\check{\Gamma}$ de la classe Γ est la classe des complémentaires des éléments de Γ ; par exemple, $\check{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \mathbf{\Pi}^0_1$). L'article [L] suggérait que l'étude des problèmes d'uniformisation partielle pourrait être riche d'enseignements pour l'étude des classes de Wadge potentielles ; cet espoir est confirmé par cette Note.

1 Quelques résultats sur l'uniformisation partielle.

On commence par donner un nouvel exemple de théorème vrai pour la mesure et pas pour la catégorie. Mauldin a démontré dans [Ma] le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soient X et Y des espaces polonais, λ (resp. μ) une mesure de probabilité sur X (resp. Y), et A un borélien de $X \times Y$ ayant ses coupes horizontales (resp. verticales) non dénombrables μ-presque partout (resp. λ-presque partout). Alors il existe un borélien F de X et un borélien G de Y tels que $\lambda(F) = \mu(G) = 1$, et un isomorphisme borélien de F sur G dont le graphe est contenu dans A.*

On peut se demander si on a un résultat analogue en remplaçant "ensemble de mesure nulle" par "ensemble maigre". On va voir que non.

Définitions 1.2 *(a) Un G_δ d'un espace topologique est dit $presque\text{-}ouvert$ (ou p.o.) s'il est contenu dans l'intérieur de son adhérence (ce qui revient à dire qu'il est dense dans un ouvert).*

(b) Si X et Y sont des espaces topologiques, une partie A de $X \times Y$ sera dite $localement\ à\ projections\ ouvertes$ (ou l.p.o.) si pour tout ouvert U de $X \times Y$, les projections de $A \cap U$ sont ouvertes.

Les ensembles l.p.o. se rencontrent par exemple dans la situation suivante : A est Σ^1_1 dans un produit de deux espaces polonais récursivement présentés. Si on munit ces deux espaces de leur topologie de Gandy-Harrington (celle engendrée par les Σ^1_1), A devient l.p.o. dans le nouveau produit. C'est essentiellement dans cette situation qu'on utilisera cette notion, au cours des preuves dans la section 2. Posons

$$A_0 := \{(x, K) \in 2^\omega \times \mathcal{K}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\} \ / \ x \in K\},$$

et soient $F \subseteq 2^\omega$, et $G \subseteq \mathcal{K}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\}$.

Théorème 1.3 *Le fermé A_0 est l.p.o. à coupes verticales non dénombrables, a ses coupes horizontales non dénombrables sur un ensemble co-maigre, et*

(a) Si F et G sont co-maigres et $f : F \to G$ est un isomorphisme borélien, $Gr(f) \not\subseteq A_0$.

(b) Si F et G sont presque-ouverts non vides et $f : F \to G$ surjective continue ouverte, $Gr(f) \not\subseteq A_0$.

Il résulte immédiatement du théorème 19.6 de [O] que sous l'hypothèse du continu, il existe une bijection idempotente Φ de $[0, 1]$ sur lui-même telle que E est maigre ssi $\lambda(\Phi^{-1}(E)) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. En analysant les raisons du résultat négatif 1.3, on peut montrer le

Corollaire 1.4 *Une telle fonction Φ n'est pas borélienne. De plus, sous l'hypothèse de détermination des jeux $\mathbf{\Delta}^1_{2n+3}$,* Φ n'est pas $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-mesurable.

Le résultat essentiel de cette section est le

Théorème 1.5 *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors il existe des p.o. non vides F et G (l'un contenu dans X, et l'autre dans Y), et $f : F \to G$ surjective continue ouverte dont le graphe est contenu dans A, ou dans l'ensemble $A^* := \{(y, x) \ / \ (x, y) \in A\}$.*

La partie (b) du théorème 1.3 montre qu'on ne peut pas, en général, avoir uniformisation dans les deux sens, malgré des hypothèses symétriques. Cependant, on a uniformisation si l'on n'exige pas que l'image soit "grosse" :

Proposition 1.6 *Soient X et Y des espaces métrisables séparables de dimension 0, Y étant complet, et $f : Y \to X$ une surjection continue ouverte ; alors il existe un homéomorphisme g de X sur une partie de Y tel que $f \circ g = Id_X$.*

Bien sûr, ce résultat est faux si on enlève la condition de dimension sur X.

Corollaire 1.7 *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors A est uniformisable sur un presque-ouvert non vide de X par une application continue et ouverte sur son image.*

Cette image est en général rare, d'après ce qui précède.

2 Applications aux classes de Wadge potentielles.

Soit ξ un ordinal dénombrable non nul. On définit $f : \omega^{<\omega} \to \{-1\} \cup (\xi + 1)$, par récurrence sur $|s|$, comme suit : $f(\emptyset) = \xi$ et

$$f(s^\frown n) = \begin{cases} \bullet \ -1 \text{ si } f(s) \leq 0, \\ \bullet \ \theta \text{ si } f(s) = \theta + 1, \\ \bullet \text{ un ordinal impair de } f(s) \text{ tel que la suite } (f(s^\frown n))_n \text{ soit co-finale dans} \\ f(s) \text{ et strictement croissante si } f(s) \text{ est limite non nul.} \end{cases}$$

On définit alors des arbres : $T_\xi := \{s \in \omega^{<\omega} \ / \ f(s) \neq -1\}$ et $T'_\xi := \{s \in T_\xi \ / \ f(s) \neq 0\}$. Dans la suite, si f_s est une fonction partielle de X dans Y ou de Y dans X, on notera G_s la partie de $X \times Y$ égale au graphe de f_s si f_s va de X dans Y, et égale à $\mathrm{Gr}(f_s)^*$ sinon.

Théorème 2.1 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien pot$(\mathbf{\Sigma}^0_3)$ et pot$(\mathbf{\Pi}^0_3)$ de $X \times Y$, et ξ un ordinal dénombrable non nul.*

(a) Si ξ est pair, A est non-pot$(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais parfaits Z et T de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \text{ paire}} G_s$ et $B_i := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \text{ impaire}} G_s$, on ait $\overline{B_p} = B_p \cup B_i$, $B_p \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, $B_i \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$, et $G_s = \overline{\bigcup_{n \in \omega} G_{s^\frown n}} \setminus (\bigcup_{n \in \omega} G_{s^\frown n})$ si $s \in T'_\xi$.

(b) Si ξ est impair, A est non-pot$(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s\in T_\xi \ / \ |s| \text{ paire}} G_s$ et $B_i := \bigcup_{s\in T_\xi \ / \ |s| \text{ impaire}} G_s$, on ait $\overline{B_i} = B_p \cup B_i$, $B_i \subseteq (u\times v)^{-1}(A)$, $B_p \subseteq (u\times v)^{-1}(\check{A})$, et $G_s = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n}} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n})$ si $s \in T'_\xi$.

L'hypothèse "$A \in \text{pot}(\mathbf{\Sigma}^0_3) \cap \text{pot}(\mathbf{\Pi}^0_3)$" recouvre en particulier le cas où A est à coupes verticales dénombrables, ou à coupes verticales co-dénombrables.

Théorème 2.2 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X \times Y$.*

(a) A est non-pot$(\mathbf{\Pi}^0_1)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z' et T' parfaits de dimension 0, une suite d'ouverts-fermés (A_n) (resp. (B_n)) de Z' (resp. T'), des surjections continues ouvertes f_n de A_n sur B_n, et des fonctions continues U et V tels que si $B = \bigcup_{n>0} Gr(f_n)$, on ait les inclusions $\emptyset \neq Gr(f_0) \subseteq \overline{B} \setminus B$ et $B = (U\times V)^{-1}(A)$.

(b) A est non-pot$(\mathbf{\Pi}^0_1)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0 non vides, une suite d'ouverts denses (E_n) de Z, des applications continues ouvertes g_n de E_n dans T, et des fonctions continues u et v tels que $(g_n)_{n>0}$ converge simplement vers g_0 sur $\bigcap_{n\in\omega} E_n$, $Gr(g_0) \subseteq (u\times v)^{-1}(\check{A})$ et $\bigcup_{n>0} Gr(g_n) \subseteq (u\times v)^{-1}(A)$.

On note, si Γ est une classe de Wadge non auto-duale, Γ^+ la classe de Wadge successeur de Γ pour l'inclusion.

Proposition 2.3 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X \times Y$, et k un entier naturel non nul. Alors on a les équivalences suivantes :*

(a) A est non-pot$(\mathbf{\Delta}^0_1) \Leftrightarrow A$ est non-pot$(\mathbf{\Sigma}^0_1) \Leftrightarrow$ la projection de A sur Y est non dénombrable.

(b) A est non-pot$(\check{D}_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)) \Leftrightarrow A$ est non-pot$(\check{D}_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)) \Leftrightarrow A$ est non-pot$(D_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)^+)$.

(c) A est non-pot$(D_{2k+1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)) \Leftrightarrow A$ est non-pot$(D_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)) \Leftrightarrow A$ est non-pot$(D_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)^+)$.

Les boréliens à coupes verticales dénombrables sont pot$(\mathbf{\Sigma}^0_2)$, donc il nous reste à caractériser lesquels de ces boréliens sont pot$(\mathbf{\Pi}^0_2)$ (en effet, les seules classes de Wadge non auto-duales contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2$ sont $\{\emptyset\}$, $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, et leurs classes duales). On a le résultat classique d'Hurewicz, démontré dans [SR] :

Théorème 2.4 *Soit X un espace polonais, et A un borélien de X. Alors A est non-$\mathbf{\Pi}^0_2$ si et seulement s'il existe E dénombrable sans point isolé tel que $\overline{E} \setminus E \approx \omega^\omega$ et $E = A \cap \overline{E}$.*

Théorème 2.5 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien de $X \times Y$ à coupes verticales dénombrables. Alors A est non-pot$(\mathbf{\Pi}^0_2)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0 non-vides, des injections continues u et v, des ouverts denses (A_n) de Z, des applications continues et ouvertes f_n de A_n dans T, tels que pour tout x dans $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, l'ensemble $E_x := \{f_n(x) \ / \ n \in \omega\}$ soit sans point isolé, $\overline{E_x} \setminus E_x \approx \omega^\omega$, et $E_x = (u\times v)^{-1}(A)_x \cap \overline{E_x}$.*

3 Références.

[HKL] L. A. Harrington, A. S. Kechris et A. Louveau, *A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations,* J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 903-928

[L] D. Lecomte, *Classes de Wadge potentielles et théorèmes d'uniformisation partielle,* Fund. Math. 143 (1993), 231-258

[Ma] R. D. Mauldin, *One-to-one selections, marriage theorems,* Amer. J. Math. 104 (1982), 823-828

[Mo] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory,* North-Holland, 1980

[O] J. C. Oxtoby, *Measure and category,* Springer-Verlag, 1971

[SR] J. Saint Raymond, *La structure borélienne d'Effros est-elle standard ?,* Fund. Math. 100 (1978), 201-210