Euclide et Héron : Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l'Antiquité ?

Bernard Vitrac

EUCLIDE ET HÉRON :
Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l'Antiquité ?

Bernard Vitrac

1. Introduction

Dans l'un de ses tout derniers articles[1] Wilbur Knorr revient sur le traité mathématique auquel il avait consacré ses premières recherches : les *Éléments* d'Euclide[2], et se propose, dans cet important travail, de réfléchir sur les contributions récentes dans ce domaine. Manifestement les travaux de Ian Mueller[3] ont conduit Knorr à admettre que la composition des *Éléments* ne relève certainement pas d'une simple compilation — c'était le point de vue qu'il soutenait à la suite de Van der Waerden dans son premier livre[4] — mais suppose au contraire un travail d'harmonisation assez subtil.

Qui plus est ses propres travaux sur le corpus archimédien[5] ont convaincu Knorr que la présentation des *Éléments* — du moins telle que nous la connaissons — est assez "récente" et ne remonte certainement pas au milieu, voire au début du IV^e^ siècle avant notre ère; cette présentation serait plutôt à rapporter aux travaux de l'Académie entre l'époque d'Eudoxe et celle d'Euclide. Les lecteurs des travaux de Knorr se souviennent sans doute du jugement assez sévère que notre collègue portait sur Dosithée, et plus globalement sur l'école d'Alexandrie contemporaine d'Archimède, qu'il taxait d'"académisme". L'article qui nous sert ici de point de départ, va dans le même sens et on peut même ajouter que, selon Knorr, la composition des *Éléments* d'Euclide doit certainement être rattachée à cette approche des mathématiques et de leur enseignement, approche que notre collègue n'approuve pas, parce qu'elle privilégie la forme synthétique d'exposition — laquelle opacifie toute démarque heuristique — et parce qu'elle bannit toute considération concrète ou pratique, à la différence d'autres

---

[1] Voir Knorr, W. R., What Euclid Meant : On the Use of Evidence in Studying Ancient Mathematics. in Bowen A. C. (éd.), *Science and Philosophy in Classical Greece*. Essays derived from a conference held by the Institute for Research in Classical Philosophy and Science. Garland Publishing Inc, New York and London, 1991, pp. 141-158.

[2] Voir Knorr, W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht/ Boston. D. Reidel, 1975.

[3] Tout particulièrement sa belle monographie *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge (Mass.) and London, M. I. T. Press. 1981.

[4] Comparer *op. cit.,* p. 303 et la note 81 page 149-150 de 'What Euclid Meant' dans laquelle il juge simplificatrices les affirmations de Van der Waerden qu'il avait lui-même reprises à son compte au début de ses recherches.

[5] En particulier Knorr, W. R., Archimedes and the pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 28, 1978, pp. 182- 244 et Knorr, W. R., Archimedes and the Elements : Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean Corpus. *Archive for History of exact Sciences,* 19, 1978, pp. 211-90. J'ai essayé de présenter ces travaux dans un article précédent des cahiers du Centre Jean Palerne : voir Vitrac, B., A propos de la chronologie des œuvres d'Archimède. Dans Guillaumin, J. Y. (dir.), *Mathématiques dans l'Antiquité*. Publications de l'Université de Saint-Etienne, 1992, pp. 59-93.

présentations à finalité pédagogique comme les *Métriques* de Héron, les *Arithmétiques* de Diophante ou l'*Almageste* de Ptolémée :

> « But as a technical introduction, the *Elements* is surely remarkable — for its sophistication on the one hand, and its opacity on the other. For a presentation of the basics in geometry, one would find Hero'*Metrica* a more likely text. In *Metr*. i, for instance, Hero sets out the different kinds of plane figures in order (triangles, regular polygons, circles, parabolas and ellipses, conical and spherical surfaces) with arithmetical rules for computing their areas, and likewise for the volumes of solid figures in book 2… In a very few cases derivations are provided (as for the circle-segment rule in *Metr*. i). But for the most part, the rules are only stated, together with details of the working of explicit problems; for formal justifications the student is referred to the appropriate writings by Euclid, Archimedes, and others »[6].

D'où une appréciation très sévère sur les qualités pédagogiques d'Euclide :

> « In contrast with these examples, Euclid provides no insight into the application of his theorems, nor does he take up any of the related practical aspects, like the nature and manipulation of instruments for the construction of problems. For all his theorems on prime numbers, perfect numbers… not one concrete example is provided of any. Because he adopts the synthetic mode exclusively, the reasons behind the steps of his proofs and constructions — why, for instance, an auxiliary term is introduced or a particular proportion is used — are left unexplained. At times one is awed, even mystified, at the *dénouement* of an especially complicated proof … In all, the student is drawn into a passive appreciation of Euclid's often imposing reasoning, rather than stimulated to develop active expertise in solving problems »[7].

Knorr considère l'approche théorique (c'est-à-dire "contemplative") telle qu'elle est lisible dans les *Éléments* comme particulièrement adaptée à l'enseignement dispensé dans les écoles philosophiques, dans la mesure où l'étudiant était censé apprendre les mathématiques « through the contemplation of its finished form, rather than through exercise in its production »[8], ce qui, selon Knorr, indique une différence fondamentale entre les vues d'Euclide sur la recherche et la pédagogie et les nôtres. Il pense sans doute aux effets sclérosants de cette pédagogie quand il revient sur l'activité "scolastique" de l'école d'Alexandrie, activité qui déborde d'ailleurs largement le champ des mathématiques.

---

[6] 'What Euclid Meant', *op. cit.,* pp. 153-154.
[7] *Ibid.,* pp. 154-155.
[8] *Ibid.,* p. 158.

Pour ma part je ne suis pas particulièrement ébloui par la « transparence heuristique » du traité de Diophante. Certes les *Arithmétiques* proposent de résoudre des problèmes[9], mais on pourrait dire la même chose des traditions mathématiques égyptiennes, babyloniennes ou chinoises[10]. Je ne suis pas sûr qu'elles accordaient un rôle véritablement plus actif aux étudiants en mathématiques que la pédagogie grecque.

Je n'ai nullement l'intention de "sauver" la pédagogie euclidienne. A différentes époques, les mathématiciens ont estimé nécessaire de produire une synthèse condensée de résultats antérieurs pour permettre leur assimilation sans devoir suivre toutes les péripéties de leurs découvertes et en oubliant les motivations qui en avaient commandé la recherche. Avec l'idée qu'une telle présentation pourrait servir de point de départ à de nouveaux développements. Pour être concis, ces exposés sont généralement synthétiques et pas nécessairement très suggestifs sur le plan heuristique. On peut trouver cette approche pédagogiquement critiquable et en préférer d'autres; on ne peut pas en majorer la signification historique, ni nécessairement la rapporter à l'utilisation du traité dans les écoles philosophiques. Par exemple je ne crois pas que les *Éléments d'Analyse* de Jean Dieudonné (Paris, Gauthier-Villars, 1971-1978) aient été utilisés dans des cursus philosophiques; à moins d'admettre que les départements de mathématiques de l'Université de Paris soient des succursales de l'école néo-pythagoricienne !

Il me paraît plus intéressant de mettre l'accent ailleurs, sur une caractéristique formelle de certains textes mathématiques grecs qui ne me semble pas avoir été suffisamment étudiée. Je l'ai déjà signalée dans mon commentaire aux Livres arithmétiques des *Éléments*[11] : il existe, dans les mathématiques grecques, toute une série de questions qui, de par leur forme, ne sont pas sans rappeler les procédures de calcul que l'on trouve dans les textes mathématiques proche-orientaux et que j'appelle « procédures calculatoires », mais que l'on peut aussi désigner comme des méthodes "algorithmiques" malgré l'anachronisme évident de cette désignation.

Mes remarques, au cours du commentaire d'Euclide, s'appuyaient pour l'essentiel sur une comparaison entre les Livres arithmétiques des *Éléments* et l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase. On trouve, dans l'*Introduction,* des procédures présentées comme une suite d'opérations à enchaîner. Pour en parler Nicomaque utilise des désignations spécifiques : il parle alors de "méthode" (μέθοδος), de "marche à suivre" (ἔφοδος)[12], ou de "règles de procédure" (προστάγματα)[13] qu'il

---

[9] Mais sans livrer d'indications heuristiques.

[10] Knorr signale ce rapprochement dans les cas égyptien et babylonien et évoque même la possibilité d'un transfert de connaissances. *Ibid.,* p. 155.

[11] Voir *Les Eléments*. Volume 2. Livres V à IX. Trad. franç. et comm. par Bernard Vitrac. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, 1994, pp. 491-492.

[12] *Nic. Ar.,* I, X, 6-9 (genèse des nombres impair-pairs), pp. 23.7 - 24.23; (ἔφοδος en 23.8); *Ibid.,* I, XVI. 4-7 (genèse des nombres parfaits), pp. 40.23 - 43. 19 (ἔφοδος en 42.14; τὸ τῆς ἐφόδου καθολικὸν πρόσταγμα en 43.15); *Ibid.*, II, XXVII. 7 (la détermination des trois médiétés fondamentales), pp.

faut suivre pas à pas. Comme dans les textes scolaires (grecs ou orientaux[14]) le lecteur est interpellé à la deuxième personne : "poses ceci; fais cela…". Ainsi pour la détermination des trois médiétés fondamentales :

> « Et une méthode (ἔφοδος), comme si tu façonnais avec art les termes préalablement montrés selon les trois proportions, qu'elle soit telle pour toi (τοιαύτη ἔστω σοι) : pour les termes préalablement montrés aussi bien impairs que pairs, tu trouveras la [médiété] arithmétique : ajoute les extrêmes et place la moitié de ceux-ci au milieu, ou bien, coupant en deux [parties égales] l'excès du plus grand sur le plus petit, tu auras le moyen en [l'] ajoutant» au plus petit; pour la géométrique, en prenant le côté carré du promèque [contenu] par les extrêmes tu produiras le terme moyen, ou bien, en voyant le rapport, celui qu'ont les termes l'un relativement à l'autre, et en coupant celui-ci en deux [parties égales], tu produis le moyen, par exemple pour le [rapport] quadruple, le [rapport] double; pour l'harmonique il faut multiplier la différence des extrêmes par le plus petit [terme] et il faut appliquer ce produit sur le [terme] composé à partir des extrêmes[15], et ensuite il faut ajouter la largeur de l'application au plus petit [terme] et le produit sera médiété harmonique »[16].

Ces prescriptions évoquent une pédagogie par l'"exemple". A certains égards elles ne sont pas sans évoquer le problème euclidien[17] : par exemple on trouve, dans les *Éléments*, la formule : « γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν » (ce qui était prescrit aura été fait) qui, en principe, convient aux problèmes[18]. Les verbes "ἐπιτάσσω" et "προστάσσω" participent au même registre, celui de la prescription.

Dans ce qui suit je me propose d'examiner ce qu'il en est dans certains textes géométriques de Héron. Ceux-ci me paraissent fondamentaux pour la question soulevée ici et réclament, de ce point de vue, une étude approfondie que j'ai commencée mais

---

139.21-140.12 (voir texte *infra*). Cf. *Ibid.,* I, XIII. 2-10 (crible d'Eratosthène), pp. 29. 17 - 34.15 (μέθοδος en 29.20 et 34.11).

[13] *Ibid.*, I, XXIII. 8-17 (les règles dites d'Adraste), pp. 66.15 - 70.15 et II, II. 1-2, pp. 74.16 - 75.14 (τα προστάγματα en 66. 19; 67.9; 67. 22; 68.5).

[14] Pour une analyse formelle détaillée des textes proche-orientaux, v. les différents travaux de J. Ritter (Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie, in [Serres, *Eléments d'histoire des sciences*. Paris, Bordas, 1989, pp. 39-61] et sa thèse *Pratiques de la raison en Mésopotamie et en Egypte aux IIIe et IIe millénaires*. Thèse de doctorat. Université de Paris-Nord. Soutenue le 4 Mars 1993., pp. 296-318).

[15] Soit A, B (A < B) les termes donnés; il faut appliquer le "produit" (B - A). A sur la "somme" A + B, en termes modernes, diviser (B - A). A par A + B.

[16] *Nic. Ar.,* II, XXVII. 7, pp. 139. 21 - 140. 12. La médiété harmonique M est donnée par :

$$M = A + \{(B - A).A] / (A + B)\}.$$

[17] Sur la distinction classique "problème" / "théorème" dans les *Eléments*, voir *Les Eléments*. Volume 1, Introduction générale, IV, XIV, pp. 133-137. Sur le caractère affaibli de cette opposition dans les Livres arithmétiques, voir *Les Eléments*. Volume 2, *op. cit.,* p. 277.

[18] Voir par exemple les Propositions II. 14, VI. 28, VIII. 2, XI. 11; cela dit on la trouve aussi dans les théorèmes VII. 31-32; voir *Les Eléments*. Volume 2, *op. cit.,* pp. 340-341.

que je suis loin d'avoir achevée. Le lecteur trouvera ici une première approche, sur la base de quelques exemples.

2. Les procédures effectives dans les *Métriques*

Comme le souligne Knorr, on considère généralement le corpus des textes rapportés à Héron[19] comme un corpus à finalité pédagogique, probablement utilisé dans la formation des "techniciens", scolaire donc, en un sens, mais d'un niveau assez élevé si on le compare aux textes que nous livrent certains papyri ou "manuels d'écoliers" que l'on peut davantage rattacher à l'enseignement élémentaire : calcul, maniement des fractions, apprentissage de quelques règles de conversions métrologiques, petits problèmes présentant une fiction pédagogique d'inspiration commerciale … D'ailleurs les traités rapportés à Héron n'ignorent manifestement pas la "grande" tradition mathématique des *Éléments* d'Euclide et des monographies d'Archimède.

Toute aussi traditionnelle est l'idée que ce type de géométrie métrique a existé bien avant l'époque de Héron[20], mais qu'elle a pu être développée à nouveau sous l'influence des contacts étroits que les Grecs établirent avec les Babyloniens et les Égyptiens à l'époque hellénistique et dont l'emprunt partiel du système sexagésimal de position (d'origine babylonienne) pour noter la partie fractionnaire des nombres en astronomie porte témoignage. J'ai repris ailleurs, en collaboration avec J. Ritter, l'examen de ces relations entres les Grecs et leurs voisins "orientaux"[21]. Je me permets d'y renvoyer, tout en reproduisant certains exemples mathématiques, mais en mettant l'accent sur l'aspect technique des "procédures calculatoires".

Je partirai d'un exemple très simple : le problème 2 du premier Livre des *Métriques* [22].

1. Soit un triangle rectangle ABC ayant l'angle droit en B; et soit d'une part AB de 3 unités, d'autre part BC de 4 unités. Trouver l'aire du triangle et l'hypoténuse.

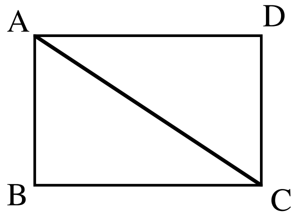
---

[19] Outre les *Métriques,* en trois Livres, considérés comme authentiques, tout un ensemble de textes de caractère compilatoire : *Geometrica, Stereometrica, De mensuris…* a été transmis sous le nom de Héron. Pour l'ensemble de ces textes géométriques j'ai utilisé l'édition de H. Schöne et J. L. Heiberg, *Heronis Alexandrini Opera quæ supersunt omnia,* vol. III à V, Leipzig, Teubner, (resp. 1903, 1912, 1914); réimpr. Stuttgart, 1976.

[20] Premier siècle de notre ère si l'on suit la reconstruction d'O. Neugebauer. Voir Drachmann A. G., Heron and Ptolemaios, *Centaurus,* I / 2, 1950, pp. 117-131.

[21] « Pensée grecque et pensée "orientale" », pour le vol. IV de l'*Encyclopédie philosophique* des PUF, R. Arnaldez (dir.); à paraître. Dans cet article le lecteur trouvera également une présentation commode et accessible des caractéristiques des textes mathématiques paléo-babyloniens par J. Ritter.

[22] Je traduis le texte d'après l'édition d'H. Schöne, *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia,* III, Leipzig, Teubner, 1903, 6. 21 - 8. 13. Il y a plusieurs lacunes auxquelles l'éditeur supplée, mais ceci n'a guère d'importance pour mon propos. En revanche j'introduis une numérotation des étapes du problème qui ne se trouve pas dans le texte mais qui est destinée à en faciliter la discussion.



2. Que le parallélogramme rectangle ABCD soit complété, dont l'aire - comme cela a été démontré ci-dessus - est de 12 unités.
3 - a. Et le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD.
3 - b. L'aire du triangle ABC sera alors de six unités.
4 - a. Et puisque l'angle en B est droit, les carrés sur AB, BC sont égaux au carré sur AC
4 - b. Et les carrés sur AB, BC sont de 25 unités ; le carré sur AC sera donc aussi de 25 unités.
5 - AC elle-même sera donc de 5 unités.
6 – Et la méthode est celle-ci[23] : en faisant les 3 par les 4, prendre la moitié de ceux-ci; il en résulte 6; autant est l'aire du triangle.
7 - Et l'hypoténuse : en faisant les 3 par eux-mêmes et semblablement en faisant les quatre par eux-mêmes, ajouter ; et en résultent 25; et en prenant un côté[24] de ceux-ci, avoir l'hypoténuse du triangle ».

Comme dans les textes babyloniens ou égyptiens l'aspect "procédure de calcul" est apparent sous la forme d'un enchaînement de calculs effectués sur des *nombres particuliers*. Mais la différence est également frappante; en effet la solution est présentée sous deux formes :
- l'une utilise la terminologie géométrique (étapes 1-5), l'autre appelée "méthode" (marche à suivre, étapes 6-7), se contente de reformuler les opérations à effectuer, encore qu'elle n'explique pas comment on réalise effectivement ces calculs (calcul mental, usage de tables ou d'une abaque…).

La forme géométrique est explicitement déductive avec des références à la fois internes (renvoi au premier problème du même traité— étape 2) et externes. La suite des calculs est en effet justifiable grâce à des énoncés géométriques de portée bien plus générale que ce qui est en cause ici et empruntables à la grande tradition géométrique des *Éléments* d'Euclide:
* une partie de la Proposition I. 34 à l'étape 3 - a[25].

[23] « ἡ δὲ μέθοδός ἐστιν αὕτη ». La formule est restituée par l'éditeur; mais il n'y a aucun doute car on la retrouve (avec de minuscules variantes) dans les problèmes I. 3 (*Hero,* III, 10. 9), I. 5 (*Ibid.,* 14. 8), I. 6 (*Ibid.,* 16. 1), III. 2 (*Ibid.,* 144. 22), III. 3 (*Ibid.,* 146. 19).
[24] Autrement dit la racine carrée.

* le célèbre théorème de l'hypoténuse (I. 47 dans Euclide), dit de Pythagore, dans l'étape 4 - a.

Dans l'exposé de la méthode calculatoire il faut remarquer que le vocabulaire géométrique n'intervient que dans la désignation des résultats : aire du triangle, hypoténuse. On pourrait croire qu'il permettait de formuler une règle plus générale, analogue aux "formules algébriques" des mathématiques élémentaires modernes, comme :

> « multiplier les côtés de l'angle droit; en prendre la moitié; ceci est l'aire du triangle; prendre le carré des côtés de l'angle droit; les ajouter; en prendre la racine carrée, c'est l'hypoténuse ».

Mais ceci impliquerait une confusion des registres géométrique et calculatoire qu'Héron — à ce moment de l'exposé — ne veut pas assumer. Une énonciation calculatoire plus générale, compte tenu de ces restrictions le contraindrait à une formulation alambiquée du genre :

> « multiplier les nombres, résultats des mesures des côtés de l'angle droit, et prendre la moitié du résultat obtenu; ceci est le résultat de la mesure de l'aire du triangle… ».

Quoiqu'il en soit on voit que les méthodes (μέθοδοι) ou marches à suivre (μέθοδοι) que j'évoquais à propos de Nicomaque se retrouve évidemment chez Héron[26]. Puisque je suis parti d'une discussion de la pédagogie mathématique des Anciens, je me permettrai de faire une courte aparté sur celle que déploie Héron dans la première partie du Livre I des *Métriques* (que l'on pourrait intitulé "De l'aire des triangles"), et qui est effectivement assez remarquable.

Problème I : Héron commence par expliquer comment calculer l'aire du rectangle connaissant les côtés, en faisant référence à la Définition 1 du Livre II des *Éléments* et en concevant une sorte de quadrillage du rectangle en carrés unités.

Problème II : Aire (et hypoténuse) du triangle rectangle.

Le calcul de l'hypoténuse permet de vérifier que l'"élève" connaît le théorème dit de Pythagore. La procédure utilisée pour le calcul de l'aire peut lui suggérer une fausse piste : l'aire du triangle (quelconque) est le demi-produit des côtés (au lieu du demi-produit du côté par la hauteur relative). Il est détrompé dans le :

---

[25] Dans le problème I. 3 (*Hero,* III, 8. 22-23) pour un cas de figure différent, on trouve une référence quasi explicite à la Prop. I. 41 des *Eléments* : « car ils ont la même base et sont dans les mêmes parallèles ».

[26] En revanche Héron n'utilise pas le verbe « προστάσσω » et/ou ses dérivées dans le sens d'une prescription. Pour énoncer certains problèmes il lui préfère « ἐπιτάσσω », que l'on trouve dans les *Eléments* (v. *supra*). V. *Metr*. III, Problèmes 6, 21, 22, 23 (*Hero,* III, 152. 8, 178. 24, 180. 8, 184. 13).

Problème III : Aire du triangle isocèle dont les longueurs des côtés sont données.

La résolution se fait en deux étapes :

• calcul de la hauteur (en utilisant le fait que dans un triangle isocèle elle est aussi médiane[27] et le théorème de l'hypoténuse revu dans le problème précédent).

• puis calcul de l'aire du triangle.

Maintenant l'"élève" connaît la "bonne" procédure. Tout le problème est de savoir calculer la hauteur du triangle à partir des côtés.

Dans une formule de transition Héron indique que pour les triangles anisocèles il faut savoir comment sont menées les perpendiculaires sur les côtés, en particulier si elles tombent à l'intérieur ou à l'extérieur de l'angle, autrement dit si l'angle en question est aigu, droit, ou obtus[28]. En réunissant les informations contenues dans les Propositions I. 47-48, II. 12-13 des *Éléments,* on peut établir un critère métrique exposé dans le :

"Problème" IV : Si les côtés du triangle ABC sont donnés, pour savoir si l'angle en A est aigu, droit ou obtus, on compare le carré décrit sur BC aux carrés décrits sur AB, AC (pris ensemble). Si :

• T(BC) < T(AB) + T(AC) l'angle est aigu[29];

• T(BC) =T(AB) + T(AC), l'angle est droit (Eucl. *El.* I. 48);

• T(BC) > T(AB) + T(AC), l'angle est obtus[30].

Les deux problèmes suivants traitent donc des deux cas de figures "triangle acutangle", "triangle obtusangle".

Problème V : Aire du triangle acutangle connaissant les côtés (AB = 13, BC = 14, AC = 15).

La partie géométrique se déroule en 4 sous-étapes :

• on vérifie que l'angle A est aigu;

• on calcule le segment de la base BC découpé par la hauteur à l'aide de la Proposition II. 13 des *Éléments* ;

• on calcule la hauteur (grâce au théorème de l'hypoténuse);

• et enfin l'aire du triangle.

Une procédure numérique rappelle les opérations à faire.

Problème VI : Aire du triangle obtusangle connaissant les côtés (AB = 13, BC = 11, AC = 20).

• on calcule le segment du prolongement de la base BC découpé par la hauteur à l'aide de la Proposition II. 12 des *Éléments* ;

---

27 Ce qui n'est pas démontré dans les *Eléments,* mais est facile à déduire des Prop. I. 5, I. 32 et I. 4.

28 Voir *Hero,* III, p. 10. 15-18.

29 La notation T(AB) désigne le carré décrit sur AB. Nous évitons les écritures algébriques modernes. Pour le produit d'un nombre N par lui-même, nous écrirons N.N.

30 Il faut donc admettre les converses de II. 12-13 pour qu'elles puissent fournir des propriétés caractéristiques. C'est une conséquence immédiate de ce que la relation d'ordre, tant sur les aires que sur les angles rectilignes, est totale.

• on calcule la hauteur (grâce au théorème de l'hypoténuse);

• et enfin l'aire du triangle.

Là encore une procédure numérique rappelle les opérations à faire; ses dernières étapes coïncident quasiment avec celles du problème précédent puisque l'auteur s'est arrangé pour trouver le même segment de base (5) et donc la même hauteur (12). La confrontation des deux problèmes souligne la distinction des cas de figures et donc la différence des procédures à la cinquième étape.

On le voit facilement si on les écrit en parallèle comme suit :

Problème V	**Problème VI**
Les 13 par eux-mêmes : 169	Les 13 par eux-mêmes : 169
Les 14 par eux-mêmes : 196	Les 11 par eux-mêmes : 121
Les 15 par eux-mêmes : 225	Les 20 par eux-mêmes : 400
Compose 169 et 196 : 365	Compose 169 et 121 : 290
De ceux-ci retranche les 225 : reste 140	Ceux-ci retranche-les des 400 : reste 110.
De ceux-ci la moitié : 70	De ceux-ci la moitié : 55
Applique-les selon les 14 : 5	Applique-les selon les 11 : 5
Et les 13 par eux-mêmes : 169	Et les 13 par eux-mêmes : 169
Desquels retranche les 5 par eux-mêmes : reste 144	Desquels retranche les 5 par eux-mêmes : reste 144
De ceux-ci le côté produit 12	De ceux-ci le côté produit 12;
Autant sera la perpendiculaire	La perpendiculaire sera 12 unités
Ceux-ci multiplie-les par les 14 : 168	Ceux-ci par les 11 : 132
De ceux-ci la moitié : 84	De ceux-ci la moitié : 66
Autant sera l'aire.	Autant sera l'aire du triangle.

Cela dit on voit que là où, en termes géométriques, on a deux cas de figures bien distincts, les procédures calculatoires sont pratiquement identiques surtout si l'on explique l'étape 5 en disant que l'on fait le retranchement entre les deux étapes précédentes, le plus petit étant soustrait du plus grand. Mais cette confrontation a un autre intérêt, elle motive le problème suivant : est-il possible de trouver une méthode universelle qui n'oblige plus à distinguer l'espèce du triangle (rectangle, isocèle, acutangle, obtusangle…) ? La réponse est OUI.

Héron l'établit dans le problème VIII (après avoir énoncé et justifié un petit lemme (VII)). Il vaut la peine de donner le texte de ce problème qui, à l'inverse des précédents, commence directement par la procédure calculatoire :

« Et il y a une méthode générale afin de trouver l'aire d'un triangle quelconque, [les] trois côtés étant donnés, sans [utiliser] une hauteur.

Par exemple que les côtés du triangle soient de 7, 8, 9 unités.

Compose les 7 et les 8 et les 9 : il en résulte 24.

De ceux-ci prends la moitié : il en résulte 12.

Retranche les 7 unités: 5 restantes.

A nouveau, des 12 retranche les 8 : 4 restantes.

et encore les 9 : 3 restantes.

Faits les 12 par les 5 : en résultent 60;

ceux-ci par les 4 : en résultent 240;

ceux-ci par les 3 : il en résulte 720;

de ceux-ci prends un côté et ce sera l'aire du triangle.

Puisque alors les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi.

Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 : il en résulte 26 et deux tiers.

Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers.

De ceux-ci la moitié : il en résulte 26 2' 3'.

Le côté approché de 720 sera donc 26 2' 3'.

En effet 26 2' 3' par eux-mêmes : il en résulte 720 36';

de sorte que la différence est une 36e part d'unité.

Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le 36', au lieu de 729, nous placerons les 720 et 36' maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au 36'.
Et la démonstration géométrique de cela en est celle-ci »[31].

Le lecteur aura reconnu la célèbre formule dite de Héron pour le calcul de d'aire d'un triangle. En symboles modernes, si ABC est une triangle de côtés (a, b, c) et si l'on pose p = (a + b + c) (périmètre), on a $S = \sqrt{}(p/2(p/2 - a)(p/2 - b)(p/2 - c)$. L'élève de Héron s'est maintenant élevé des cas particuliers de procédures à une méthode explicitement qualifiée d'universelle. Ce changement de "niveau" explique peut-être que dans l'exemple, contrairement aux précédents, Héron n'a pas fait d'efforts pour choisir des nombres pour lesquels l'extraction de la racine carrée soit immédiate (dans les problèmes II - III, V-VI, on obtenait $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$ et on pouvait présumer que l'élève connaissait par cœur les premières entrées d'une table des carrés parfaits[32]). D'où

---

[31] Voir *Hero,* III, pp. 18. 12 - 20. 6.

[32] Ainsi l'un des plus anciens textes scolaires conservés contient-il un fragment d'une table de carrés de nombres écrits dans le système alphabétique. Voir *Un Livre d'écolier du III siècle avant J. C.*

maintenant un nouveau développement pédagogique avec l'exposé de la méthode, dite elle aussi de Héron, pour calculer les valeurs approchées des racines carrées de nombres non carrés parfaits.

Remarquons aussi que la démonstration géométrique annoncée porte, non pas sur l'"algorithme" de calcul des racines carrées, mais sur la méthode universelle pour déterminer l'aire des triangles. Le lecteur en trouvera la traduction en Annexe.

Pour ce qui m'intéresse ici — les démarches algorithmiques — je relèverai seulement que la première partie de cette démonstration établit très simplement que l'aire d'un triangle (quelconque) est égale au rectangle contenu par le demi-périmètre et le rayon R du cercle inscrit dans le triangle[33]; à la suite de la partie géométrique on trouve un autre exemple numérique dont les données sont choisies pour que l'aire soit exprimable; on a S x S = 7056, d'où S = 84

Le dernier problème de cette série (n°IX) est un peu curieux; il revient sur le calcul de l'aire du triangle à l'aide de la hauteur et distingue le cas où cette hauteur est exprimable du cas où elle ne l'est pas; comme dans tous les exemples, les côtés sont exprimés en nombres entiers cela revient évidemment à ce que l'aire est ou n'est pas exprimable. Dans l'exemple traité AB = 8, BC = 10, AC = 12; en appliquant la méthode du problème V on voit que le carré décrit sur la hauteur est 63. Au lieu de calculer d'emblée la racine carrée, l'auteur propose de différer cette extraction en considérant le carré de l'aire du triangle, lequel apparaissait dans la méthode générale, méthode qui a donc peut-être inspiré cette remarque. Ainsi au lieu de considérer la procédure :

calcul de la hauteur, multiplication par la base, dichotomie (Pb. V),

on procédera ainsi : calcul du carré de la hauteur, calcul du carré de la base (déjà fait en principe), multiplication des deux résultats, division par 4 : on obtient le carré de l'aire du triangle. L'"élève" vérifiera que les deux techniques donnent évidemment la même chose : l'aire, au carré, vaut 1575.

Même si l'enchaînement héronien n'est pas à proprement parler une liaison déductive au sens strict, telle qu'on peut l'observer dans certaines portions des *Éléments* d'Euclide — mais dans certaines portions seulement — le lecteur sera convaincu, j'espère, que l'architecture de cette première partie du traité des *Métriques* construite à la fois sur des considérations géométriques (nature des figures) et des procédures calculatoires n'est ni arbitraire, ni "relâchée", mais assez rigoureuse et peut-être efficace. Je ne vais pas chercher à épuiser le sujet à l'intérieur des *Métriques* qui contiennent d'autres indications intéressantes à propos des méthodes algorithmiques.

Publications de la Société Royale Egyptienne de Papyrologie. Edité par O. Guéraud et P. Jouguet, Imprimerie de l'Institut français d'Archéologie Orientale, Le Caire 1938, pl. X.

[33] En notations modernes S = (p/2). R.

3. Un exemple des *Geometrica*

Il me paraît intéressant de prendre un autre exemple, mais cette fois dans les *Geometrica,* traité du corpus héronien d'authenticité suspecte, ne serait-ce qu'à cause de caractère composite de son contenu. Cette discussion n'a guère d'importance pour ce dont je traite ici. Il s'agit des problèmes 10 à 13 de la section 24 dans l'édition de J. L. Heiberg.

Problème 10

1. « La surface d'un triangle rectangle avec le périmètre : 280 pieds.
Séparer les côtés et trouver la surface.
2. Je fais ainsi : toujours cherche les nombres composants et décompose les deux cent quatre-vingts : le double des 140, le 4[-uple] de 70; le 5[-uple] de 56;
le 7[-uple] de 40; le 8[-uple] de 35; le 10[-uple] de 28; le 14[-uple] de 20[34].
3. J'ai observé que 8 et 35 réalisent la prescription donnée (τὸ δοθὲν ἐπίταγμα).
4. Des 280 le 8e : 35 pieds sont produits.
5. Dans tous [les cas], prends deux parmi les huit; 6 pieds se maintiennent comme reste.
6. Donc les 35 et les 6, ensemble, produisent 41 pieds.
7. Ceux-ci [multipliés] par eux-mêmes produisent 1681 pieds.
8. Les 35 par les 6 : sont produits 210 pieds.
9. Multiplie toujours ceux-ci par les huit : sont produits 1680 pieds.
10. Ceux-ci, prends-les à partir de 1681; 1 se maintient comme reste;
11. Dont la racine carrée produit 1.
12. A présent pose 41 et prends une unité : il reste 40;
13. Dont le 1/2 produit 20. Ce qui est la hauteur : 20 pieds.
14. Et de nouveau pose 41 et ajoute une unité : sont produits 42 pieds;
15. Dont le 1/2 produit 21 pieds. Que la base soit 21 pieds.
16. Et pose 35 et prends 6; 29 se maintiennent comme reste;
17 a. A présent pose la hauteur par la base dont le 1/2 produit 210 pieds
17b. Et les trois côtés mesurant le périmètre font 70 pieds.
18. Ensemble, ajoute avec la surface : sont produits 280 pieds »[35].

Ce texte présente évidemment certaines ressemblances avec les textes des *Métriques* que nous avons examinés précédemment, mais aussi quelques divergences :

---

[34] Selon le texte de Schöne (p. 422. 18-20), on trouve ici le système alphébétique de notations des parts; en fait il doit s'agir d'abréviations numérables pour les adverbes double, quadruple… comme le montre l'exemple de « ὁ δὶϛ … ».

[35] Héron, Geometrica, *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia,* IV (éd. J. L. Heiberg), Leipzig, Teubner, 1912, 422.15 - 424.5. La numération des étapes du calcul est la nôtre.

• comme dans la "méthode calculatoire" des *Métriques* la terminologie géométrique apparaît ici essentiellement pour les "inconnues" et l'expression des résultats : surface, périmètre, hauteur, base, côtés… d'un triangle rectangle.

Notons toutefois que certaines "formules" sont quasi générales: « pose la hauteur par la base… » (étape 17a). En fait il s'agit surtout de désigner commodément des résultats obtenus dans des étapes non immédiatement antérieures (n°13 et 15).

• En revanche, le texte des *Métriques* portait sur des nombres "purs", composés d'unités afin de ne pas faire intervenir les questions de métrologie dans les procédures résolutoires; Héron l'indique explicitement dans sa préface au Livre I des *Métriques*[36]. Ici, à l'inverse, nous retrouvons des nombres "sensibles" (des pieds !).

Pour que l'apprenti calculateur comprenne le niveau algorithmique du problème et en particulier pour qu'il remarque les différences de statut entre les nombres, trois autres exemples numériques — on peut transcrire les solutions des quatre exemples du même problème sous forme du tableau ci-dessous — sont proposés à la suite de celui-ci.

On voit en particulier que "les deux" que l'on retranche à l'étape n°5 et "les huit" par lesquels on multiplie à l'étape n°9, accompagnés à chaque fois par la mention "dans tous les cas", sont des « constantes universelles » qui ne dépendent pas des données.

Le langage des opérations, que nous avons essayé de garder dans notre traduction, est très concret et ne correspond pas tout à fait à celui des grands traités; il suggère l'utilisation d'un accessoire type abaque. Aucune explication ou justification d'aucune sorte n'est donnée; en revanche, à la fin (étape 18), on vérifie l'efficacité de la procédure. Mais la différence la plus intéressante, et certainement la plus significative, entre les deux textes du corpus héronien est d'ordre structurel. La dualité géométrie-calcul, en fait la partie géométrique, du problème des *Métriques* a disparu; la formulation des *Geometrica* est purement calculatoire.

Si l'on revient au traité authentiquement héronien des *Métriques* on doit d'ailleurs remarquer que l'auteur, après le problème I. 6 écrit de manière assez énigmatique :

> « Jusqu'à ce [problème]-ci, tout en calculant, nous avons produit des démonstrations géométriques; dans la suite nous produirons les mesures selon l'analyse, grâce à la synthèse des nombres »[37].

[36] Voir *Hero,* III, p. 6. 4-6.

[37] « Μέχρι μὲν οὖν τούτου ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐποιησάμεθα, ἑξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα ». *Hero, III,* p. 16. 11-14.

Pb / Etap.	n°10	n°11	n°12	n°13
1.	280	270	100	90
2.	deux fois 140	deux fois 135		
	4 70	3 90		
	5 56	6 45		
	7 40	9 30		
	8 35	10 27		
	10 28			
	14 20			
3.	(8, 35)	(6, 45)	(5, 20)	(5, 18)
4.	Des 280 le 8' : 35	Des 270 le 6' : 45	Des 100 le 5' : 20	Des 90 le 5' : 18
5.	8 - 2 : 6	6 - 2 : 4	5 - 2 : 3	5 - 2 : 3
6.	35 + 6 : 41	45 + 4 : 49	20 + 3 : 23	18 + 3 : 21
7.	41 x 41 : 1681	49 x49 : 2401	23 x 23 : 529	21 x21 : 441
8.	35 x 6 : 210	45 x 4 : 180	20 x 3 : 60	18 x 3 : 54
9.	210 x 8 : 1680	180 x 8 : 1440	60 x 8 : 480	54 x 8 : 432
10.	1681 - 1680 : 1	2401 - 1440 : 961	529 - 480 : 49	441 - 432 : 9
11.	√1 : 1	√961 : 31	√49 : 7	√9 : 3
12.	41 - 1 : 40	49 - 31 : 18	23 - 7 : 16	21 - 3 : 18
13.	(1/2) 40 : 20	(1/2) 18 : 9	(1/2) 16 : 8	(1/2) 18 : 9
14.	41 + 1 : 42	49 +31 : 80	23 + 7 : 30	21 + 3 : 24
15.	(1/2) 42 : 21	(1/2) 80 : 40	(1/2) 30 : 15	(1/2) 24 : 12
16.	35 - 6 : 29	45 - 4 : 41	20 - 3 : 17	18 - 3 : 15
17a	210	180	60	54
17b.	70			
18.	210 + 70 : 280	270	100	90

Effectivement, à partir du Problème VIII, la structure des problèmes change[38] : Héron dans la première partie formulée géométriquement utilise la terminologie des *Données*, caractéristique de l'analyse au sens ancien du terme[39]. Ceci fait, il ajoute cette transition : « Ce qui sera synthétisé ainsi » avant d'exposer ce que nous avons appelé la partie calculatoire[40].

---

38 Voir la démonstration en annexe.

39 Si dans une configuration telles choses sont données par hypothèse, telle autre le sera aussi par voie de conséquence. Sur le lien entre *Données* et analyse, voir Pappus, *Collection mathématique,* préface au Livre VII.

40 Dans le problème I. 10 on trouve une formulation plus complète : « Et, en suivant l'analyse, cela sera synthétisé ainsi »; voir *Hero,* III, p. 30. 5.

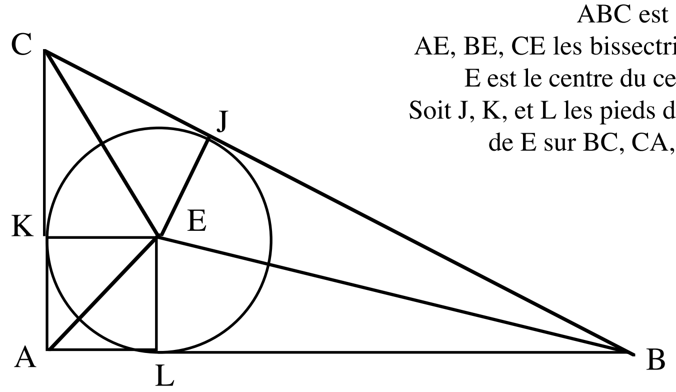
Il faut donc croire que la dualité d'exposition que nous avons vue dans le problème des *Métriques* s'apparentait, dans l'esprit de son auteur, au double mouvement de la démonstration par analyse et synthèse, la géométrie fournissant l'"analyse" du problème, la synthèse étant produite dans le cadre du calcul ou logistique. On peut dire que l'on est exactement aux antipodes de la démarche cartésienne : Descartes recherche dans l'algèbre (qui est une sorte de "logistique abstraite"), l'analyse des problèmes formulés géométriquement !

Notre problème des *Geometrica* devrait son apparence "mystérieuse" au fait que tout se passe comme si le texte n'exposait que la partie calculatoire (« synthèse numérique ») d'un problème qui comportait aussi une "analyse" de type géométrique. On peut essayer de rechercher l'« analyse géométrique » qui est à la base de cette série de problèmes à partir d'une configuration simple; j'y reviendrai.

Remarquons, par rapport à la prise de position de Knorr, qu'un texte comme celui des *Geometrica,* quoique présenté sous forme de problème libellé de manière assez complète et sur un exemple numérique particulier, est pédagogiquement tout aussi opaque que certaines démonstrations des *Éléments* d'Euclide. Il est clair que cela est dû au caractère "synthétique" de la présentation et que la tradition des méthodes algorithmiques n'échappe manifestement pas à ce genre de difficultés pédagogiques; peut-être même, tout autant que la tradition des *Éléments,* favorise-t-elle la "mystification" de l'élève que cultivent parfois les enseignants de mathématiques, encore aujourd'hui, mais sans doute déjà dans l'Antiquité.

4. Reconstruction d'une analyse géométrique pour *Geometrica* 24, 10-13.

L'arrière-plan géométrique du problème pourrait donc être la configuration du cercle inscrit dans un triangle :



ABC est un triangle,
AE, BE, CE les bissectrices des angles en A, B, C;
E est le centre du cercle inscrit dans ABC.
Soit J, K, et L les pieds des perpendiculaires menées de E sur BC, CA, AB respectivement.

On a alors : ABC = AEB + AEC + BEC = (1/2) [EL. AB + EK. AC + EJ. BC]

= R. (AB + BC + CA)/2 = R. (p/2)

en notant comme précédemment R le rayon du cercle inscrit et p le périmètre du triangle.

Ceci n'utilise pas la nature du triangle ABC et est établi, en toute généralité, par Héron dans la première partie de la Proposition I. 8 des *Métriques*[41] et dans plusieurs problèmes de calcul du diamètre du cercle inscrit dans un triangle[42]. Pour un triangle la somme (Aire + périmètre) peut donc facilement être transformée en un rectangle, en appliquant une surface p.U où U est l'unité de longueur sur une droite de longueur p/2 pour ne manipuler que des grandeurs homogènes, ici des surfaces; la largeur produite est évidemment 2. Finalement le nombre que nous, modernes, notons R.(p/2) + p équivaut à l'aire du rectangle contenu par des droites de longueur (p/2) et [R + 2]. Dans le présent problème, on sait que ceci est un nombre donné.

D'où l'idée d'examiner la décomposition des nombres donnés en produit de deux facteurs, l'un correspondra à p/2, l'autre à R + 2. En retranchant la constante universelle 2 du plus petit des deux facteurs (étape 5) on calcule en fait le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

La comparaison des quatre exemples du même problème nous montre des variantes sans doute liées à la pratique pédagogique des méthodes algorithmiques. Ainsi dans le premier exemple (v. tableau *supra*) toutes les décompositions de 280 sont énumérées (sauf 280 = 280 x 1); pour 270 dans le deuxième exemple certaines sont omises comme 15 x 18 ou 5 x 54; dans les deux derniers exemples on n'en mentionne plus qu'une. Cependant la suite de la procédure n'est pas si facile à interpréter en s'en tenant à cette première remarque et le problème paraît avoir été élaboré à partir d'une situation géométrique plus particulière encore puisque le triangle ABC est supposé rectangle.

Dans ce cas le parallélogramme AKEL est un carré et donc AK = AL = R. Comme BC = BJ + JC = BL + CK, et que AB + AC = AL + LB + AK + KC = BC + 2R, on peut introduire e tel que 2e = AB + AC - BC.

Pour le triangle rectangle l'excès e est égal au rayon du cercle inscrit; autrement dit les côtés de l'angle droit dépasse l'hypoténuse par le diamètre d = 2R du cercle inscrit; c'est de cette manière, et non par le théorème de Pythagore, que l'hypoténuse est calculée à l'étape 16.

Étant donné un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont (x, y) l'hypoténuse z et l'aire S, d'après ce qui précède, en posant x + y = z + 2e, on a donc :

$$S = (x.y)/2; \; (x + y + z)/2 = z + e \text{ ou } (p/2) = z + e.$$

Par ailleurs S + p = N donné équivaut donc à (p/2)[e + 2] = N.

L'interprétation que l'on peut donner de la procédure de calcul est la suivante[43] :

[41] Voir Annexe.

[42] V. *Geometrica, op. cit.*, problèmes pour le triangle rectangle (n°27) isocèle (n°29), équilatéral (n°31), scalène acutangle (n°33) ou obtusangle (n°35), *Hero,* IV, pp. 434-438.

[43] La présente numérotation des étapes correspond à celle de la traduction du texte *supra*.

2. Recherche de décomposition en nombres entiers $N = A.B$, $A \neq B$.

Si $A > B$ on prendra $A = p/2$ et $B = e + 2$.

3. Choix d'une décomposition; aucune explication n'est donnée ici.

4. Choix de $A = p/2$;

5. Calcul de $e = B - 2$.

6. Calcul de $A + e = p/2 + e = z + 2e = x + y$

7. Calcul de $(p/2 + e).(p/2 + e) = (x + y).(x + y)$;

8. Calcul de $(p/2).e = S = (x.y)/2$;

9. Calcul de $8S = 4(p.e) = 4(x.y)$;

10. Calcul de $(p/2 + e).(p/2 + e) - 8(p/2).e = (x + y).(x + y) - 4(x.y)$
$= (x - y).(x - y)$.

11. Calcul de $x - y$;

12. Calcul de $(x + y) - (x - y) = 2y$;

13. Calcul de $(1/2).\ 2y = y$, la hauteur.

14. Calcul de $(x + y) + (x - y) = 2x$;

15. Calcul de $(1/2).\ 2x = x$, la base;

16. Calcul de $(p/2) - e = z$, l'hypoténuse[44].

17a. Calcul de $(1/2)\ (B.\ h) = S$;

17b. Calcul de $x + y + z = p$;

18. Vérification : $S + p = N$.

Il y a certainement d'autres explications possibles, de même qu'il y avait d'autres procédures résolutoires. Ainsi à l'étape 6 du premier exemple on a $x + y = 41$ et à partir de l'étape 8 on pouvait dériver $x.y = 420$ [plutôt que $4(x.y) = 1680$].

Le problème revenait à trouver deux nombres (x, y) tels que leur somme est donnée (41) ainsi que leur produit (420), ce qui correspond au Problème XXVII du Livre I des *Arithmétiques* de Diophante :

> « Trouver deux nombres de façon que leur composition (σύνθεσις) et leur multiplication produisent des nombres donnés. Il faut alors que le carré sur la moitié des nombres trouvés, [pris] les deux ensemble, dépasse le [rectangle contenu] par eux par un carré. Et ceci est figuratif (ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν).
>
> Et qu'il soit prescrit (ἐπιτάχθω) que d'une part leur composition fasse 20 unités, d'autre part leur multiplication fasse 96 unités.
>
> Et que soit posée leur différence : deux arithmes (» x). Et puisque leur composé (σύνθεμα) est 20 unités, si celui-ci est coupé en deux [parties égales], chacune des [parties produites] à partir de la division sera le 1/2 du composé : 10 unités.

---

[44] Qu'il s'agisse de l'hypoténuse est explicitement affirmé dans les trois autres exemples du même problème. Cette "règle" équivalente à $d = x + y - z$ où d désigne le diamètre du cercle inscrit est utilisée explicitement dans le problème 26 des *Geometrica, op. cit.,* p. 432. 18-22.

Si la moitié de la différence - c'est-à-dire 1 arithme - d'une part est ajoutée à l'une des [parties produites] à partir de la division, d'autre part retranchée à celle qui reste, le composé demeure de nouveau 20 unités et la différence 2 arithmes.

Que soit posé en effet le plus grand [nombre] : 1 arithme et 10 unités moitiés du composé; le plus petit sera donc 10 unités - 1 arithme. Et demeurent d'une part le composé : 20 unités, d'autre part la différence : 2 arithmes.

Et il reste aussi que le [rectangle contenu] par eux fait 96 unités; mais le [rectangle contenu] par eux est 1OO unités - un carré d'arithme; celles-ci sont égales à 96 unités; et l'arithme devient 2 unités.

Donc d'une part le plus grand [nombre} sera 12 unités, le plus petit 8 unités. Et ils produisent les [prescriptions] de l'énoncé (τὰ τῆς προτάσεως) »[45].

Avec les données de notre problème (41, 420) on vérifie que l'"algorithme" proposé par Diophante donne évidemment la même solution[46], mais la démarche est tout à fait différente.

°

On remarquera que pour obtenir des triangles "simples" il est expédient d'imposer la condition : « Il faut que le carré de la somme des deux nombres (p/2, e) dépasse huit fois leur produit par un carré », ce que l'on peut transcrire aussi : « il faut que le carré de la somme des deux nombres (x, y) dépasse 4 fois leur produit par un carré ».

Diophante pour sa part indique comme condition : « le carré sur la moitié des nombres trouvés, [pris] les deux ensemble (leur demie somme), dépasse le [rectangle contenu] par eux par un carré », $[(x + y)/2].[(x + y)/2] - (x.y)$ est un carré. La clause quelque peu énigmatique : « Et ceci est figuratif » indique certainement que la justification en est géométrique, et l'on peut même penser qu'elle renvoie à une Proposition du Livre II des *Éléments* d'Euclide[47].

---

[45] Voir *Diophantus Alexandrinus Opera Omnia,* Edidit P. Tannery, in æd. B. G. Teubner, Leipzig, 1893. Réimpr. Stuttgart, 1974, vol. I, pp. 60. 23 - 62. 18.

[46] On trouvera le plus grand nombre égal à 20 unités et demi plus un arithme, le plus petit égal à 20 unités et demi moins un arithme, donc leur produit égal à 420 unité et un quart moins un carré d'arithme; l'arithme est donc 1/2 et on retrouve les solutions (21, 20).

[47] V. Euclide, *les Eléments,* trad. et comm. B. Vitrac, Paris, PUF, 1990, Volume 1, pp. 373-374; dans le problème I. 30 Diophante mentionne comme condition $[(x - y).(x - y) + 4(x.y)]$ doit être carré ! Toutes ces conditions sont évidemment équivalentes. Dans la présentation des *Geometrica.* le présent problème peut être rattaché à la science du calcul ou logistique. Pourtant comme les rapprochements ci-dessus le suggèrent on ne s'étonnera pas de retrouver ce genre de problèmes sur les triangles rectangles en nombres entiers dans un traité prestigieux comme les *Arithmétiques* de Diophante. Ainsi dans le Livre VI (dernier Livre conservé en grec), en notant S l'aire d'un triangle rectangle, (x, y) les côtés de son angle droit, z son hypoténuse, Diophante propose les problèmes suivants : trouver un triangle rectangle tel que: $S + x$ (ou $S + y$) soit un nombre donné (n°6); $S - x$ (ou $S - y$) soit un nombre donné (n°7); $S + x + y$ soit un nombre

Comme on le vérifie facilement dans le tableau suivant, dans les quatre exemples proposés, parmi les différentes décompositions en produit de deux facteurs entiers, il n'y a qu'une décomposition qui vérifie la condition ainsi prescrite (à laquelle fait certainement allusion l'étape n°3), celle que l'auteur a retenue :

Tableau II :

«$(e + p/2)^2 - 8e.(p/2) = (x + y)^2 - 4.x.y$ doit être un carré parfait».

Prob.	p/2	e	e + p/2	$(e + p/2)^2$	e.(p/2)	8e. (p/2)	$(e + p/2)^2 - 8e.(p/2)$
n° 1O	140	0					
	70	2	72	5184	140	1120	4064 non carré parfait
	56	3	59	3481	168	1344	2137 " " "
	40	5	45	2025	200	1600	425 " " "
	35	**6**	**41**	**1681**	**210**	**1680**	**1 carré parfait**
	28	8	36	1296	224	1792	négatif
	20	12	32	1024	320	2560	"
	14	18	32	1024	252	2016	"
	10	26	36	1296	260	2080	"
n° 11	135	0					
	90	1	91	8281	90	720	7561 non carré parfait
	54	3	57	3249	162	1296	1953 " " "
	45	**4**	**49**	**2401**	**180**	**1440**	**961 = $(31)^2$**
	30	7	37	1369	210	1680	négatif
	27	8	35	1225	216	1728	"
	18	13	31	961	234	1872	"
	15	16	31	961	240	1920	"
	10	25	35	1225	250	2000	"
n° 12	25	2	27	729	50	400	329 non carré parfait
	20	**3**	**23**	**529**	**60**	**480**	**49 = $(7)^2$**
	10	8	18	324	80	640	négatif
	5	18	23	529	90	720	"
n° 13	30	1	31	961	30	240	721 non carré parfait
	18	**3**	**21**	**441**	**54**	**432**	**9 = $(3)^2$**
	15	4	19	361	60	480	négatif
	10	7	17	289	70	560	"

donné (n°8); S - (x + y) soit un nombre donné (n°9); S + x + z (ou S + y + z) soit un nombre donné (n°10); S - (x + z) (ou S - (y + z)) soit un nombre donné (n°11).

5. Conclusion

Pour conclure cette trop brève étude de quelques textes de Héron, je reprendrai certains éléments de mon travail avec J. Ritter déjà cité. La comparaison avec les textes babyloniens suggère un certain nombre d'hypothèses; en particulier il ne semble pas que Héron se soit proposé — comme on le dit trop souvent — de s'inscrire dans une tradition mathématique d'inspiration orientale. De son point de vue, il semble plutôt s'agir de faire bénéficier cette tradition, certainement ancestrale, de certains des résultats élaborés dans la "grande" tradition géométrique à la suite des travaux d'Eudoxe — reformulés par Euclide — et surtout d'Archimède, référence constante du traité. Peut-être cet enrichissement correspond-il à une évolution dans la formation des "techniciens" dont l'élite se doit de connaître les causes des procédés classiques, en l'occurrence, quelques démonstrations. Dans cette hypothèse, le corpus héronien n'est pas l'indice d'une décadence des mathématiques "pures", mais de la promotion des mathématiques "appliquées" !

Quant à la comparaison à l'intérieur du corpus héronien elle montre que ses autres textes géométriques ne présentent pas la même dualité d'argumentation que nous avons vue fonctionner dans les problèmes des *Métriques*. S'agit-il de manuels dérivés de l'enseignement de Héron, manuels dont la finalité est encore plus utilitaire et/ou pédagogique ? La comparaison (globale) avec les textes orientaux peut suggérer ici une hypothèse de travail et c'est l'un de ses mérites : peut-être le traité des *Métriques* représente-t-il le modèle du manuel du maître, les autres traités héroniens, celui des élèves. Une telle dualité existe en effet dans les textes orientaux. Mais là encore les choses sont différentes: alors que la spécificité orientale réside en ce que les manuels dits du maître ne présentent que des énoncés sans solution[48], dans le corpus héronien la distinction se ferait entre celui qui connaît les "causes" (c'est-à-dire les démonstrations) et celui qui ne les connaît pas, distinction éminemment grecque, on pourrait même dire aristotélicienne[49].

Quant au problème "pédagogique" soulevé par Wilbur Knorr dont j'étais parti, il me semble que notre collègue a tendance à confondre deux choses que l'on doit *a priori* distinguer : d'une part l'opposition "théorème" / "problème ou procédure" qui renvoie à une différence formelle à l'intérieur des textes mathématiques et une distinction pédagogique (moderne) entre les "méthodes passives" et les "méthodes (inter)actives". La pertinence de cette distinction par rapport à l'enseignement des Anciens n'est pas

---

[48] Voir par exemple, Ritter J., « Les mathématiques mésopotamiennes » in Commission Inter-Irem (éd.), *Histoire et Epistémologie des mathématiques,* IREM de Lille (à paraître), repris dans Ritter, Thèse, *op. cit.,* 1993, pp. 132-159, en particulier pp. 150-152.

[49] On sait bien que pour Aristote la capacité d'enseigner est l'un des traits distinctifs fondamentaux de celui qui connaît les causes.

évidente. Très clairement apprendre par cœur des procédures de calcul ou apprendre des définitions et des démonstrations n'est pas tellement plus malin, certainement pas plus efficace.

En fait ce qui permettrait de mieux définir la ou les pédagogie(s) ancienne(s) ce serait de décrire l'usage effectif, dans les cours de mathématiques, des tablettes ou papyri dans un cas, des traités dans l'autre. Manifestement nous ne savons pratiquement rien à ce sujet. Ce que nous connaissons (partiellement) c'est ce que les différentes civilisations anciennes estimaient devoir confier à l'écrit; il se peut que ce soit aussi ce qu'elles estimaient être le plus important du point de vue pédagogique; il se peut qu'il en soit autrement. Dans certaines traditions *le* texte mathématique présente seulement les procédures; tout ce qui se rapporte à leur utilisation, éventuellement à leurs justifications ou à leur perfectionnement relève des commentaires, qui, à leur tour, définissent un autre genre de littérature technique[50].

Il est bien difficile de juger de la "pédagogie" euclidienne à partir des seules caractéristiques formelles du texte des *Éléments,* en particulier de leur caractère synthétique. On peut là aussi imaginer un enseignement qui utilisait non seulement le traité lui-même mais aussi le recueil des *Données* et peut-être même les Ψευδαρία : l'"élève" ayant la possibilité d'abord de détecter les cas de figures non traités, de formuler des objections ou de répondre à celles qu'on lui proposait, de rechercher une analyse pour un théorème ou un problème, de comparer l'exposé synthétique correct des *Éléments* et une pseudo-solution… Cela revient évidemment à mettre l'accent sur les questions de justification, d'argumentation et de présentation comme le souligne Knorr, mais la pratique "pédagogique" mise en œuvre peut être un peu moins austère que ce que suggère le texte des *Éléments* considéré isolément en lui-même.

Manifestement cette exigence de justification est un point sur lequel les mathématiques grecques se distinguent de manière essentielle des mathématiques égyptiennes, babyloniennes ou chinoises. Celles-ci jouent éventuellement un rôle important dans l'éducation et j'ai répété à plusieurs reprises que leur présentation n'était

---

[50] On pourrait imaginer qu'il a existé une telle dualité en Grèce ancienne : des recueils de procédures de calcul comme on les voit dans les *Geometrica, Stereometrica…* / des "notices d'utilisation" et autres commentaires. Les *Métriques* de Héron aurait remplacé cette dualité par une double rédaction des problèmes dont l'un des termes est emprunté à la tradition géométrique. Ceci n'est qu'une hypothèse et peut-être accorde-t-elle une trop grande importance au Mécanicien d'Alexandrie qui dans cette optique devient un jalon dans la préhistoire de l'algèbre. Celle-ci suppose en effet plusieurs choses :
• une thématisation de l'égalité en tant que telle; on ne la trouve pas chez Héron, mais peut-être chez Diophante (voir Euclide, Les *Eléments,* trad. et comm. B. Vitrac, Paris, PUF, 1990, Volume 1, pp. 502-505).
• La classification de certains types d'égalités fondamentales et des règles grâce auxquelles on les manipule. Il me semble qu'il s'agit là d'une contribution majeure des mathématiciens d'expression arabe.
• De surcroit, dès le départ, les auteurs algébristes justifient leurs "algorithmes" à l'aide de preuves géométriques. S'ils connaissaient le corpus héronien, ils pouvaient y reconnaître une tentative similaire.

pas arbitraire et ne se réduisait pas à un enchaînement aléatoire de recettes sélectionnées par tâtonnements. Mais il est vrai qu'elles ne mettent pas l'accent sur la justification des procédures de résolution utilisées à l'inverse de ce qui se passe dans le cas des mathématiques grecques, ou à tout le moins pour une partie d'entre elles. Et quoi qu'on en pense, les Grecs ont manifestement considéré que cet aspect des mathématiques devait être pris en compte dans leur enseignement, vraisemblablement pas au niveau le plus élémentaire — dans lequel l'enseignement des procédures de calcul devait ressembler à ce que nous connaissons par les textes proche-orientaux[51] —, mais plutôt dans une étape ultérieure du "cursus". Avec les *Métriques* de Héron, on voit même que la tradition grecque des méthodes algorithmiques, à un certain niveau, n'est pas étrangère à ce souci de justification.

*

[51] Ce rapprochement (dans le cadre d'une législation "éducative" à mettre en place) se trouve déjà dans les *Lois* de Platon, 819 b1 - c7.

Annexe : démonstration de la Proposition I. 8 des *Métriques* (*Hero,* III, pp. 20. 6 - 24. 29)[52]

Et la démonstration géométrique de cela en est celle-ci :

Les côtés d'un triangle étant donnés, trouver l'aire.

Certes il est effectivement possible, une perpendiculaire étant menée et sa grandeur étant fournie, de trouver l'aire du triangle, mais c'est sans la perpendiculaire qu'il faut fournir l'aire.

Soit le triangle donné ΑΒΓ et que chacun des ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ soit donné; trouver l'aire.

Que dans le triangle soit inscrit un cercle ΔΕΖ, dont le centre est Η; et que ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ soient jointes.

D'une part le [rectangle contenu] par ΒΓ, ΕΗ est donc double du triangle ΒΗΓ, d'autre part celui par ΓΑ, ΖΗ du triangle ΑΓΗ, et celui par ΑΒ, ΔΗ du triangle ΑΒΗ;

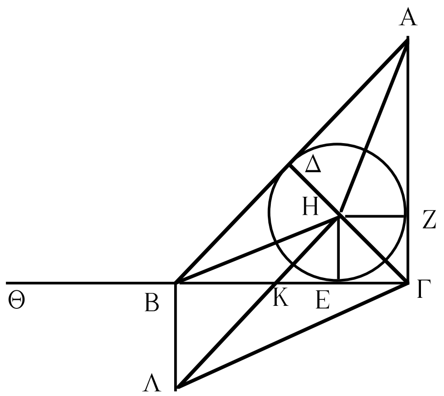
le [rectangle contenu] par le périmètre du triangle ΑΒΓ et ΕΗ – c'est-à-dire le rayon du cercle ΔΕΖ – est donc double du triangle ΑΒΓ.

Que ΓΒ soit prolongée et que soit placée ΒΘ égale à ΑΔ :

ΓΒΘ est donc la moitié du périmètre du triangle ΑΒΓ – à cause de ce que d'une part ΑΔ est égale à ΑΖ, d'autre part ΔΒ à ΒΕ, et ΖΓ à ΓΕ.

Le [rectangle contenu] par ΓΘ, ΕΗ est donc égal au triangle ΑΒΓ.

Mais le [rectangle contenu] par ΓΘ, ΕΗ est côté du [carré] sur ΓΘ par celui sur ΕΗ (*Metr.,* VII): il en résultera donc que l'aire du triangle ΑΒΓ par elle-même est égale au [carré] sur ΓΘ par celui sur ΕΗ.



Que d'une part une [droite] ΗΛ soit menée à angles droits avec ΓΗ, d'autre part ΒΛ avec ΓΒ; et que ΓΛ soit jointe.

Puisqu'alors chacun des deux [angles] ΓΗΛ, ΓΒΛ est droit, le quadrilatère ΓΗΒΛ est

[52] Dans la traduction j'indique ce qui correspond aux ajouts de l'éditeur entre accolades {} et les mots qu'il me paraît nécessaire d'ajouter en français entre crochets carrés [] .

donc dans un cercle : les [angles] ΓΗΒ, ΓΛΒ sont donc égaux à deux droits.

Or les [angles] ΓΗΒ, ΑΗΔ sont aussi égaux à deux droits – à cause de ce que les angles en Η sont coupés à moitié par les [droites] ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, et de ce que ΓΗΒ, ΑΗΔ sont égaux à ΑΗΓ, ΔΗΒ et de ce qu'ils sont tous égaux à quatre droits :

ΑΗΔ est donc égal à ΓΛΒ.

Mais, en outre, un droit, l'[angle] ΑΔΗ est aussi égal à un droit, l'[angle] ΓΒΛ : le triangle ΑΗΔ est donc semblable au triangle ΓΒΛ.

On a donc : comme ΒΓ relativement à ΒΛ, ΑΔ relativement à ΔΗ – c'est-à-dire ΒΘ relativement à ΕΗ,

et de manière alterne, comme ΓΒ relativement à ΒΘ, ΒΛ relativement à ΕΗ – c'est-à-dire ΒΚ relativement à ΚΕ à cause de ce que ΒΛ est parallèle à ΕΗ –

et, par composition, comme ΓΘ relativement à ΒΘ, ainsi ΒΕ relativement à ΕΚ;

de sorte aussi que comme le [carré] sur ΓΘ [est] relativement au [rectangle contenu] par ΓΘ, ΘΒ, ainsi celui [contenu] par ΒΕΓ relativement à celui [contenu] par ΓΕΚ – c'est-à-dire relativement au [carré] sur ΕΗ –

car, dans un [triangle] rectangle une [droite] ΕΗ a été menée, à partir de l'angle droit, perpendiculaire à la base;

de sorte que le [carré] sur ΓΘ par celui sur ΕΗ, dont un côté était l'aire du triangle ΑΒΓ, sera égal au [rectangle contenu] par ΓΘΒ par celui [contenu] par ΓΕΒ.

Et chacune des ΓΘ, ΘΒ, ΒΕ, ΓΕ est donnée – car d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ΑΒΓ, d'autre part ΒΘ est l'excès par lequel la moitié du périmètre excède ΓΒ, et ΒΕ l'excès par lequel la moitié du périmètre excède ΑΓ, et ΕΓ l'excès par lequel la moitié du périmètre excède ΑΒ – puisqu'alors, précisément, d'une part ΕΓ est égale à ΓΖ, d'autre part ΒΘ à ΑΖ, puisqu'elle est aussi égale à ΑΔ –.

L'aire du triangle ΑΒΓ est donc aussi donnée.

Alors cela sera synthétisé ainsi :

soit d'une part ΑΒ de 13 unités, d'autre part ΒΓ de 14 unités et ΑΓ de 15 unités. Compose les 13 et 14 et 15 : et il en résulte 42. De ceux-ci la moitié : il en résulte 21. Soustraits les 13 : 8 restantes; ensuite les 14 : 7 restantes; et encore les 15 : 6 restantes. Les 21 par les 8 et ce qui en résulte par les 7, et encore ce qui en résulte par les 6 : 7056 sont rassemblées; de ceux-ci un côté : 84. Autant que cela sera l'aire du triangle.

*