



HAL
open science

Quelques remarques sur l'usage du mouvement en géométrie dans la tradition euclidienne: de Platon et Aristote à 'Umar Khayyam

Bernard Vitrac

► **To cite this version:**

Bernard Vitrac. Quelques remarques sur l'usage du mouvement en géométrie dans la tradition euclidienne: de Platon et Aristote à 'Umar Khayyam. *Fahrang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies*, 2005, 18, pp. 1-56. hal-00174944

HAL Id: hal-00174944

<https://hal.science/hal-00174944>

Submitted on 25 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques remarques sur l'usage du mouvement en géométrie dans la tradition euclidienne : de Platon et Aristote à Omar Khayyâm¹

Bernard Vitrac CNRS, UMR 8567,
Centre Louis Gernet, Paris, France.

« Quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement ? »

Omar Khayyâm, *Epître sur l'explication
des prémisses problématiques du livre d'Euclide*²

« Des grandeurs, des figures et de leurs limites, mais aussi de leurs rapports
et de leurs propriétés, de leurs positions et de leurs *mouvements* variés,
c'est ce dont la géométrie est connaissance ... »

Proclus de Lycie, *Commentaires au premier Livre
des Éléments d'Euclide*³

Les deux citations placées en exergue montrent que la question des rapports entre géométrie et mouvement dans la tradition euclidienne est complexe et controversée. Deux auteurs aussi éminents que Khayyâm et Proclus ne sont manifestement pas d'accord. Car il ne faut pas se laisser abuser par la dimension rhétorique de la forme interrogative utilisée par le Commentateur persan. Le contexte textuel — il s'agit de critiquer Ibn al Haytham — montre très clairement qu'il n'y a pour lui aucun rapport entre géométrie et mouvement et qu'utiliser le second dans la première, c'est confondre les genres, le mathématique et le physique. Le Diadoque, à l'inverse, fait entrer l'étude des positions et des *mouvements* des figures dans la définition même de la science géométrique. Il est donc difficile d'imaginer des positions plus inconciliables. Pour commencer, j'expose sommairement dans quel contexte Khayyâm prononce sa condamnation du mouvement géométrique. On l'explique souvent par son adhésion à l'aristotélisme. Dans la deuxième partie, je reviens donc sur la ou plutôt sur les philosophies grecques des mathématiques, en particulier sur les

¹ Je remercie le Docteur Jafar Aghayani-Chavoshi de m'avoir encouragé à publier ce texte dans la revue *Fahrang*.

² J'ai utilisé les deux traductions françaises récentes de ce texte, [Khayyâm / Vahabzadeh, 1999] et [Khayyâm / Djebbar, 2001]. Pour cette citation, v. respectivement p. 310 et p. 86. Les références complètes des ouvrages cités se trouvent dans les indications bibliographiques, pp. 52-56. Les traductions des textes grecs sont les miennes, sauf mention explicite du contraire.

³ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 57, l. 10-14.

2 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

conceptions de l'objet géométrique qu'elles proposent. Puis je souligne, par contraste, le pragmatisme des géomètres anciens, qu'il s'agisse de ceux de la tradition des courbes — dans laquelle le recours au mouvement est inévitable —, ou des *Éléments* d'Euclide.

I. Le refus de Khayyâm

Khayyâm consacre la première partie de son *Épître* à la célèbre cinquième Demande d'Euclide, communément appelée « postulat des parallèles » :

« Et <il est demandé> que si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté, plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits ».

Comme beaucoup d'autres auteurs avant lui, il ne peut accepter qu'un tel énoncé soit admis sans démonstration. Il a consulté les écrits antérieurs, notamment ceux qui cherchent à « résoudre les doutes » que suscitent certaines portions des *Éléments* et qui constituent quasiment un genre littéraire. Il affirme n'y avoir rien trouvé de valable. Ainsi, parmi les Anciens, ni Héron, ni Eutocius, dit-il, n'ont abordé la question.

Il faut donc admettre qu'au moment où il rédige son *Épître*, Khayyâm n'a pas eu accès aux tentatives de certains de ses prédécesseurs grecs. A moins qu'il n'ait été un lecteur distrait, car il cite, parmi les "Modernes", son compatriote an-Nayrîzî et, s'il s'agit bien du *Commentaire* qui nous est partiellement parvenu sous son nom, Khayyâm pouvait y lire que plusieurs tentatives avaient été faites dans l'Antiquité (Abtinatius (?), Diodore, Ptolémée)⁴. Il pouvait même avoir accès à celle d'un certain Aganis, commentée par Simplicius⁵ et transmise par an-Nayrîzî⁶.

⁴ V. [an-Nayrîzî / Besthorn & Heiberg, 1893], p. 119. Abtinatius reste inconnu; Diodore est sans doute le spécialiste alexandrin de gnomonique du premier siècle avant notre ère. Ptolémée n'est autre que l'auteur de l'*Almageste*.

⁵ Il ne semble pas que le *Commentaire* de Proclus sur le premier Livre des *Éléments* ait été traduit en arabe. Le Diadoque donne quelques détails sur la tentative de Ptolémée, propose lui-même une preuve du postulat et suggère que ces essais sont au moins aussi anciens que Géminus, philosophe et mathématicien stoïcien qui vivait sans doute vers le milieu du premier siècle avant notre ère. Sérénus d'Antinoé mentionne également une tentative de son collègue Peithon. La littérature sur la théorie des parallèles est immense. V. par exemple [Bonola, 1955], [Houzel, 1991], [Jaouiche, 1986], [Pont, 1986].

⁶ V. [an-Nayrîzî / Besthorn & Heiberg, 1893], pp. 119-133. Trad. française dans [Jaouiche, 1986], pp. 129-136.

Si rien de ce qu'il a lu sur le sujet ne l'a satisfait, c'est tout particulièrement la tentative d'Ibn al Haytham contenue dans son *Livre sur la résolution des doutes* (*shukûk*) dans le livre des *Éléments d'Euclide* ... qui a retenu son attention et lui a inspiré les critiques les plus féroces. Ibn al Haytham a en effet introduit des considérations cinématiques dans la théorie des parallèles (dont il a — comme d'autres avant lui — changé la définition), afin de démontrer le célèbre postulat. Il a notamment affirmé que si un segment de droite se meut perpendiculairement à une droite fixe donnée en conservant l'orthogonalité vis-à-vis de celle-ci, l'extrémité qui ne se trouve pas sur la droite fixe décrit une autre droite, parallèle à celle qui est immobile. La première objection de Khayyâm est technique : qu'est-ce qui permet de dire qu'une telle chose est possible ? Observons qu'Ibn al Haytham, dans cet écrit *Sur la résolution des doutes*, n'approfondit pas mais renvoie à un ouvrage antérieur dans lequel il avait traité de ces questions avec force détails, son *Livre sur l'explication des prémisses* (*musâdarât*) *d'Euclide*. Khayyâm n'a peut-être pas eu accès à cet autre traité. Il n'en dit rien.

Quoi qu'il en soit, au-delà même de l'aspect strictement géométrique, le débat sur les parallèles, de son point de vue, est aussi l'occasion de réfléchir sur la notion de "principes" d'une science (en particulier ceux de la géométrie) et sur les rapports entre philosophie, physique et mathématiques⁷. D'où ce jugement sévère à l'encontre de son prédécesseur que n'auraient probablement pas infléchi des explications techniques plus détaillées (comme celles que l'on trouve dans le livre *sur l'explication des postulats*) :

« C'est là un propos qui n'a aucun rapport avec la géométrie et ce pour plusieurs raisons ... Quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement, et quelle est la signification du mouvement ? Ou encore : il est évident pour les spécialistes que la ligne est une largeur qui ne peut être ailleurs que dans une surface et cette surface dans un corps ... Comment alors le mouvement lui serait-elle permis si elle est abstraite de son lieu ? Ou encore : comment la ligne peut-elle résulter du mouvement du point alors qu'elle est antérieure au point par l'essence et par l'existence ? »⁸.

⁷ Ce point de vue sera partagé par Nasîr ad-Dîn at-Tûsî. Dans son opuscule *qui délivre des doutes concernant les droites parallèles*, il note l'existence du renvoi par Ibn al-Haytham à un traitement détaillé dans un ouvrage auquel lui-même n'a pas eu accès. Mais ce qu'il a lu dans les *shukûk* lui suffit pour juger l'auteur incompétent en matières de rectification des principes. V. [Jaouiche, 1986], pp. 204-205.

⁸ Trad. [Khayyâm / Djebbar, 2001], pp. 86-87. Seule divergence dans [Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], p. 310 : « il est évident ... que la ligne est un accident qui ne peut exister que dans une surface ... ».

4 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

Instruisant un véritable procès Khayyâm imagine une défense qu'il récuse par anticipation : Euclide lui-même, au début de son Livre XI, a donné une définition de la sphère en termes de mouvement et cela pourrait justifier le recours aux considérations cinématiques en géométrie. Pour Khayyâm, ce genre d'argument d'autorité ne vaut pas et ce pour deux raisons :

(i) en procédant comme il l'a fait, Euclide lui-même s'est trompé. Il a opté pour une présentation simplifiée de la stéréométrie, supposant une certaine compétence de la part du lecteur au moment où celui-ci est en mesure d'aborder ces questions.

(ii) La faute d'Euclide est bénigne et facile à réparer en adoptant une autre définition de la sphère. Ce n'est pas le cas de l'erreur d'Ibn al Haytham qui porte sur les fondements mêmes des démonstrations géométriques.

Les implications philosophiques de la question du postulat seront donc soulignées à plusieurs reprises par Khayyâm, dans l'introduction générale de l'*Épître*, dans celle qui précède la première partie et dans les considérations qu'il intercale entre ses Propositions 3 et 4. Dans chacune de ces occurrences, il se réfère à Aristote (ou plutôt au Philosophe) et il cite même explicitement le livre *Sur la démonstration* dans lequel on reconnaît généralement les *Seconds Analytiques*⁹. Il fait allusion à la typologie des ἀρχαί qu'on peut y lire, au fait que le géomètre n'a pas à démontrer ses principes mais à les décrire de manière satisfaisante, leur justification ultime revenant à la Philosophie première selon une division du travail que l'on trouve effectivement chez le Stagirite¹⁰. Il distingue donc démonstration géométrique et justification philosophique des principes dont il donne lui-même quelques exemples.

Étant donnée cette évidente influence aristotélicienne, il est naturel d'y rattacher également le refus du recours au mouvement dans les questions géométriques. Et comme nous allons le voir, il est facile de trouver des assertions du corpus aristotélicien qui excluent que les êtres mathématiques possèdent le mouvement. C'est notamment le cas quand le Stagirite cherche à distinguer les différences sciences théorétiques en fonction du type d'êtres sur lesquels elles portent et, en particulier, de contraster physique d'un côté, et mathématiques de l'autre. C'est très probablement ce type de considérations que Khayyâm avait à l'esprit quand il parle de confusion des genres de la part de son prédécesseur.

Cela veut-il dire que toute forme de mouvement soit à exclure en géométrie ? Ou, en revenant aux questions mêmes de Khayyâm, que veut

⁹ V. [Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], pp. 308, 316, 328; [Khayyâm / Djebbar, 2001], pp. 84, 92, 97.

¹⁰ V. par exemple *Met.*, Γ, 3. Sur le caractère aristotélicien de la philosophie mathématique de Khayyâm, v. [Jaouiche, 1986], pp. 76-85.

dire ici "mouvement" ? Pour reprendre des distinctions aristotéliennes, il est fort peu probable qu'Ibn al-Haytham ait attribué un mouvement physique naturel (comme celui des vivants ou des éléments simples) ou forcé aux êtres mathématiques. Le Stagirite explique que le changement (μεταβολή) ou le mouvement (κίνησις) — la distinction n'est pas toujours très bien marquée — s'exprime selon différentes catégories : celle du lieu, bien entendu (le terme φορά, souvent traduit par "translation", se spécialise dans ce sens), mais aussi celle de la quantité (augmentation, diminution), celle de la qualité (altération) et il y adjoint parfois la génération et la destruction. Si les idées d'altération et de corruption paraissent étrangères à la conception grecque des objets de la géométrie, plusieurs auteurs ont accepté de parler de mouvement local pour les figures, et, par métaphore ou par abus de langage, ils ont rapproché certaines constructions de la notion de génération, en particulier pour les courbes et les figures solides.

L'auteur de l'*Épître* est-il lui-même totalement cohérent sur ce point ? On voit qu'il utilise la méthode dite de superposition, aussi bien dans les justifications philosophiques des principes¹¹ que dans ses démonstrations géométriques¹² ? Pour certains savants — nous verrons que c'était le cas de Thâbit ibn Qurra¹³ —, la superposition d'une figure sur une autre implique au moins une variation imaginaire de sa position et constitue donc une forme de mouvement local. Qu'Euclide le fasse ne constitue certainement pas une justification et il n'est pas question de s'en tirer, comme dans le cas de la sphère, en disant que l'usage en est permis dès lors qu'on s'adresse à des géomètres avertis. L'auteur des *Éléments* a recours à cette technique dans son *premier* théorème (Prop. I. 4¹⁴) et Khayyâm s'en sert pour établir un fait géométrique auquel il reconnaît lui-même une valeur fondationnelle.

Exclure les constructions de la géométrie paraît tout aussi impossible et là encore certains interprètes anciens, notamment platoniciens, feront le lien avec la thématique du mouvement. Ils soulèveront la question du rôle des diagrammes géométriques, des instruments, bref de la place du sensible, du mécanique et de l'instrumental dans la pratique de la géométrie. Khayyâm n'est guère prolix sur le sujet. A un certain moment de son argumentation, il

¹¹ V. la justification exemplifiée du postulat d'Euclide ([Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], p. 316; [Khayyâm / Djebbar, 2001], p.90).

¹² V. sa Proposition 3 ([Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], p. 326; [Khayyâm / Djebbar, 2001], pp. 95-96).

¹³ Dans son opuscule intitulé *Sur le <fait> que si deux droites sont menées suivant deux <angles> moindres que deux angles droits, elles se rencontrent*, que Khayyâm ne semble pas avoir connu. Trad. française dans [Jaouiche, 1986], pp. 151-160.

¹⁴ C'est précisément ce que fait remarquer Thâbit ibn Qurra dans l'opuscule cité *supra*. V. [Jaouiche, 1986], p. 152.

6 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

introduit une distinction entre d'un côté la preuve d'existence d'une certaine ligne (représentant la distance entre deux droites), preuve qui relèverait du philosophe, et, de l'autre, la détermination effective de son tracé, ce qui est de la compétence du géomètre¹⁵. On imagine assez mal un géomètre rejetant la notion de construction effective, mais rien n'oblige à l'interpréter en termes de mouvement.

De fait, ce que Khayyâm rejette clairement, ce sont les définitions des grandeurs géométriques les plus élémentaires — ligne, surface, solide — dites génétiques, en termes de mouvement (κίνησις, φορά) ou de flux (ρύσις), respectivement d'un point, d'une ligne ou d'une surface. La tradition grecque, à tort ou à raison, attribuait ces Définitions aux Pythagoriciens. Aristote mentionne cette conception de la surface (resp. la ligne) engendrée par une ligne (resp. un point) en mouvement dans le cadre d'une critique de la théorie de l'âme comme nombre automoteur due à Xénocrate¹⁶. Il ne précise pas qui en fut l'inventeur, mais il n'y adhère certainement pas. Ainsi, dans les *Topiques*, il condamne ceux qui définissent ce qui est en repos et déterminé (ἐν ἡρεμίᾳ καὶ τοῦ ὀρισμένου) à l'aide de ce qui est indéterminé et en mouvement (διὰ τοῦ ἀορίστου καὶ τοῦ ἐν κινήσει)¹⁷. La tradition grecque n'est donc pas unanime et, sans prétendre que ceci explique cela, nous pouvons constater que cette absence de consensus prévaut également chez les mathématiciens des Pays d'Islam.

Les désaccords portent sur des questions fondamentales, à la fois philosophiques et techniques : de quelle(s) manière(s) doit-on définir les objets géométriques fondamentaux ? Ce qui renvoie aussi bien au statut philosophique que l'on reconnaît aux dits objets et à la science qui en traite qu'aux procédures effectivement utilisables. Quelle est la signification des constructions ? Comment faut-il interpréter les différences qu'il y a entre certains types d'assertions comme les problèmes et les théorèmes, les postulats et les axiomes ... ? Faut-il accorder ou non une certaine place au mouvement en géométrie ?

II. La nature des objets géométriques

1. La géométrie « des origines »

Le recours au mouvement dans la géométrie grecque renvoie aux premières recherches des Anciens concernant la Nature. Ni eux, ni nous Modernes, ne

¹⁵ V. [Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], p. 330; [Khayyâm / Djebbar, 2001], p. 99.

¹⁶ V. *De anima*, I, 4, 409 a4-5.

¹⁷ V. *Topiques*, VI, 4, 142 a19-21.

savons quoi que ce soit de précis sur les débuts des sciences grecques. Dans le cas de la géométrie, les mythes d'origine que les historiens antiques ont élaborés pour combler ce déficit d'information lui assignent deux origines possibles :

- (i) L'une réside dans la pratique de l'arpentage. C'est l'explication que propose l'historien Hérodote (V^e s. avant notre ère) en s'appuyant sur l'analyse du mot "géométrie" ($\gamma\epsilon\omega\text{-}\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ = mesure de la terre)¹⁸.
- (ii) L'autre explication, à partir d'une explication étymologique très similaire ($\gamma\epsilon\omega\text{-}\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ = mesure de (toute) la Terre), rattache la géométrie à des préoccupations plutôt spéculatives, en l'occurrence cosmologiques et géographiques : description du cosmos, des astres et de la Terre, du Monde habité ... Cette seconde explication est aussi ancienne que la première puisqu'on la trouve par exemple chez le poète Aristophane¹⁹, contemporain d'Hérodote.

L'une et l'autre sont complétées par des affirmations historiques invérifiables : selon Hérodote, c'est en Égypte que la géométrie a été inventée. Ceux qui adoptent l'autre version préfèrent soit souligner le caractère grec et éminemment philosophique de l'entreprise, soit admettre la possibilité d'une influence babylonienne par l'intermédiaire d'Anaximandre par exemple. Les historiens modernes sont plutôt sceptiques à l'égard de ces mythes d'origine, mais ils soulignent la réalité d'une orientation fondamentalement géométrique dans différentes pratiques sociales : politique, urbanisme, spéculations cosmologiques, enquête ethno-géographique ... de la Grèce archaïque des VII^e-VI^e siècles avant notre ère)²⁰. Nos sources ne permettent guère de remonter au-delà du V^e s., mais il semble bien que l'usage de "modèles" géométriques, parfois très sommaires, soit un trait caractéristique de cette première philosophie naturelle et politique des Grecs. Même si cela ne nous étonne plus aujourd'hui, cela n'a rien d'inévitable ou d'évident : c'est ce que montre la comparaison avec les autres civilisations de l'Antiquité dans lesquelles, à ma connaissance, rien de comparable n'a existé.

L'usage de modèles géométriques sera particulièrement important pour les spéculations astronomico-cosmologiques. Celles-ci portent aussi bien sur des problèmes structurels (forme du cosmos, des corps célestes et de la Terre; tailles et éloignements mutuels des astres, stabilité de la Terre ...) que sur les mouvements de ces corps, leur régularité ou leurs anomalies, leurs périodes ... Les débuts de cette "modélisation" sont certainement très modestes et les historiens de l'astronomie portent parfois un jugement très

¹⁸ V. Hérodote, *Histoires*, II, 109.

¹⁹ V. Aristophane, *Les nuées*, v. 200-217.

²⁰ V. [Détienne, 1965], [Lévêque & Vidal-Naquet, 1964], [Vernant, 1965].

8 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

critique sur ce qu'ils considèrent comme de simples spéculations philosophiques, non quantifiées et mal adossées aux résultats de l'astronomie d'observation que le Proche-Orient pratiquait déjà depuis plusieurs siècles²¹.

Reste un point important pour notre propos : avec l'usage de ces "modèles", l'interrogation va porter à la fois sur de "vrais" mouvements — c'est-à-dire des mouvements physiques —, et sur des mouvements, en un sens métaphorique, dans le modèle géométrique associé : par exemple l'astre sera assimilé à un point sur une sphère, voire à une sphère. Il sera alors naturel — et inévitable — de parler du mouvement d'un point sur une sphère, du mouvement de la sphère elle-même. La trajectoire réelle de l'astre sera assimilée à une courbe. Ainsi, lorsque Platon décrit, dans le *Timée*, un modèle avec deux sphères homocentriques, il précise que celui-ci implique des trajectoires hélicoïdales (ἑλικά) pour les astres soumis aux deux mouvements du Même et de l'Autre²².

A partir de ce genre de considérations, le géomètre pourra étudier et utiliser ces nouveaux objets en "oubliant" leur origine physique et le contexte qui a justifié leur prise en compte. Il pourra, par exemple, généraliser la spirale sphérique, qui rend compte du mouvement annuel apparent du soleil, et introduire d'autres types de courbes engendrées de la même manière — par combinaison de deux mouvements simples — comme l'hélice cylindrique ou la spirale sur la surface latérale d'un cône ... Il pourra également admettre que des figures géométriques soient mises en mouvement pour permettre de résoudre des problèmes géométriques difficiles comme celui de l'intercalation de deux droites moyennes proportionnelles entre deux droites données.

C'est précisément ce que proposera Archytas de Tarente, géomètre, philosophe et homme politique contemporain et ami de Platon²³. La tradition grecque fait de cette introduction du mouvement en géométrie l'évènement fondateur de la mécanique mathématique²⁴. La notion même de

²¹ V. par exemple [Bowen & Goldstein, 1983].

²² V. *Timée*, 39 a7. Aristote (*Met.*, B, 2, 998 a4-5) mentionne également les mouvements célestes en hélice, cette fois pour souligner l'écart entre réalité physique et modélisation géométrique.

²³ La solution d'Archytas est transmise par Eutocius dans son commentaire à la première Proposition du Livre II de la *Sphère et du cylindre* d'Archimède (v. [Eutocius / Mugler, 1972], pp. 62-64, sous l'autorité de l'historien péripatéticien Eudème de Rhodes. Dans sa solution Archytas engendre un demi-tore et un cône droit par la révolution d'un demi-cercle (περιαγόμενον, κινούμενον) et d'un triangle rectangle (περιεχθῆ, ἀντιπεριαγόμενον), respectivement.

²⁴ V. Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, L. VIII, § 83.

« mécanique mathématique », en grec, est tout à fait ambiguë. Il s'agit d'abord de l'étude des machines (μηχαναί), mais on voit, aussi bien chez ses adversaires que chez ses partisans que cela désigne *aussi* une certaine approche géométrique impliquant mouvement et/ou usage d'un instrument. Certains Platoniciens critiqueront cette approche et, si l'on en croit Plutarque, Platon lui-même aurait réprouvé cette "corruption" de la géométrie²⁵. Il n'est certainement pas possible d'accepter les récits de Plutarque sans réserves²⁶. Remarquons cependant qu'il met l'accent sur l'aspect *instrumental* des solutions proposées par Archytas, Eudoxe et Ménechme plutôt que sur le recours au mouvement. Mais le fait est que l'on trouve certaines affirmations dans les dialogues qui suggèrent que le Maître de l'Académie n'approuvait certainement pas le recours au mouvement dans les questions géométriques.

2. Platon

A cet égard, une nette inflexion se fait sentir au début du IV^e s. avant notre ère — l'époque de Platon — par rapport à celle des premiers Présocratiques. Ceux-ci faisaient de l'intelligibilité du changement en général, et du mouvement en particulier, une question centrale de leur Enquête sur la nature. S'ils recouraient à des métaphores et autres modèles géométriques, ils ne s'interrogeaient probablement pas sur les modes spécifiques d'existence des objets physiques ou géométriques, sur les distinctions de méthodes que l'on peut (ou que l'on doit) établir entre certaines disciplines spécialisées.

Différents points de vue, parfois radicalement opposés, furent adoptés au cours du V^e s., par exemple le mobilisme universel d'Héraclite — tout est flux — et la critique éléatique, énoncée par Parménide et ses disciples, pour qui le changement est inintelligible²⁷ et qui introduisent l'opposition irréductible de l'Être et du Devenir. Pour eux, le premier seul est connaissable et digne d'intérêt, parce que stable et soustrait au changement. Tel est le statut que devra posséder ce qui prétend être objet de science. Quoique les détails ne nous soient pas connus, cette crise "philosophique" a probablement favorisé la distinction du "physique" et du

²⁵ V. Plutarque, *Vie de Marcellus*, 14.7—19.12; *Propos de tables*, Livre VIII, quest. 2.

²⁶ Sur ce point, je me permets de renvoyer à mon étude « Mécanique et mathématiques à Alexandrie : le cas de Héron » à paraître dans la revue *Oriens Occidens*, 2007.

²⁷ Certains arguments de Zénon furent particulièrement importants. Si on les accepte, le mouvement *local* est incompréhensible. En outre son argumentation avait un caractère "logique", proche du style mathématique.

10 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

"mathématique", distinction que recouvre celle des instruments de connaissance : perception *versus* raison discursive ou intellection.

La géométrie avait « fait ses débuts » comme une sorte de "schématisation". L'exigence parménidienne conduisit à un divorce qu'accepte Platon. Il distingue (Aristote dit qu'il "sépare") les sensibles et les intelligibles. Dans la version forte que l'on trouve dans la *République* ²⁸, les objets mathématiques appartiennent au monde intelligible. Leur stabilité — et donc la scientificité des disciplines qui s'en occupent — est garantie, mais la capacité desdites disciplines à expliquer la réalité physique — Platon dirait plutôt : « la capacité des mathématiques à expliquer la participation des sensibles au monde intelligible » — peut s'en trouver diminuée.

Au demeurant, la séparation stricte entre deux sortes d'êtres :

- d'une part les intelligibles, seuls êtres véritables, qui échappent au mouvement, à la divisibilité et à la pluralité, qui ne possèdent ni lieu, ni extension, et,
 - d'autre part les sensibles, évidemment dotés d'extension, d'une position et participant au changement et à la pluralité,
- une telle séparation, disons-nous, n'est guère compatible avec l'idée que la géométrie est une science, et donc qui porte sur des intelligibles. Il suffit, pour s'en convaincre, de regarder la façon dont procèdent les géomètres.

Ceux-ci raisonnent en effet sur des diagrammes qu'ils construisent, diagrammes physiques tracés sur le sable, la cire, la poterie ou le papyrus, à la fois particuliers et approximatifs ... Mais le diagramme qui accompagne la Proposition géométrique n'est que le signe d'une entité abstraite que l'on pourrait appelée « schéma mathématique », composée d'objets idéaux (le Carré en Soi par exemple), et à propos desquels est énoncée la Proposition. Ce caractère intelligible est indispensable pour garantir la validité et l'universalité du résultat mathématique. On pourra donc considérer que l'objet *réel* de la géométrie est non sensible et critiquer la manière dont s'expriment ses spécialistes. Ces derniers parlent de *tendre* une ligne, d'*appliquer* une aire, de *construire* une figure, *comme si* la géométrie était une pratique dont les objets sont *engendrés* ou résultent d'une sorte de fabrication. Selon Platon, c'est parfaitement ridicule²⁹. En fait les géomètres ne produisent pas leurs objets, ils les découvrent³⁰. Reste cependant qu'il paraît bien difficile de dire que le Carré ou le Triangle en Soi n'ont pas d'extension, que le triangle isocèle est unique en son genre. C'est sans doute pour échapper à ce genre de difficultés que Platon, si l'on en croit

²⁸ V. l'image de la ligne, Livre VI, 509 d6-511 e5.

²⁹ V. *Resp.*, L. VII, 527 a.

³⁰ V. *Euthydème*, 290 c1-6.

Aristote³¹, introduisit un niveau d'être intermédiaire, entre intelligibles et sensibles, pour les objets mathématiques³². Ceux-ci, précise le Stagirite, sont pluriels — ce en quoi ils diffèrent des intelligibles —, sans doute doués d'extension et divisibles, mais aussi éternels et dépourvus de changement (ἀκίνητα), ce qui les distingue des sensibles.

Que les objets géométriques, selon Platon, ne participent pas au mouvement, c'est ce que confirme l'exposé du célèbre programme mathématique du Livre VII de la *République*. Celui-ci semble suivre le schéma quadripartite dit du quadrivium pythagoricien : arithmétique, géométrie, astronomie, harmonique. Mais au moment où Socrate va introduire l'astronomie, il revient en arrière (528 a) car, dit-il, il a oublié l'étude de ce qui est étendu selon trois dimensions — la géométrie des solides — considéré en soi, avant son étude en mouvement (astronomie). Le programme est donc structuré par une opposition polaire fondamentale entre « ce qui est en soi et immobile » et « ce qui est en mouvement (et en relation) ». Clairement la géométrie (plane ou solide) est du côté de l'immobile.

3. Les classifications des sciences mathématiques

Cette réflexion platonicienne sur les spécialités mathématiques participe d'un mouvement plus général, probablement amorcé à la charnière des V^e et IV^e siècles. Elle aboutit à l'élaboration de différents schémas de classifications des sciences mathématiques : le quadrivium dit pythagoricien, le système de la *République* avec ses cinq spécialités, la classification dite à tort de Géminus puisque, là aussi, le rôle de l'Académie semble avoir été important dans son élaboration³³. Les détails nous sont connus par des auteurs tardifs³⁴ : le néo-pythagoricien Nicomaque de Gérase³⁵ (début du II^e

³¹ V. *Met.*, A, 6, 987 b14.

³² Contrairement à ce que l'on dit souvent, cette doctrine du statut ontologique intermédiaire des êtres mathématiques ne se trouve pas explicitée dans la *République*. On peut probablement l'identifier dans le *Timée*, dialogue postérieur qui par ailleurs témoigne d'une évolution dans la position de Platon vis-à-vis des mathématiques, en particulier dans leur capacité à traduire l'intelligibilité (partielle) du cosmos.

³³ Sur ces points, je me permets également de renvoyer à une autre de mes études « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne » à paraître dans les *Archives de philosophie*, Juin 2005.

³⁴ Le système à cinq sciences de la *République* est repris par Théon de Smyrne dans l'introduction de son *Exposition*. V. [Théon S. / Hiller, 1878], p. 1, l. 16-17.

³⁵ Présentation du quadrivium : [Nicomaque / Hoche, 1866], p. 4, l. 13—p. 6, l. 7.

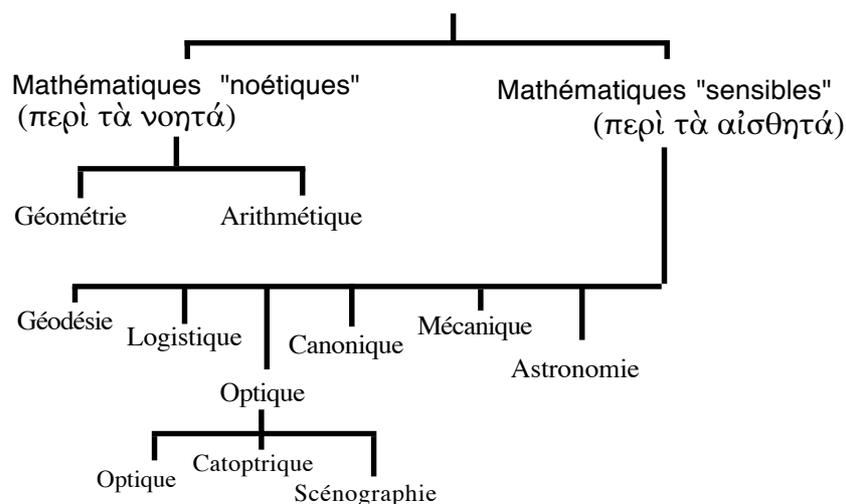
12 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

s. de notre ère) et ses commentateurs³⁶, le néo-platonicien Proclus (V^e s. de notre ère)³⁷. On peut les résumer commodément sous forme des schémas suivants :

Classification de la quantité et classification des sciences (« quadrivium pythagoricien ») d'après Nicomaque de Gêrèse

[Êtres]	Discrets	Continus
Indéterminée	Multitude	Grandeur
Déterminée	Poson En soi / en relation	Pèlikon Non-mue / mue
Sciences Correspondantes	Arithmétique / Musique	Géométrie / Sphérique

Les grandes articulations de la classification des sciences mathématiques par Géminus selon Proclus



Le schéma de Nicomaque s'appuie sur trois oppositions polaires, d'abord celle quasi ontologique du discret et du continu (déjà thématisée par Aristote), celle de « ce qui est en soi » *versus* « ce qui est en relation » et, point crucial pour notre propos, la géométrie et l'astronomie — disciplines de l'être continu — sont opposées comme spécialités respectives du continu

³⁶ V. [Jamblique / Pistelli, 1894], p. 7, l. 2—p. 9, l. 1

³⁷ Présentation du quadrivium : [Proclus / Friedlein, 1873], p. 35, l. 17—p. 38, l. 2. Présentation de la classification dite de Géminus, *ibid.*, p. 38, l. 2—p. 42, l. 8.

immobile et du continu en mouvement, en conformité avec ce que nous avons vu dans le Livre VII de la *République*. Même dans la classification dite de Géminus, pourtant plus riche et davantage en relation avec le travail des mathématiciens, il existe une partie des mathématiques où le mouvement n'a rien à faire, l'arithmétique et la géométrie, puisque ces spécialités portent sur des intelligibles.

En résumé, un trait constant chez tous ces auteurs est que la géométrie est une science d'objets *qui ne participent pas au mouvement*. Dans ces schémas classificatoires, notons-le au passage, "mouvement" est entendu au sens physique du terme. Il ne peut dès lors intervenir que dans des spécialités qui portent sur des sensibles comme la mécanique ou l'astronomie. Les savants des Pays d'Islam ont eu connaissance du quadrivium de Nicomaque, ainsi que des nombreuses considérations sur la hiérarchie des sciences, en particulier mathématiques, que l'on trouve chez Aristote. J'ignore s'ils ont eu accès à la classification dite de Géminus et, d'une manière plus générale, à la littérature néo-platonicienne concernant la philosophie des mathématiques. Plusieurs philosophes, notamment al-Kindī, al-Fārābī, et Ibn Sīnā ont élaboré leurs propres schémas de classification, mais il ne semble pas qu'ils aient accordé la même importance à l'opposition du repos et du mouvement en ce qui concerne la distinction des différentes spécialités mathématiques³⁸.

4. Aristote

Quoi qu'il en soit, ces savants connaissaient très bien les écrits d'Aristote et les nombreuses considérations que celui-ci développe au sujet des sciences. Notons cependant que le Stagirite n'a semble-t-il pas consacré un écrit spécifique aux mathématiques. Ses remarques, assez nombreuses, sont éparées, souvent incidentes et pas toujours très explicites. En dégager une épistémologie des mathématiques n'est pas une tâche aisée³⁹. Les exégètes, à loisir, ont privilégié l'aspect ontologique — les objets mathématiques selon Aristote n'ont pas d'existence séparée mais sont étudiés en tant que séparés (en tant qu'"abstrait") des substances sensibles — ou l'aspect logique (théorie de la démonstration), sans oublier

³⁸ Cette affirmation n'est peut-être que le résultat de mon ignorance et de ma connaissance de seconde main de la littérature arabe. Sur cette question des classifications, je m'appuie sur [Jolivet, 1997].

³⁹ La littérature sur le sujet est considérable. Cf. [Mueller, 1970]; [Lear, 1982], [Mc Kirahan, 1992], [Cleary, 1995].

14 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

la dimension "psychologique" (au sens ancien du terme), puisque pratiquer la géométrie (διαγράφειν), comme penser (νοεῖν), ne peut se faire sans recourir à des représentations mentales (φαντάσματα)⁴⁰.

Deux points méritent d'être examinés dans la mesure où l'un et l'autre sont impliqués dans la question du mouvement en géométrie :

(i) Si le Stagirite, à plusieurs reprises, a souligné la différence qui existe, selon lui, entre mathématique et physique, il n'a pas vraiment élaboré une classification détaillée des disciplines spécialisées. Il a préféré introduire l'idée d'une hiérarchie continue des savoirs, hiérarchie ordonnée selon différents critères.

(ii) Dans sa polémique comme le réalisme platonicien, la théorie de l'"abstraction" constitue un premier pas vers la mentalisation⁴¹ des objets mathématiques, même si le Stagirite n'est guère explicite sur le caractère conceptuel et le fonctionnement cognitif de l'"abstraction".

Les écoles hellénistiques (Stoïcisme, Épicurisme) lui emboîteront le pas sur ce point et, dans les querelles qui les opposent, entre elles et avec les Sceptiques, la question sera moins de dire en quel sens les objets mathématiques existent (débat Platon / Aristote) que de savoir s'ils sont *concevables* ou non, et comment.

Dans le très célèbre premier chapitre du Livre E de la *Métaphysique*, présupposant une première distinction de la pensée en : « théorétique — pratique — poétique », le Stagirite distingue trois sortes d'êtres en procédant à l'aide de deux oppositions polaires : 1. Selon qu'ils sont soumis au mouvement et au changement ou, à l'inverse, immuables; 2. Selon qu'ils ont ou non une existence séparée. Ceci le conduit à affirmer qu'il existe (au moins) trois sciences théorétiques distinctes : la physique, la mathématique et la science première ou théologie.

Ainsi qu'il le reconnaît lui-même, l'identification qu'il propose pour la mathématique n'est pas évidente :

« Mais la mathématique aussi est théorétique; mais, qu'elle soit science d'êtres immobiles et séparés (ἀκινήτων καὶ χωριστῶν), en réalité c'est loin d'être évident (νῦν ἄδηλον); en revanche, que certaines disciplines mathématiques les étudient en tant qu'immobiles et en tant que séparés (ἢ ἀκίνητα καὶ ἢ χωριστα), voilà qui est évident »⁴².

⁴⁰ V. *De memoria*, 450 a1-10; *de Anima*, III, 7, 431 a 15-17; 431 b 15-16; *Ibid.*, III, 8, 432 a 8-10.

⁴¹ Je reprends cette expression à Ian Mueller. Cf. [Mueller, 1970] et surtout [Mueller, 1982].

⁴² *Met.*, E, 1, 1026 a7-10.

A quoi se rapporte ici l'adjectif non-évident (ἄδηλον) ? Soit à la conjonction (ἀκινήτων καὶ χωριστῶν), soit à l'un des termes seulement, en l'occurrence "χωριστῶν" ? Dans les deux cas, il faut comprendre qu'il y a une différence entre le statut (réel) des objets mathématiques et la façon dont certaines de ces spécialités les considèrent. Mais, si l'on fait la première lecture, cela voudra dire "qu'en réalité" les objets mathématiques ou bien ne sont pas immuables ou bien n'ont pas d'existence séparée. Si l'on admet la seconde, ils sont, ainsi que cela est affirmé un peu plus loin⁴³, immobiles, mais sans existence séparée. Avec la première interprétation, on ne peut pas identifier les disciplines mathématiques auxquelles il est fait allusion ici; avec la seconde il s'agit très certainement de l'arithmétique et de la géométrie⁴⁴. Déjà en *Métaphysique* A, 8, 989 b32-33, Aristote précise d'ailleurs que les objets mathématiques font partie des êtres sans mouvements (ἀνευ κινήσεως), sauf ceux dont traite l'astronomie. Ainsi, en bon (et ancien) disciple de Platon, le Stagirite admet donc que la géométrie est une science qui porte sur des objets qui échappent au mouvement.

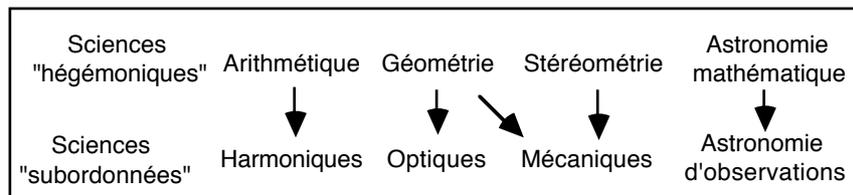
S'il circonscrit ainsi une partie des sciences mathématiques par rapport à la physique et à la théologie, aucun texte conservé de son œuvre n'est spécifiquement consacré à la classification des spécialités mathématiques. Il connaît celles qu'ont proposées les Platoniciens et critique leur fondement philosophique. Lui-même préfère introduire une hiérarchie entre savoirs, envisageables selon différents points de vue. Le critère le plus spécifiquement aristotélicien est celui qui articule les savoirs sur le mode « hégémonique / subordonné ».

⁴³ *Ibid.*, 1026 a14-15. La divergence apparente entre les deux passages (χωριστὰ, οὐ χωριστὰ) tient à ce que "séparé" peut se dire soit du mode d'existence des objets de science, soit du mode de leur étude (« en tant que séparé »), qui peuvent être différents. Dans un texte parallèle (*Met.*, K, 7, 1064 a30-33), il est bien dit que la mathématique théorique porte sur des objets immobiles mais non séparés.

⁴⁴ [Crubellier & Pellegrin, 2002], p. 218 prône la première lecture et en déduit que les objets mathématiques auxquels il est fait référence ici ne seraient (en réalité) ni immobiles ni n'auraient d'existence séparée et que, par conséquent, les μαθήματα qui les étudient sont « les plus physiques des sciences mathématiques » (Cf. Aristote, *Physique*, II, 2, 194 a7-8). Cela me paraît peu probable, d'une part parce que la négation d'une conjonction est une disjonction (ce qui rend l'identification délicate), d'autre part parce que l'astronomie, qui pour Aristote fait incontestablement partie des parties les plus physiques des mathématiques, ne traite pas ses objets comme immobiles. Si l'on admet la cohérence des deux assertions (1026 a7-10; a14-15), l'incertitude indiquée par le "ἄδηλον" porte seulement sur le mode d'existence, séparé ou non, des objets mathématiques, le point de désaccord fondamental entre Aristote et les Platoniciens, et non sur la conjonction des deux critères.

16 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

Des différents exemples proposés par le Stagirite⁴⁵, on peut extraire le schéma suivant :



On peut donc dire qu'il y a trois sciences mathématiques fondamentales pour le Stagirite (et non pas 4, ni 5) et que les autres leur sont subordonnées⁴⁶.

D'autres critères de comparaison entre sciences sont mentionnés dans le corpus aristotélicien : l'universel l'emporte sur le particulier, le difficile sur le facile, une étude cultivée pour elle-même sur une connaissance poursuivie pour son utilité. On peut aussi ordonner les sciences en fonction de leur connaissance plus ou moins exacte des causes ou par leur degré d'exactitude. Celui-ci dépend de la simplicité et de l'antériorité logique de l'objet d'étude. Ce qui procède à partir de principes moins nombreux est plus exact et ce critère fait écho aux opérations duales d'"abstraction" (ἐξ ἀφαιρέσεως) et d'"addition" (ἐξ προσθέσεως). Ainsi l'arithmétique est plus exacte que la géométrie car elle fait l'économie de la position. Ces deux-là sont plus exactes que les sciences qui considèrent le mouvement et parmi ces dernières, celle qui étudie le premier mouvement, l'astronomie, est la plus exacte⁴⁷.

Un texte de Jean Philopon⁴⁸, commentateur de l'Antiquité tardive (VI^e s. de notre ère), éclaire bien la façon dont on pouvait interpréter les remarques parfois allusives ou brachylogiques du Stagirite. Commentant un célèbre passage du traité de la *Physique* dans lequel Aristote revenait sur la distinction entre mathématique et physique, ou, plutôt — et c'est très

⁴⁵ V. *An. Post.*, I, 7, 75 b 14-17; I, 9, 76 a9-15 + 22-25; I, 13, 78 b32-79 a16 (l'énumération la plus complète).

⁴⁶ On notera au passage que ce sont celles pour lesquelles le péripatéticien Eudème de Rhodes a composé des *Histoires* (arithmétiques, géométriques, astronomiques). Contrairement à ce qu'affirmeront certains auteurs postérieurs, Aristote ne dit jamais que l'astronomie est subordonnée à la géométrie (et à l'arithmétique).

⁴⁷ V. par exemple *Met. M*, 3, 1078 a9-17; *An. Post.*, I, 27, 87 a31-37.

⁴⁸ V. [Philopon / Vitelli, 1887], pp. 218-222. Traduction française dans [Autolykos / Aujac, 1979], pp. 150-156 (*Testimonia*).

significatif — entre le mathématicien et le physicien⁴⁹, Philopon affirme que le Stagirite s'y démarquait de la thèse traditionnelle qui opposait mathématique et physique respectivement comme « science de la forme des choses » et « science de la substance ». Il défend la thèse qu'il s'agit essentiellement d'une distinction de méthode, selon que l'on fait ou non abstraction de la matière.

A titre d'exemple, il explique les différences qui existent entre les traitements d'un même sujet — la forme sphérique du Ciel — proposés par trois auteurs : Théodose, Autolykos et Euclide.

« Ainsi Théodose, dans les *Sphériques*, expose les propriétés de la sphère sans y ajouter aucune considération de matière; il sépare de toute substance la figure sphérique pour examiner ses propriétés montrant que, si une sphère est coupée par un plan, on obtient un cercle, etc.

Autolykos, l'auteur de *La sphère en mouvement*, quand il décrit les propriétés de la sphère en mouvement, est plus particulier que Théodose et se rapproche du physicien (car le mouvement est déjà relativement proche de la substance); même s'il ne considère, dans la sphère en mouvement, aucune substance, il prend du moins un composé de figure et de mouvement, et par là il se rapproche plus ou moins de la substance.

Encore plus particuliers sont *Les Phénomènes* d'Euclide, et, en bref, toute l'astronomie, car la substance elle-même est cette fois prise en considération : c'est le ciel, le soleil, les planètes dont on étudie le mouvement; au lieu de simplement examiner le mouvement de la sphère, on y considère le mouvement de la sphère des fixes, ou celui de la sphère de Saturne, ou celui de n'importe quelle sphère, ainsi que la position relative de ces sphères entre elles.

Il existe donc une mathématique de très haut niveau, facile à discerner et nettement séparée de la physique (par exemple les *Sphériques* de Théodose, les treize livres d'Euclide, les *Arithmétiques* : il n'y est jamais fait mention de la matière), et une mathématique plus terre-à-terre, qui se rapproche plus ou moins de la physique »⁵⁰.

Dans le texte ainsi commenté, Aristote affirmait en effet qu'astronome et physicien étudient le même objet avec des démarches différentes. Plus précisément, il mentionnait que mathématicien et physicien vont l'un et l'autre s'intéresser à la figure des astres, mais que le premier l'étudiera, non pas en tant que limite d'un corps naturel, mais en la "séparant".

Et il précisait :

« elles sont, en effet, séparables du mouvement par la pensée ($\chi\omega\rho\iota\sigma\tau\acute{\alpha}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \tau\eta\ \nu\omicron\iota\eta\sigma\epsilon\iota\ \kappa\iota\nu\eta\sigma\epsilon\omega\varsigma\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$) »⁵¹.

⁴⁹ *Physique*, II, 2, 193 b22—194 a11.

⁵⁰ V. Traduction française G. Aujac, *op. cit.*, pp. 152-153, légèrement modifiée.

⁵¹ *Physique*, II, 2, 193 b34.

18 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

Développant son argument à partir des définitions, il ajoutait :

« D'une part l'impair et le pair, le droit et le courbe, d'autre part, en outre, le nombre, la ligne et la figure existeront sans mouvement, mais non la chair, l'os et l'homme : car ont dit ces choses-là comme on dit un nez "camus", non "courbe" »⁵².

A partir de là, deux interprétations sont assez naturelles. Selon la première, on considère qu'en bonne orthodoxie aristotélicienne ce qui marque la frontière entre d'un côté l'astronomie et la physique et, de l'autre, la géométrie, c'est la prise en compte ou non du mouvement. C'est l'option qu'ont retenue Khayyâm et Tûsî. Mais on peut aussi comprendre que dans le tableau aristotélicien des sciences, il s'agit moins de marquer des oppositions tranchées que de reconnaître des niveaux progressifs d'une "abstraction" continue. En ce sens les disciplines qui traitent des sensibles, la physique, mais aussi l'astronomie et la mécanique, peuvent fournir les points de départ de la géométrie, non pas au sens de principes logiques, mais comme une sorte d'expérience préalable⁵³. Il me semble que c'est la voie que Thâbit et Ibn al-Haytham entendent suivre. Et notre question initiale devient : « peut-on envisager, par abstraction, un mouvement non physique auquel les objets géométriques pourraient prendre part ? ».

5. La conceptualisation des objets géométriques

Dans la seconde moitié du II^e s. de notre ère, Sextus Empiricus, médecin empirique et philosophe sceptique, rédige tout un ouvrage, intitulé *Contre les géomètres*, dont la partie principale (les §§ 19-93) tente précisément de montrer que les objets géométriques fondamentaux — le point, la ligne, la surface et le corps — sont inconcevables. La cible principale de Sextus est d'ailleurs moins la géométrie — si l'on entend par là ce qu'exposent les traités d'Euclide, Archimède, Apollonius, puis de Pappus, Eutocius ... que son utilisation en tant qu'outil de "modélisation" (de certains aspects) du monde physique, rôle qui était le sien depuis fort longtemps en Grèce ancienne. Ceux qui l'admettent — tout particulièrement Aristote — postulent une sorte d'harmonie "préétablie" entre géométrie et physique. Acceptant la vérité des mathématiques, le Stagirite s'était servi de cet "accord" pour réfuter certaines thèses physiques platoniciennes, atomistes, voire zénoniennes.

⁵² *Ibid.*, 194 a3-7.

⁵³ Aristote lui-même souligne le rôle de l'"expérience" (ἐμπειρία) — à ne pas confondre avec l'expérimentation — et de l'induction dans l'acquisition des principes scientifiques. V. en particulier *Anal. Post.*, II, 19.

Sextus se positionne comme une sorte d'anti-Aristote. Il ne remet pas en cause l'hypothétique correspondance entre les deux domaines⁵⁴, mais en privilégiant l'expérience empirique et en posant que nos concepts sont produits à partir des sensations selon certaines règles de dérivation qu'il énumère (§§ 40-42), il prétend montrer le caractère contradictoire des objets fondamentaux de la géométrie, tout particulièrement l'inconcevabilité de la notion de "ligne". D'un point de vue empirique, il paraît en effet assez raisonnable de soutenir que les notions de corps et de surface (en tant que limite visible d'un corps) sont concevables. On peut aussi réduire le point, ainsi que le faisait déjà Platon, à n'être qu'une « fiction géométrique »⁵⁵. La ligne constitue donc la meilleure cible pour une attaque sceptique, d'autant que les Anciens parlent parfois de démonstration "grammique" (= par les lignes) pour signifier « démonstration géométrique »⁵⁶.

Sextus s'en prend à la conception de la ligne en tant que « longueur sans largeur » que l'on trouvait aussi bien chez Aristote⁵⁷ que chez Euclide (Df. I. 2). L'attaque n'est pas nouvelle car l'auteur du *Contre les géomètres* rapporte également une défense qu'aurait présentée Aristote lui-même⁵⁸

⁵⁴ Contrairement à ce que l'on dit parfois, notamment à propos de Démocrite, je ne crois pas que les philosophes anciens aient envisagé de dissocier la structure des mondes physique et géométrique. A partir de Platon, on distinguera bien deux sortes d'êtres, les uns sensibles, les autres "de raison", mais on admettait qu'il y avait homologie structurelle, que l'on adoptât une théorie (platonicienne) du paradigme ou une version "abstractionniste" plus proche d'Aristote. De fait, les Épicuriens, partisans d'un atomisme physique, déniaient à la géométrie sa capacité à modéliser le monde. Sextus en fera ses alliés et reprendra leurs arguments dans les §§ 94-116 de son *Contre les géomètres*. Il semble qu'il faille attendre le Moyen-Âge pour voir un même savant soutenir à la fois une théorie discontinuiste de la matière et accepter la thèse (classique) du continu géométrique. J'ignore ce qu'il en est parmi les philosophes des Pays d'Islam.

⁵⁵ V. Aristote, *Met.*, A, 9, 992 a20.

⁵⁶ V. [Ptolémée, Heiberg, 1898], p. 31, l. 5; [Proclus / Friedlein], p. 188, l. 22. Plutarque (*Vie de Marcellus*, 14.9, 208 e1-4) oppose justement la démonstration « logique et grammique » avec les modèles sensibles et instrumentaux introduits en mécanique par Archytas et Eudoxe. Sextus connaît ce sens de "γραμμικός"; v. *Contre les géomètres*, § 92.

⁵⁷ Aristote cite et critique cette Définition dans les *Topiques*, VI, 6, 143 b11-21.

⁵⁸ L'exemple se retrouve chez deux commentateurs d'Euclide : dans les *Définitions* attribuées à Héron d'Alexandrie [Heron / Heiberg, 1912], p. 16, l. 12-16) et chez [Proclus / Friedlein, 1873], p. 100, l. 5-14 (qui l'attribue toutefois à Apollonius). Il ajoute un autre exemple, plus probant : celui de la limite entre l'ombre et la lumière, lui aussi mentionné par Héron (*Ibid.*, p. 5-7). Si la référence à Apollonius n'est pas le résultat d'une confusion, il est donc avéré que les géomètres ne sont pas restés indifférents aux critiques des philosophes.

20 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

(peut-être en réponse à Protagoras ou à Démocrite). En partant de l'exemple de la longueur d'un mur, Aristote aurait défendu l'idée que la ligne est conçue par privation (§§ 57-58). Notre philosophe sceptique s'efforce de montrer l'insuffisance d'une telle justification. Mais il s'en prend aussi à une autre conception de la ligne (celle précisément que nous avons vu contestée par Khayyâm) : la ligne en tant que « produite par le flux d'un point ». Fait intéressant, il rapporte cette conception de la ligne au géomètre Ératosthène (III^e s. avant notre ère) qui escomptait ainsi échapper à certaines attaques contre la ligne entendue comme composée de ses points :

« Mais Ératosthène, allant au devant de telles attaques, a l'habitude de dire que le point n'occupe aucun lieu ni ne mesure l'intervalle de la ligne, mais qu'il produit la ligne en s'écoulant (ῥυέν δὲ ποιεῖ τὴν γραμμὴν) »⁵⁹.

Que faut-il penser de cette attribution ? Il faut rester prudent car Sextus mentionne, à deux reprises, la génération des objets géométriques par flux (ῥύσις) en corrélation avec les Pythagoriciens⁶⁰. Il s'agit en l'occurrence de présenter différents enseignements de cette école — leur variété est soulignée en *Contre les physiciens*, II, § 262 — au sujet de la génération du cosmos, laquelle procède à partir des nombres, en particulier ceux de la tétractys (1, 2, 3, 4), jusqu'aux éléments du Monde (Feu, Air, ...), en passant par les objets fondamentaux de la géométrie (point, ligne, surface, solide). Il faut donc vraisemblablement distinguer cette utilisation cosmologico-métaphorique de la notion de "flux" de l'usage technique que pouvaient en faire certains géomètres, tel Ératosthène⁶¹.

Rien ne permet d'ailleurs de penser que les Pythagoriciens auxquels se réfère Sextus soient anciens. La doctrine qu'il leur attribue est teintée de platonisme. Il pourrait même s'agir de Néo-pythagoriciens comme Nicomaque. Celui-ci avait composé une *introduction à la géométrie*, perdue, probablement selon la même orientation (pythagorico-platonicienne) que sa célèbre *Introduction arithmétique*. Or cette dernière semble avoir fortement inspiré Sextus quand il traite des nombres.

Deux autres témoins pourraient confirmer une connexion avec Ératosthène : il s'agit des *Definitions* attribuées à Héron et de l'*Expositio* de Théon de Smyrne. Ce dernier rapporte les Définitions de la ligne, de la surface et du corps par flux dans un paragraphe explicitement inspiré par le

⁵⁹ V. Sextus Empiricus, *Contre les géomètres*, § 28.

⁶⁰ Cf. *Contre les logiciens*, I, § 99-100; *Contre les physiciens*, II, §§ 281-282.

⁶¹ Usage auquel il est également fait allusion en *Contre les physiciens*, I, § 376, § 380, § 430 et dans *Contre les géomètres*, §19 et § 77. Il s'agit en fait de deux versions de la même réfutation.

célèbre Bibliothécaire d'Alexandrie⁶². On sait que celui-ci fait également partie des sources des *Definitiones*. Ce texte fournit aussi une intéressante indication supplémentaire : le flux du point est produit « par la pensée » (τῆ ἐννοίᾳ)⁶³. Comme chez Théon, il est précisé qu'il est continu (κατὰ τὴν συνέχειαν).

En admettant la continuité du mouvement et de l'écoulement (ῥύσις) du temps, on justifie ainsi la continuité de la grandeur géométrique. L'intérêt de la démarche est multiple :

- on souligne l'homologie structurelle mise en évidence par Aristote dans le Livre VI de sa *Physique* (Ch. 2) entre la grandeur, le mouvement et le temps.
- Et donc on adresse une objection aux théories atomistes.
- On échappe aux apories forgées à partir de l'hypothèse que le point est une partie de la droite ou que la droite est composée de ses points (avantage que souligne Sextus).
- En ajoutant que ce flux est noétique, on ne s'expose pas à la critique aristotélicienne selon laquelle on ne doit pas définir ce qui est immobile à l'aide du mouvement car celui-ci n'est plus conçu comme "réel" (c'est-à-dire physique).

Si cette précision supplémentaire est bien à rapporter à Ératosthène, une étape de plus a été franchie dans le processus qui assimile la génération des objets géométriques fondamentaux (par flux) à une *expérience mentale*. L'expression "τῆ ἐννοίᾳ" était précisément celle qu'utilisait le Stagirite pour séparer les objets géométriques du mouvement physique⁶⁴. Désormais l'"abstraction" s'applique au mouvement lui-même.

Les différentes variantes de l'« abstractionnisme » ne sont cependant pas à l'abri d'objections fortes. Si le fondement des mathématiques réside dans notre activité mentale, s'il n'y a ni limites, ni règles imposées au processus d'abstraction, comment peut-on être sûr que les notions ainsi construites ne sont pas de pures fictions⁶⁵ ? Ne peut-on pas penser le décaèdre, solide régulier possédant 10 faces ? Mais le scholie final inséré à la fin du Livre XIII des *Éléments* montre que l'existence d'un tel polyèdre contredirait la géométrie d'Euclide⁶⁶. Comment justifier l'irréfutabilité des raisonnements mathématiques ? Plus fâcheux encore, comment pourra-t-on garantir que cette discipline puisse expliquer le monde physique si sa construction est arbitraire. Pour des raisons de ce genre, les philosophes néo-platoniciens,

⁶² V. [Théon S. / Hiller, 1878], § 31, p. 83, l. 21-24.

⁶³ *Ibid.*, Df. N°1, p. 14, l. 21-24 (νοεῖσθαι) et N°2, p. 16, l. 2-3 (τῆ ἐννοίᾳ).

⁶⁴ V. *supra*, la citation donnée avec la n. 51.

⁶⁵ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 13, l. 13-21.

⁶⁶ V. [Euclide / Vitrac, 2001], pp. 468-469 et 470-473.

22 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

en particulier Proclus, vont rejeter cette manière de concevoir les mathématiques.

Dans le second prologue qui introduit son *Commentaire sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, le Diadoque développe une épistémologie originale de la géométrie⁶⁷. Il n'est pas possible de lui rendre justice ici car cela réclamerait un exposé en soi⁶⁸. Pour en donner une idée très sommaire, disons que Proclus développe l'idée néoplatonicienne selon laquelle il existe une essence mathématique intermédiaire entre sensibles et intelligibles — l'idée remontait peut-être à Platon —, essence qu'il associe à une "faculté" intermédiaire introduite par Aristote dans un autre contexte : l'imagination (*φαντασία*). Celle-ci, selon Proclus, fonctionne comme une sorte d'écran sur lequel la connaissance discursive (*διάνοια*), à l'œuvre en mathématique, projette et déploie les objets géométriques en extension et en multiplicité. Ian Mueller a appelé cette épistémologie le "projectionnisme"⁶⁹. Elle permet de réfuter les théories "abstractionnistes" (dont celle d'Aristote) puisque l'origine des objets mathématiques est alors l'intellect et non plus les sensibles. Proclus n'en est peut-être pas l'inventeur. Jamblique et son maître Syrianus l'ont semble-t-il précédé dans cette voie. Mais l'originalité du Diadoque est de l'avoir appliquée à la géométrie euclidienne et de l'avoir utilisée pour résoudre quelques-unes des difficultés que l'exégèse antique des *Éléments* avait soulevées. Comme le Diadoque le souligne à plusieurs reprises, il considère qu'il met ainsi en accord ce qu'il appelle les "faits" (*τὰ πράγματα*), c'est-à-dire la pratique des géomètres, avec l'enseignement de Platon⁷⁰. Cette épistémologie attribue un rôle éminent au mouvement dans l'imagination et justifie la définition de la géométrie placée en exergue.

Dans l'état actuel de nos connaissances, il ne semble pas que le *Commentaire* de Proclus ait été traduit en arabe. Mais les savants des pays d'Islam ont pu prendre connaissance de la théorie proclinienne de l'imagination par d'autres canaux. On en trouve des échos dans quelques scholies portées en marge de plusieurs manuscrits des *Éléments* d'Euclide, dans les citations, par an-Nayrîzî, de l'*Introduction à la géométrie* due à Simplicius ou dans certains commentaires au *de Anima* d'Aristote⁷¹ comme celui de Jean Philopon. Que ce soit parce qu'ils ont eu connaissance du

⁶⁷ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 50, l. 16—p. 57, l. 8.

⁶⁸ V. [Mueller, 1987], [O'Meara, 1989], Ch. 8; [Cleary, 2000].

⁶⁹ V. [Mueller, 1987], p. 317.

⁷⁰ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 50, l. 16-18; p. 57, l. 1-4.

⁷¹ Dans son grand traité de "psychologie", le Stagirite fait quelques remarques rhapsodiques sur la manière dont l'intellect conçoit les êtres mathématiques et sur le rôle des représentations de la *φαντασία*.

"projectionnisme" néo-platonicien ou pour se défendre contre des arguments de type sceptique sur l'inconcevabilité des objets mathématiques, certains des géomètres de la tradition euclidienne multiplieront les références à l'imagination et aux mouvements imaginaires. C'est tout particulièrement le cas de Thâbit et Ibn al-Haytham. Nous verrons quelques exemples, tant chez Proclus que chez les savants d'expression arabe, lorsque nous discuterons les *Éléments*⁷². L'exégèse de ce traité constitue en effet un point de contact entre classifications et prescriptions philosophiques d'un côté, et pratiques géométriques de l'autre. Outre sa fortune historique, notamment dans les Pays d'Islam, le cas d'Euclide est d'autant plus important qu'il est souvent présenté — depuis l'Antiquité — comme un platonicien.

III. Le pragmatisme des mathématiciens

Pour justifier l'infléchissement que Proclus a cru devoir apporter à l'épistémologie platonicienne et tenir compte des "faits", il faut certainement prendre en considération, entre autres choses, le développement que les mathématiques grecques avaient connu depuis l'époque de Platon et d'Aristote. Cela valait en particulier pour ce que l'on peut appeler la géométrie "supérieure" dans laquelle les notions de "lieu" et de "courbe" jouaient un rôle très important. Et donc, pour évaluer l'attitude des géomètres anciens vis-à-vis du mouvement géométrique, il faut introduire une distinction entre d'une part la géométrie élémentaire et ses principes — pour nous il s'agit essentiellement de l'exégèse des *Éléments* — et, d'autre part, cette géométrie supérieure. Cette distinction n'est pas mon invention. Elle existe chez les Anciens. Elle a sans doute été renforcée par l'autorité croissante des *Éléments* d'Euclide et un certain nombre de questions sont présentées comme réservées à ceux qui en ont acquis la maîtrise préalable, par exemple le champ de l'analyse tel qu'il est décrit par Pappus dans le Livre VII de sa *Collection*.

1. Classifications mathématiques (lignes, lieux, problèmes)

Au-delà de l'aspect didactique, il ne manque pas de considérations classificatoires mathématiques — qu'il s'agisse de problèmes, de lieux ou de lignes⁷³ — chez des auteurs tardifs comme Pappus, Proclus, Eutocius, qui

⁷² *Infra*, Partie III, 3.

⁷³ Classification de problèmes dans [Pappus / Hultsch, 1876], L. III, § VII, p. 54, l. 7-22; *Ibid.*, L. IV, § XXXVI, p. 270, l. 1-28. Classification des lieux : *Ibid.*, L. VII,

24 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

admettent tous cette dualité de niveau. Leurs descriptions ne s'accordent pas vraiment : Pappus — c'est le point de vue le plus connu — distingue trois catégories de problèmes qu'il qualifie de : "plans", "solides", "grammiques", tandis qu'Eutocius et Proclus mettent l'accent sur l'opposition polaire « plan *versus* solide ».

Pour le Commentateur d'Apollonius, cette limitation peut s'expliquer par le contexte (les *Coniques*), d'autant qu'Eutocius reconnaît qu'il y a encore d'autres lieux comme les « lieux relatifs à la surface » (τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν). Mais nous ne savons pas s'il s'agissait d'un troisième niveau de classification, ou simplement d'un type de lieux décrits par la manière de les produire, voire une allusion à l'ouvrage d'Euclide qui portait ce titre et qui envisageait peut-être des lieux appartenant à différentes classes. Dans le même ordre d'idées, Pappus fait allusion aux *Lieux relatifs aux médiétés* (τόποι πρὸς μεσότητας) d'Ératosthène, lesquels, eux aussi, appartenaient à plusieurs — au moins à deux — des catégories qu'il avait proposées⁷⁴. Proclus se distingue en ce qu'il appelle « lignes solides » aussi bien les spirales que les coniques, ce qui n'est pas en accord avec la classification de Pappus. Mais deux choses semblent cependant acquises : tous reconnaissent une opposition « plan *versus* solide », même si son contenu varie selon les auteurs, et cette distinction est assez ancienne.

Le célèbre corpus dit « du lieu analysé », présenté par Pappus dans sa préface au Livre VII, est en effet ordonné en fonction de cette distinction : d'abord les ouvrages concernant les lieux plans, puis ceux qui portent sur les lieux solides. Certes, la mise en ordre du corpus a été postérieure à la rédaction des ouvrages qui le composent, mais, d'une part ceux-ci sont dus à quatre auteurs assez proches dans le temps : Euclide, Aristée, Ératosthène et Apollonius et d'autre part, dans cette collection, figurent : les *Lieux plans* d'Apollonius (en deux Livres) et les *Lieux solides* d'Aristée en cinq livres qui traitaient des coniques. L'opposition « plan *versus* solide » remonte donc au moins à la fin du III^e s. avant notre ère, après que la théorie des coniques ait connu un fort degré de développement, et elle concernait principalement les questions de lieux.

La connexion était peut-être faite avec la théorie des médiétés et la terminologie « plan *versus* solide » a pu être inspirée par le paradigme « duplication du carré » / « duplication du cube », puisqu'il faut et il suffit d'une médiété dans un cas, de deux dans l'autre, pour résoudre ces

introduction (notice sur *les lieux plans* d'Apollonius), p. 662, l. 10-15; [Eutocius / Heiberg, 1893], p. 184, l. 21-28. Classification des théorèmes de lieux : [Proclus / Friedlein, 1873], p. 394, l. 19—p. 395, l. 2. Classification des lignes : *Ibid.*, p. 394, l. 21-25; cf. aussi *Ibid.*, p. 111, l. 1—113, l. 6 (Géminus).

⁷⁴ [Pappus / Hultsch, 1876], L. VII, p. 662, l. 16-18.

problèmes. Le lien avec l'exégèse platonicienne, ainsi qu'avec la distinction « géométrie plane *versus* stéréométrie » introduite dans le programme de la *République*, est alors très clair. Le responsable pourrait, là aussi, être Ératosthène puisqu'on sait qu'il s'est intéressé aux médiétés, à l'utilisation qu'en a fait Platon en liaison avec l'opposition « plan *versus* solide » dans le *Timée*, aux lieux qu'on pouvait ainsi définir lesquels, comme nous l'avons dit, englobaient probablement au moins deux des catégories de Pappus, sans doute des lieux plans et solides.

Allons un peu plus loin. Nous savons que le mésolabe d'Ératosthène permettait de généraliser la solution au problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données pour un nombre "quelconque" de moyennes, et ce de façon instrumentale⁷⁵. S'il a entrepris l'analyse géométrique de cette généralisation, Ératosthène pourrait avoir fait le premier pas sur le chemin que suivra Descartes, utilisant les médiétés pour produire et distinguer des lieux⁷⁶, alors que le géomètre français utilisera les degrés d'équations pour classer certaines courbes⁷⁷.

⁷⁵ V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. III, § VII, p. 56, l. 17—p. 58, l. 22; [Eutocius / Mugler, 1972], p. 64, l. 5—p. 69, 11.

⁷⁶ Si je comprends bien, Khayyâm, dans son *Algèbre*, attribue précisément une telle contribution à Ibn al-Haytham, pour l'insertion de quatre médiétés ! V. [Khayyâm / Rashed & Djebbar, 1981], p. 66 ou [Khayyâm / Rashed, 1999], p. 222. Plus impressionnant encore est l'exemple du géomètre Ibn Sayyid, à peu près contemporain de Khayyâm. Selon son disciple Ibn Bâjja, à partir de deux coniques coplanaires, il considérait successivement : deux cônes (obliques) dont ces coniques étaient l'intersection avec leur plan; la courbe gauche produite en tant qu'intersection de ces deux cônes, puis la projection, dans une direction déterminée, de ladite courbe gauche, sur un plan perpendiculaire au premier, engendrant ainsi une nouvelle courbe plane. Le procédé était itéré, engendrant une série de courbes de "complexité" croissante, mais ordonnées (la comparaison était faite avec les irrationnelles euclidiennes du Livre X). Selon Ibn Bâjja, cette méthode permettait à Ibn Sayyid de trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra entre deux droites données. V. [Djebbar, 1993], pp. 88-89. Il serait intéressant de savoir s'il y avait un lien, généalogique ou chronologique, entre ces contributions d'Ibn al-Haytham et Ibn Sayyid. Ibn Bâjja souligne l'originalité de son maître; mais sans contester sa bonne foi, il est trop clair que son jugement dépend de sa connaissance de la tradition antérieure, grecque et arabe.

⁷⁷ Une autre possibilité était offerte à Ératosthène par la généralisation du problème du lieu à trois et quatre droites, problème qu'avant lui, Euclide avait essayé de résoudre. Nos informations concernant l'étude de ce lieu dans l'Antiquité proviennent d'Apollonius ([Apollonius / Heiberg, 1891], p. 4, l. 10-17), et de Pappus (*Ibid.*, L. VII, p. 678, l. 12—p. 680, l. 2). Le premier critique Euclide pour sa résolution partielle; le second fait remarquer qu'avec deux droites le lieu est plan et il mentionne les généralisations à plus de quatre droites dont les solutions sont, dit-il, des lignes dont

26 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

Pappus classifie non seulement des lieux, mais aussi des problèmes. Comme il le reconnaît lui-même⁷⁸, il avait été précédé dans cette voie par Héron qui qualifiait de "solide" le *problème* des deux moyennes. Même si la classification des problèmes par Pappus⁷⁹ est très célèbre, quelques détails ont un intérêt pour notre étude du mouvement en géométrie :

« Nous avons dit qu'il y a trois genres de problèmes en géométrie, et que nous les appelons plans, solides et grammiques.

C'est donc à juste titre que ceux qui peuvent être résolus au moyen de droites et de la circonférence de cercle sont dits plans, parce que les lignes au moyen desquelles on résout ces problèmes ont leur génération dans le plan, et que les problèmes qu'on résout en assumant, pour leur solution, une ou plusieurs des sections du cône sont appelés solides, parce qu'il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste enfin le troisième genre de problèmes qu'on appelle grammiques, parce qu'on emploie pour leur construction d'autres lignes que celles dont nous venons de parler, lesquelles ont une génération plus variée et plus forcée, dérivant de surfaces non ordonnées et de mouvements plus compliqués.

Telles sont les lignes que l'on rencontre dans ce qu'on appelle *les Lieux relatifs aux surfaces*, et d'autres encore plus diversifiées trouvées en grand nombre par Démétrios d'Alexandrie dans ses *Lieux grammiques*, et par Philon de Tyane au moyen de l'entrelacement de surfaces plectoïdes et autres, de toute sorte; lignes qui présentent nombre de propriétés admirables.

Quelques-unes de ces lignes ont été trouvées dignes d'une étude plus développée, et l'une d'entre elles a même été dénommée "ligne paradoxale" par Ménélaos. D'autres lignes, telles que les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes sont toutefois de la même famille ».

La classification des problèmes se fait donc en fonction des *lignes* grâce auxquelles ils peuvent être résolus, le critère étant la façon dont ces lignes elles-mêmes sont "engendrées" ou "construites". Ainsi les problèmes plans sont dits tels parce que la génération des droites et des circonférences de cercle se fait dans le plan. Knorr critique cette justification. Il la trouve même incohérente car, dit-il, la même chose vaut pour les coniques, la spirale plane, la quadratrice, la conchoïde⁸⁰ ... Je crois que l'appréciation n'est pas

on n'a pas encore réussi à faire la construction. Remarquons toutefois que Pappus ne mentionne pas Ératosthène dans ce contexte.

⁷⁸ *Ibid.*, L. III, § IX, p. 62, l. 16-17.

⁷⁹ *Ibid.*, L. IV, § XXXVI, p. 270, l. 3-28. Trad. franç. [Ver Eecke, 1982], pp. 206-208, légèrement modifiée.

⁸⁰ V. [Knorr, 1986], p. 344. Son analyse de la classification (*Ibid.*, pp. 341-348) m'a été utile, même si je n'en partage pas toutes les conclusions, notamment l'idée que l'opposition « plan / solide » remonterait à Apollonius, lequel possédait une sorte

tout à fait juste, en particulier en ce qui concerne les coniques. Certes, il s'agit de courbes planes, mais leurs générations étaient toujours envisagées comme sections d'un cône (Aristée) ou d'une surface conique (Apollonius) même si, bien entendu, les Anciens savaient en donner des caractérisations en tant que lieux situés dans un plan, soit à l'aide de ce qu'on appelle les *symptomata*⁸¹, soit en termes de foyer et de directrice⁸².

Certains considèrent qu'Apollonius définit les paraboles, hyperboles et ellipses par leurs *symptomata* dans ses Propositions I. 11-13, donc comme lieux de points d'un plan satisfaisant une certaine relation exprimée dans la terminologie de l'application des aires. En fait c'est seulement l'ambition d'être très général — notamment en produisant ces trois espèces à partir des sections d'un même cône, droit ou oblique, en contraste avec les définitions proposées par Aristée — qui oblige Apollonius à procéder de cette manière. Et lorsqu'il est demandé de construire une conique satisfaisant certaines conditions, il le fait d'abord en exhibant un cône dont elle sera une section dans les Propositions I. 52 (parabole), I. 54 (hyperbole) et I. 56 (ellipse)⁸³. Que les *symptomata* constituent des caractérisations opératoires est indéniable, mais la génération des coniques reste la section d'un cône. Pappus souligne que le problème de l'insertion des deux moyennes est solide par nature parce qu'il n'est pas facile de tracer des

d'intuition du fait qu'il y avait une différence de nature algébrique (degré 2 / degré 3) entre ces deux catégories de lieux. J'ai suggéré que c'est plutôt en termes de médiétés qu'il faut expliquer l'origine de cette distinction dont je ferai volontiers crédit à Ératosthène, antérieur à l'Auteur des *Coniques* d'une génération ou deux.

⁸¹ Relations caractéristiques entre certaines droites associées aux coniques que les Modernes rapprochent parfois indûment des équations par rapport à un repère cartésien. Ce genre de caractérisation apparaît dès la solution par Ménéchme du problème des deux moyennes, ramené à la détermination de l'intersection de deux coniques. V. [Eutocius / Mugler, 1972], p. 58, l. 17—p. 60, l. 11.

⁸² V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. VII, Prop. 236-237, p. 1006, l. 4—p. 1010, l. 15. Comme il s'agit d'un lemme pour le traité des *Lieux relatifs à la surface* d'Euclide, on en a déduit que la propriété était déjà connue de l'auteur des *Éléments*, utilisée par lui sans démonstration, et donc qu'elle figurait dans un traité antérieur, soit l'hypothétique traité des *Coniques* d'Euclide, soit les *Lieux solides* d'Aristée, bien qu'elle ne figure pas dans les *Coniques* d'Apollonius. V. par exemple [Heath, 1921], vol. I, p. 244. Assez gratuitement, Toomer a proposé d'attribuer la découverte de la propriété foyer-directrice pour la parabole à Dioclès, sous prétexte que celui-ci la (re)démontre (v. [Dioclès / Toomer, 1976], p. 17). Il se peut bien que Dioclès ignorait le traité d'Euclide ou d'Aristée dans lequel elle était établie; ou qu'il les jugeait supplantés par les *Coniques* d'Apollonius; ou qu'il en avait trouvé une preuve différente ...

⁸³ Sur cette distinction entre génération et *symptoma* pour les coniques, v. [Fried & Unguru, 2001], pp. 74-90.

28 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

coniques dans le plan et cela justifie, selon lui, le recours à des solutions instrumentales⁸⁴.

Pour donner un autre exemple, dans la classification des lignes de Géminus, rapportée par Proclus, après deux distinctions préalables entre lignes « composées *versus* non composées », puis « simples *versus* mixtes », on introduisait, pour la catégorie des lignes mixtes, l'opposition : « dans un plan *versus* dans un solide ». Géminus-Proclus donne la cissoïde comme exemple de la première classe, les coniques, les spiriques et les hélices dans la seconde⁸⁵. Le regroupement n'est certes pas celui qu'attendrait un Moderne⁸⁶, mais clairement l'opposition « plan *versus* solide » ne correspond pas à la distinction « courbes planes *versus* courbes gauches » comme Knorr semble (fait semblant de ?) le croire.

Il faut aussi relever le fait que la classe des problèmes grammiques n'est mentionnée ni par Proclus, ni par Eutocius. Son introduction est sans doute plus récente que l'opposition « plan *versus* solide » et, compte tenu du titre de l'ouvrage que Pappus lui attribue, elle pourrait être due à Démétrios d'Alexandrie, géomètre inconnu par ailleurs, mais que notre texte incite à placer avant Ménélaos (I^{er} s. de notre ère).

Le paradigme du problème grammique est évidemment celui de la quadrature du cercle ou celui, équivalent, de la rectification de la circonférence. Aristote y avait fait allusion et il mentionnait des tentatives (inabouties) d'Hippocrate de Chio, d'Antiphon et de Bryson. La connexion avec la théorie des courbes s'est faite avec l'utilisation de la quadratrice par Dinostrate et de la spirale par Archimède. Cela dit, il est peu probable qu'on ait envisagé de distinguer la classe des problèmes grammiques avant l'exploration d'autres questions de ce genre.

Pappus lui-même souligne la différence qu'il y a entre la trisection d'un angle ou d'un arc de cercle (problème solide) et leurs sections dans un rapport quelconque donné qui est un problème grammique dont il donne deux solutions, l'une avec la quadratrice, l'autre avec la spirale⁸⁷. D'où il déduit quelques formulations d'autres problèmes grammiques : « retrancher des arcs égaux de deux cercles inégaux »; « construire un triangle isocèle dont chacun des angles à la base ait un rapport donné avec l'angle restant »; « inscrire un polygone régulier dans un cercle avec autant de côtés que l'on veut »; « sur une droite donnée, construire un segment dont l'arc a un rapport donné avec la base ».

⁸⁴ V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. III, § VII, p. 54, l. 23-30; *Ibid.*, L. VIII, Prop. 11, p. 1070, l. 5-14.

⁸⁵ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 111, l. 12-20.

⁸⁶ V. [Euclide / Vitrac, 1990], pp. 185-187.

⁸⁷ V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. IV, Prop. 35, p. 284, l. 21 — p. 288, l. 3).

Pour résumer, la classification telle qu'elle est présentée dans la *Collection*, même si les distinctions en sont toujours rapportées aux "Anciens", marque certainement l'aboutissement d'une tradition plutôt qu'un *topos* classique. Sa formulation dépend probablement des intérêts de Pappus : c'est en guise de préambule à ses exposés concernant successivement l'insertion des deux moyennes (L. III) et la trisection de l'angle (L. IV) qu'il développe en termes de problèmes ce que d'autres énoncent en termes de lieux.

2. Le mouvement dans la géométrie supérieure

On dit parfois que les formulations en termes de lieux sont destinées à évacuer le mouvement⁸⁸ et aussi que les Anciens utilisaient deux sortes de définitions pour les courbes : par génération ou par propriété, avec l'idée que ces dernières peuvent également servir à éliminer le mouvement⁸⁹. Comme exemple de Définition par propriété, on cite souvent celle qu'Euclide a donnée pour le cercle (Df. I. 15) :

« Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont, {jusqu'à la circonférence du cercle,} égales entre elles ».

En réalité cet énoncé définit une *figure plane* et non pas une courbe, mais il est vrai qu'il caractérise une ligne — la circonférence — par une propriété d'équidistance et non pas par la rotation d'un segment à partir d'une extrémité fixe. De fait une précaution s'impose : là où les Modernes voient deux manières de *définir* les courbes, les commentateurs anciens s'expriment comme si "génération" (*γένεσις*) et "propriété caractéristique" (*σύμπτωμα, ἀρχικὸν σύμπτωμα*) — susceptible aux yeux d'un Moderne de fournir une définition — relevaient de deux registres différents. Ainsi Proclus, à propos des conchoïdes, affirme :

« En effet Nicomède a coupé tout angle rectiligne en trois parties égales au moyen des lignes conchoïdes dont il nous a transmis la génération, l'ordre et les propriétés en ayant été lui-même l'inventeur de leur caractère propre ... »⁹⁰.

Ultérieurement, il ajoute :

⁸⁸ Selon [Jaouiche, 1986], p. 69, telle était l'opinion de Khayyâm et at-Tûsî.

⁸⁹ V. [Fauvel, 1987], p. 3.

⁹⁰ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 272, l. 3-6. Trad. française [Proclus / Ver Eecke, 1948], pp. 233-234.

30 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

« Au reste, d'autres mathématiciens encore ont eu l'habitude de disserter de cette manière sur les lignes en nous transmettant la propriété (σύμπτωμα) de chacune de leurs espèces; car Apollonius a montré en quoi consiste la propriété de chacune des lignes coniques, Nicomède l'a montré dans les conchoïdes, Hippias dans les quadratrices et Persée dans les spiriques. En effet après la génération, la compréhension de ce qui lui appartient en propre et par soi distingue l'espèce construite de toutes les autres »⁹¹.

Ajoutons que pour les trois courbes (spirale, conchoïde, quadratrice) présentées par Pappus dans son Livre IV, la progression est toujours la même : génération; symptoma; utilisation pour résoudre un grand problème. Il y a là une sorte de plan-type; mais il n'y est jamais question de *définir* ces courbes.

Les choses étaient peut-être perçues différemment à l'époque hellénistique. Ainsi Archimède introduit la spirale qui porte désormais son nom dans une *définition* (ὄρος), intercalée entre les Propositions 11 et 12 de son traité, dont le contenu n'est rien d'autre que la description de sa *génération* :

« Si une ligne droite menée dans un plan, l'une de ses extrémités étant maintenue fixe, a été portée circulairement un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'elle soit revenue à nouveau à la position d'où elle avait été mise en mouvement, et, qu'en même temps que la révolution de la droite, un certain point est mû, avec une vitesse constamment égale, selon cette droite, en partant de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan ».

Apollonius procède de même pour définir la surface conique (*Coniques*, Df. 1)⁹². Pour les trois espèces fondamentales de coniques son attitude est plus ambiguë puisqu'il combine, pour chacune d'elles, génération, démonstration du symptoma et baptême dans une même Proposition (I. 11-13), tout en distinguant clairement, en particulier dans sa préface au premier Livre⁹³, la génération et la démonstration du symptoma :

« Le premier livre concerne la génération des trois sections et des sections opposées, ainsi que les principales propriétés, exposées d'une manière plus développée et plus générale que chez d'autres qui ont écrit sur la matière ... ».

⁹¹ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 356, l. 6-14. Trad. française [Proclus / Ver Eecke, 1948], p. 304.

⁹² Les terminologies utilisées par Archimède et Apollonius possèdent plusieurs points communs avec celle utilisée par Euclide pour *définir* les solides de révolution, là aussi en décrivant leurs *générations*. V. [Euclide / Vitrac, 2001], pp. 87-88.

⁹³ V. [Apollonius / Heiberg, 1891], p. 4, l. 1-5. Trad. française [Apollonius / Ver Eecke, 1963], p. 2. V. aussi *supra*, n. 83.

Mais la nécessité de ne pas confondre génération et définition — que nous avons cru percevoir chez les commentateurs tardifs — ne paraît pas essentielle pour ces auteurs hellénistiques. Elle a pu émerger de l'influence grandissante de l'exégèse philosophique, soucieuse de marquer une différence entre des définitions par genre et espèce et des descriptions génétiques. Celles-ci sont d'ailleurs variées.

En nous inspirant du texte du Livre IV de la *Collection* de Pappus que nous avons cité un peu plus haut, nous pouvons distinguer :

- des générations par section de la surface de certains solides, par exemple pour les coniques ou les spiriques (sections du tore);
- celles qui requièrent la composition de deux mouvements simples comme dans le cas des différentes spirales et de l'hélice cylindrique;
- celle de la quadratrice, un peu plus complexe, qui combine mouvements et intersection des éléments mis en mouvement;
- enfin des générations qui supposent l'usage d'*instruments* nouveaux comme celui que préconise Nicomède pour tracer les conchoïdes. Cela revient à adjoindre un nouvel instrument à la panoplie du géomètre et, du même coup, à considérer les espèces d'inclinaisons ou *neuseis* les plus simples comme des constructions légitimes, au même titre que celles « à la règle et au compas ».

Dans cet ordre d'idées, on pourrait peut-être leur adjoindre la courbe de Dioclès appelée, à tort semble-t-il⁹⁴, "cissoïde", pour laquelle nous avons deux exposés, celui de Dioclès lui-même dans la Proposition 12 de ses *Miroirs ardents* conservés dans une traduction arabe⁹⁵, et celui d'Eutocius, dans son anthologie de solutions au problème des deux moyennes⁹⁶. L'un et l'autre correspondent à ce que l'on peut appeler une construction « point par point ». Dioclès propose en effet de construire un nombre arbitraire (mais nécessairement fini) de points par des méthodes planes. Il y a de petites divergences entre la version d'Eutocius et celle de la traduction arabe, mais, dans les deux textes, l'idée est ensuite d'utiliser une règle (κάνων) pour tracer une ligne qui les joint. Le texte grec suggère une ligne constituée de segments de droite infiniment petits puisque les points sont dits en "continuité" (διὰ τῶν συνεχῶν σημείων), tandis que la version arabe précise que la règle sera flexible⁹⁷.

Ni l'un ni l'autre ne font allusion au moindre mouvement, mais on voit qu'il est remplacé par un présupposé de continuité. C'est sans doute pour y suppléer que Pappus a proposé sa solution, dont la substance

⁹⁴ V. [Dioclès / Toomer, 1976], pp. 23-25 et [Knorr, 1986], pp. 246-247.

⁹⁵ V. [Dioclès / Toomer, 1976], pp. 98-101.

⁹⁶ V. [Eutocius / Mugler, 1972], p. 51, l. 10 — p. 53, l. 20.

⁹⁷ V. [Dioclès / Toomer, 1976], p. 100, l. 219 et notes pp. 159-160 et p. 172.

32 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

mathématique — comme le remarque et le démontre Eutocius — est identique à celle de Dioclès⁹⁸, mais qui assure ladite continuité en introduisant justement ... le mouvement d'une règle⁹⁹ !

Ces distinctions entre différents types de génération des courbes ne doivent au demeurant pas faire illusion. Le mouvement est bel et bien présent, au moins dans les deux catégories de problèmes dits solides et grammiques, autrement dit dans ce que j'ai appelé la géométrie supérieure. Car il intervient préalablement dans la génération du cône, de la surface conique ou du tore. Ce que Pappus sous-entend, quand il affirme que certains des problèmes grammiques font appel à « des mouvements plus compliqués ». C'est donc qu'il faut aussi recourir à des mouvements (plus simples) pour d'autres catégories.

Quand bien même elles s'accordent mal avec les prescriptions épistémologiques de Platon et d'Aristote, les considérations cinématiques sont inévitables dans la géométrie des courbes. Et nous ne voyons pas de réticence à en faire usage de la part des mathématiciens grecs. L'exemple de Pappus retravaillant la solution de Dioclès en est un bon exemple. On invoque souvent *a contrario* le cas de la quadratrice de Dinostrate, critiquée par Sporus de Nicée¹⁰⁰. Mais sur quoi porte la critique ? Non pas sur ce qu'elle est engendrée par la combinaison de deux mouvements, mais sur le fait que cette génération n'est pas effective — Pappus dit qu'elle est trop mécanique (μηχανικώτερα). Et ce, explique Sporus, pour deux raisons :

(i) d'abord pour construire la courbe — pour synchroniser les deux mouvements générateurs — il faut préalablement connaître le rapport entre le quart de la circonférence et le rayon du cercle.

(ii) Ensuite, les points de la courbe étant construits par intersection de deux segments de droite en mouvement, l'un de rotation, l'autre de translation, l'extrémité de la quadratrice ne sera pas constructible puisque lesdits segments finissent par coïncider au moment où ils devraient aboutir à cette extrémité.

Cependant Pappus, dans la suite de son exposé, tente de "sauver" la quadratrice en la ramenant à la projection, sur un plan, d'une hélice cylindrique ou à l'aide de la spirale¹⁰¹. Or l'hélice, par exemple, est définie comme combinaison de deux mouvements simples, l'un rectiligne et uniforme, l'autre circulaire. Et s'y ajoute l'idée de projection d'une courbe gauche sur un plan !

⁹⁸ V. Eutocius / Mugler, 1972], p. 56, l. 6-12.

⁹⁹ V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. III, , § X et L. VIII, § XII, Prop. 11.

¹⁰⁰ V. *Ibid.*, L. IV, §§ XXX-XXXII, p. 250, l. 33—p. 258, l. 19.

¹⁰¹ V. *Ibid.*, L. IV, resp. Prop. 28 -29, p. 258, l. 20—p. 264, l. 2.

Aucun texte comportant une étude détaillée des hélices ne nous est parvenu¹⁰², mais nous avons la chance de disposer du traité des *Spirales* d'Archimède qui mérite un bref examen. Car la monographie du Syracusain met en évidence quelques traits essentiels à l'œuvre dans la géométrie supérieure des courbes :

- Archimède introduit le temps ($\delta\ \chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$), ce qui, pour un "puriste", renvoyait sans doute à la physique.
- Ce temps, ou plutôt, ces durées, sont traitées à peu près comme des grandeurs mathématiques, au sens où elles entrent dans des rapports et des proportions.

Dans la première Proposition de son traité, Archimède utilise une technique très proche de celle des équimultiples mise en œuvre par Euclide dans sa célèbre théorie du Livre V¹⁰³ pour établir que si un point se déplace sur une ligne avec une vitesse uniforme, le rapport entre deux segments parcourus par le point sur cette ligne — un rapport entre grandeurs géométriques — sera le même que celui des temps de parcours.

- Il en déduit (Prop. 2) à quelles conditions il y aura proportion entre des segments successivement décrits sur deux lignes dont les espèces ne sont pas spécifiées.
- Ceci lui permet d'établir, dans les Propositions 14-15 (après l'introduction de la spirale), l'identité de deux rapports, l'un entre des segments de droite, l'autre entre des arcs de cercle, en "éliminant" les temps.
- De cette manière, Archimède contredit l'opinion émise par Aristote selon laquelle les mouvements rectiligne et circulaire sont incomparables parce que la droite et la circonférence du cercle le sont également¹⁰⁴. Dans sa Proposition 18, il montrera comment la sous-tangente à la spirale permet de rectifier le cercle.

Le pragmatisme du géomètre de Syracuse est assez évident. Certes, on retrouve le contenu mathématique de la première Proposition des *Spirales*, avec une formulation légèrement différente, dans le préambule (considéré comme inauthentique) de *La sphère en mouvement* d'Autolykos

¹⁰² Sa génération est décrite par Proclus dans sa discussion des lignes homéomères. V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 105, l. 1-4. Il précise qu'Apollonius avait consacré un écrit à cette courbe. La question des lignes homéomères avait été reprise par Géminus qui semble être la source de Proclus dans tout ce passage.

¹⁰³ Notons cependant que le Livre V n'est pas explicitement cité par le Syracusain qui n'utilise ni le terme "grandeur" ($\mu\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\theta\omicron\varsigma$), ni celui d'"équimultiples" ($\acute{\iota}\sigma\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma$ $\pi\omicron\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\alpha$), caractéristiques de l'exposé euclidien.

¹⁰⁴ V. Aristote, *Physique*, VII, 4, 248 a11-13; 248 a19-b6.

34 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

de Pitane¹⁰⁵. Mais il s'agissait là de sphérique, donc de mathématiques qui portent sur les sensibles dans lesquelles il n'y avait pas d'inconvénient à mentionner le temps. Archimède n'hésite pas le faire dans un traité censé être purement géométrique. Cela dit, être pragmatique n'implique pas que tout soit permis. Il y a une hiérarchie de démarches et, selon Pappus, c'est une faute de résoudre un problème de nature plane (resp. solide) par une approche solide (resp. grammique)¹⁰⁶. Mais renoncer aux considérations cinématiques, c'était capituler devant les problèmes grammiques.

Depuis Descartes, on dit souvent que l'étude des courbes représente un élément marginal de la géométrie grecque. Il y a sans doute une part de vérité dans ce jugement si l'on raisonne rétrospectivement, par comparaison avec ce qui sera fait au XVII^e siècle. Mais si l'on regarde les auteurs qui ont travaillé sur les courbes et autres problèmes de lieux, on voit que, du IV^e s. avant notre ère jusqu'à Pappus, pratiquement tous les géomètres que nous connaissons se sont intéressés à ces questions¹⁰⁷. A *contrario*, une des raisons que l'on pourrait invoquer pour expliquer (au moins partiellement) le rejet du mouvement par Khayyâm est que cette géométrie supérieure des courbes — à l'exception des coniques — a été assez mal transmise aux savants des pays d'Islam.

A ma connaissance, ni le traité des *Spirales* d'Archimède¹⁰⁸, ni les livres géométriques de la *Collection* de Pappus, ni le *Commentaire* de Proclus au premier Livre des *Éléments* n'ont été traduits en arabe. Du corpus grec conservé concernant des courbes autres que les coniques, seule l'anthologie de solutions au problème des deux moyennes composée par Eutocius a été transmise¹⁰⁹, parmi lesquelles celle de Nicomède y est présentée comme une solution instrumentale et celle de Dioclès (dont les deux versions étaient connues en Pays d'Islam) ne faisait pas explicitement référence au mouvement comme nous l'avons vu.

¹⁰⁵ V. [Autolykos / Aujac, 1979], p. 42, l. 3-7, mais il n'y a aucune raison de traduire "γραμμή" par "droite" comme le fait Aujac; il s'agit de lignes, comme chez Archimède.

¹⁰⁶ V. [Pappus / Hultsch, 1876], L. IV, § XXXVI, p. 270, l. 28—p. 272, l. 7.

¹⁰⁷ Eudoxe, Ménèchme, Dinostrate, Aristée, Euclide, Persée, Conon, Archimède, Dosithée, Ératosthène, Dioclès, Nicomède, Apollonius, Dionysodore, Géminus, Démétrios d'Alexandrie, Philon de Tyane, Ménélaos, Sérénus, Pappus.

¹⁰⁸ Déjà au VI^e s., Eutocius d'Ascalon ne connaît ce traité que par ouï-dire. Sa circulation dû être limitée. En revanche, le traité était toujours accessible aux Byzantins du IX^e s. Il le devint pour les Latins grâce à la traduction de Guillaume de Moerbeke (1269).

¹⁰⁹ Ils ont aussi connu *La sphère en mouvement* d'Autolykos et donc son préambule qui contient l'équivalent de la Prop. 1 du traité des *Spirales*, comme je l'ai souligné *supra*.

Cela dit, une partie du matériel contenu dans le Livre IV de la *Collection* de Pappus, notamment celui qui concerne la trisection de l'angle, a été connu des savants d'expression arabe¹¹⁰. Selon Wilbur Knorr, ils auraient eu accès, non pas à ce texte lui-même, mais à certaines de ses sources. Il a notamment cru pouvoir identifier, parmi celles-ci, les *Éléments de géométrie* de Ménélaos, en trois Livres, traduits en arabe par Thâbit ibn Qurra¹¹¹.

Je confesse que j'ai quelques doutes. Knorr¹¹² considère que l'ouvrage cité par al-Birûnî dans son traité sur les cordes est le même que celui auquel les Banû Mûsâ reconnaissent avoir emprunté leur solution au problème des deux moyennes, dans la Proposition 16 de leur traité *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*¹¹³. Or ils ne citent pas les *Éléments de géométrie*, mais l'un des livres de géométrie de Ménélaos qui n'en avait pas écrit qu'un¹¹⁴ !

Spéculons un peu : s'ils ont eu accès à son traité sur les lignes, mentionné par Pappus, alors ils ont pu en connaître un peu plus sur la géométrie grecque des courbes autres que les coniques. On pourrait même envisager que la courbe qu'ils utilisent pour la trisection de l'angle dans leur Proposition 18¹¹⁵ ait été empruntée au même Ménélaos, voire qu'elle soit celle que Pappus qualifie de "paradoxe".

Quoi qu'il en soit de ces hypothèses invérifiables, il faut relever que, dans la traduction française de cette Proposition 18¹¹⁶, les verbes "imaginer", "se mouvoir", "aboutir à" et le substantif "mouvement" apparaissent chacun plusieurs fois¹¹⁷. Les premiers géomètres d'expression

¹¹⁰ Le fait qu'il soit précédé du passage sur la classification des problèmes que nous avons cité *supra* — texte à caractère éminemment introductif — est un autre indice de ce que ce matériel, comme le Livre VIII, a pu connaître une diffusion indépendante de celle de l'ensemble de la *Collection*.

¹¹¹ [Knorr, 1989], p. 219 et pp. 288-289.

¹¹² *Ibid.*, p. 101 + n. 135.

¹¹³ V. [Banû Mûsâ / Rashed, 1996], pp. 116-121.

¹¹⁴ Hogendijk a récemment retrouvé d'autres traces des *Éléments de géométrie* de Ménélaos. Ces nouveaux fragments l'incitent à penser que le traité ne portait que sur des questions "planes" (pour utiliser la terminologie de Pappus). Auquel cas il ne contenait ni la solution au problème des deux moyennes reprise par les Banû Mûsâ, ni la trisection qui, selon Knorr, aurait servi de source à Thâbit. V. [Hogendijk, 1999-2000], pp. 140-141.

¹¹⁵ Il s'agit de la conchoïde du cercle, appelée « limaçon de Pascal » par Roberval.

¹¹⁶ [Banû Mûsâ / Rashed, 1996], pp. 128-133.

¹¹⁷ Autant que je puisse en juger, un vocabulaire du même genre se trouve dans la Prop. 17. En revanche dans la Prop. 16, correspondant à la solution d'Archytas, on

36 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

arabe, à la suite de leurs homologues grecs, n'éprouvaient peut-être pas de réticences particulières à utiliser le mouvement pour certains problèmes géométriques, même si la chose semble assez peu attestée¹¹⁸.

Mais on doit aussi relever, toujours au sujet de la trisection de l'angle, cette assertion d'as-Sijzî (deuxième moitié du X^e s.) :

« Proposition résolue par un des anciens au moyen de la règle et de la géométrie *mobile*, mais que nous devons résoudre au moyen de la géométrie *fixe* »¹¹⁹,

ainsi qu'une restriction du même genre, énoncée dans la solution au problème des deux moyennes proportionnelles proposée par Abû Ja'far al-Khâzin (première moitié du X^e s.). Celui-ci s'inspire de Nicomède qu'il connaît par Eutocius. Tous deux sont explicitement cités. Cela dit, son ambition est de se conformer à une démarche véritablement géométrique, à l'aide des coniques, par contraste avec ce qu'il juge être une construction trop instrumentale. Lui aussi, dans son préambule, parle de « la méthode de la géométrie fixe »¹²⁰. Ces mentions suggèrent qu'une opposition, entre géométrie fixe, c'est-à-dire "véritable" — et géométrie mobile — c'est-à-dire instrumentale et, par conséquent, faisant appel au mouvement, a été progressivement acceptée. Le rejet de Khayyâm en serait en quelque sorte le point d'aboutissement.

La raison pouvait en être l'influence grandissante d'une certaine version de la philosophie aristotélicienne des mathématiques, mais aussi, comme chez les Anciens, le résultat d'une réflexion mathématique sur les différentes méthodes disponibles, à partir du moment où les problèmes étudiés se diversifiaient. Les travaux (apparemment perdus) d'Ibn al-Haytham et d'Ibn Sayyid que nous avons évoqués plus haut à propos de la généralisation du problème de l'insertion des deux moyennes¹²¹ montrent bien que les géomètres des Pays d'Islam ont proposé des approches originales.

trouve seulement des mots comme "tourner", "rotation", conformément à ce que l'on observe dans le texte grec transmis par Eutocius.

¹¹⁸ Ce genre d'affirmation réclamerait des investigations approfondies qui sortent du cadre des présentes remarques et qui dépassent largement mes compétences. Cf. la page plutôt sibylline (p. 128) que l'on trouve dans [Rosenfeld & Youschkevitch, 1997].

¹¹⁹ V. [Khayyâm / Woepcke, 1851], p. 120. Ce à quoi as-Sijzî fait référence correspond assez bien à la Proposition 8 du livre dit des *Lemmes*, attribué à Archimède et conservé seulement dans la traduction arabe de Thâbit ibn Qurra.

¹²⁰ Je traduis à partir de la traduction anglaise donnée dans [Knorr, 1989], p. 311.

¹²¹ V. *supra*, n. 76.

Un dernier point mérite d'être relevé : Ibn Sayyid engendrait des familles de courbes de complexité croissante en recourant, entre autres procédés, à la projection. Nous avons vu que c'était également le cas de Pappus, dans sa tentative de sauvetage de la quadratrice à partir de l'hélice cylindrique. Mais il y a une différence fondamentale d'orientation. A l'exception possible de la projection — je n'ai pas la moindre idée de la manière dont Ibn Sayyid la considérait (mouvement imaginaire, transformation ponctuelle ?) —, le mouvement n'intervient pas dans les constructions du Géomètre andalou. Si je ne me trompe pas, toutes les courbes qu'il engendre ainsi sont, du point de vue moderne, algébriques. Selon Ibn Bâjja, la méthode d'Ibn Sayyid lui permettait de résoudre le problème de la section de l'angle « selon un rapport numérique quelconque »¹²². Je ne sais pas ce qu'Ibn Sayyid appelait un rapport "numérique", mais je suppose qu'il voulait couper un angle en n parties égales, quel que soit l'entier n , ce qui reste un problème algébrique.

A l'inverse, nous avons vu que Pappus se proposait de couper un angle, à l'aide de la spirale ou de la quadratrice, dans n'importe quel rapport donné, rapport exhibé comme celui de deux droites, et correspondant donc, pour nous, à un réel positif quelconque, algébrique ou transcendant. D'une manière générale, les différents exemples de problèmes grammiques qu'il mentionne sont constitutivement liés à la quadrature ou à la rectification du cercle. En termes modernes et anachroniques, l'usage du mouvement, dans cette partie de la tradition grecque des courbes, supplée la détermination de nombres transcendants. De ce point de vue, les géomètres des Pays d'Islam sont peut-être plus proches de Descartes que de Pappus, resté fidèle à la longue tradition de la "mécanique" géométrique inaugurée par Archytas !

3. La question du mouvement dans les *Éléments*

Trois thématiques ont partie liée avec le mouvement dans les *Éléments* :

- (i) les "définitions" cinématiques des solides de révolution (sphère, cône et cylindre) dans le Livre XI (Df. 14, 18, 21).
- (ii) L'utilisation de la méthode dite de superposition dans les Propositions I. 4, 8 et III. 24.

A ces lieux circonscrits, on peut ajouter le problème de la construction des figures, pratiquée un peu partout dans les Livres géométriques du traité d'Euclide (L. I-IV + VI + XI-XIII), et que l'on peut d'ailleurs rapprocher de la génération des lignes dont il a été question dans ce qui précède. Dans l'exégèse des *Éléments*, cette pratique renvoie à :

¹²² V. [Djebbar, 1993], p. 89.

38 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

(iii) la double distinction des postulats et des axiomes d'un côté, des problèmes et des théorèmes, de l'autre.

Reprenons-les successivement en ordre inverse. Nous avons déjà évoqué la critique platonicienne exercée aux dépens du langage des géomètres qui s'expriment comme s'ils *produisaient* leurs objets, alors que la géométrie, pour Platon, porte sur ce qui est et non sur ce qui "devient". Or quiconque a parcouru, même rapidement, les Livres géométriques des *Éléments*, a pu constater qu'Euclide distinguait stylistiquement deux sortes de Propositions. C'est lisible dès les cinq premières Propositions du traité :

- « I. 1 : Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral;
- I. 2 : Placer en un point donné, une droite égale à une droite donnée;
- I. 3 : De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande, une droite égale à la plus petite;
- I. 4 : Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent;
- I. 5 : Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux ».

Les énoncés des trois premières prescrivent de faire quelque chose à partir de certaines données (droite, point), ce qui s'exprime à l'aide de l'infinitif d'un verbe d'action (construire, placer, retrancher). Celui-ci est répété dans la détermination portant sur le diagramme lettré qui accompagne la Proposition, précédé de la forme impersonnelle « il faut alors ... (faire telle chose) ». Normalement il n'y a pas de conclusion générale et la clause finale est « ce qu'il fallait faire ». Les Propositions I. 4 et 5 n'obéissent pas au même format : l'une (4) est énoncée comme une conditionnelle « si ... alors ... », l'autre (5), comme une assertion universelle non explicitement quantifiée. Leurs déterminations s'énoncent : « Je dis que ... ». La notion de « donnée » en est absente. Il y a souvent des conclusions générales (ce qui revient à reformuler l'énoncé général en lui ajoutant "donc")¹²³ et la clause finale est : « ce qu'il fallait démontrer ». Dans son commentaire, Proclus relève cette distinction et explique qu'il y a deux catégories fondamentales de Propositions¹²⁴ : les problèmes (comme I. 1-3), et les théorèmes (tels I.

¹²³ Même si dans les manuscrits, sans doute par souci d'économie, on n'a pas cru utile de les reproduire entièrement. Elles sont parfois absentes ou, quand elles existent, souvent abrégées.

¹²⁴ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 77, l. 7—p. 81, l. 22, en particulier, p. 81, l. 5-22, et p. 200, l. 22—p. 202, l. 9; p. 241, l. 18—p. 244, l. 9.

4-5). Le Diadoque fait lui-même le rapprochement entre la catégorie des "problèmes" et la *génération* (γένεσις) des figures, leurs sections, retranchements, adjonctions et les autres opérations qui les affectent, ainsi qu'avec l'aspect "mécanique" qui intervient en géométrie¹²⁵.

De fait, cette dualité au niveau des unités textuelles se retrouve à l'intérieur de chacune d'elles. Si on lit la Proposition I. 5, par exemple, on voit immédiatement que cinq ingrédients interviennent :

	<ul style="list-style-type: none"> — une double énonciation, l'une générale (cf. <i>supra</i>), l'autre particulière (Soit un triangle isocèle ABC ayant le côté AB égal au côté AC ... Je dis que ...) correspondant à l'introduction d'un lettrage qui renvoie donc à : — un schéma muni de lettres (ci-contre), caractéristique de la géométrie grecque. — Ce schéma est présenté dans un état final, mais comme on le voit ici, plusieurs éléments ont été ajoutés aux données initiales, d'où une phase de <i>construction</i> pour introduire ces nouveaux éléments comme le point F, les droites AG, FC, GB.
<ul style="list-style-type: none"> — une partie argumentative que les commentateurs appellent la <i>démonstration</i> proprement dite (ἀπόδειξις) pour établir la : — conclusion, elle-même double, d'une part particulière et énoncée à partir de la configuration du diagramme lettré : « les angles ABC et ACB sont égaux », d'autre part générale, enfin la petite clause rituelle « ce qu'il fallait démontrer ». 	

Ce schéma se retrouve, avec quelques variantes, dans l'ensemble des Propositions euclidiennes. Les doubles énonciations et conclusions renvoient à l'usage du diagramme lettré et à son horizon logique : démonstration dont la validité prétend être générale quoique menée sur un cas en un sens particulier¹²⁶.

Clairement ce sont les deux parties de "construction" — quand elle existe¹²⁷ — et de "démonstration" qui caractérisent la teneur mathématique d'une Proposition. Autrement dit, y compris au niveau le plus élémentaire, la pratique de la géométrie grecque apparaît comme un mélange de "faire"

¹²⁵ V. *Ibid.*, p. 77, l. 8-11; p. 79, l. 3-7; p. 201, l. 10-12; p. 243, l. 12-25.

¹²⁶ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 203, l. 1—p. 210, l. 25. La distinction des parties d'une Proposition décrite par Proclus a été connue (au moins partiellement) des mathématiciens d'expression arabe, notamment (mais pas seulement) grâce à une introduction de Thâbit ibn Qurra, probablement inspirée par l'*Introduction à la géométrie* de Simplicius. V. [Djebbar, 2003], en particulier pp. 301-302 et 314-321.

¹²⁷ Elle n'est pas toujours nécessaire si aucun élément supplémentaire n'est requis pour la démonstration. V. par exemple dans le L. I : Prop. 19, 25 (réductions logiques à l. 18, 24 resp.), 28, 29, 34, 35, 43.

40 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

(problèmes, constructions) et d'énonciations de propriétés justifiées (théorèmes, démonstrations)¹²⁸.

D'un point de vue philosophique, quel statut peut-on donner à ces "générations" qui n'ont évidemment rien à voir, ni avec l'engendrement d'êtres vivants, ni avec la fabrication d'un artefact par un artisan ? Sont-ce de simples métaphores, vitaliste ou artefactuelle, et pourquoi est-il nécessaire d'y recourir pour pratiquer la géométrie ? Deux explications, au moins, sont envisageables :

- La construction ou la génération ne sont que des détours obligés par nos limitations cognitives. Elles constituent une forme de notre appropriation. La figure abstraite n'est pas soumise à de tels processus. La résolution progressive d'un problème n'est qu'un accessoire pédagogique lié à ces limites, ce n'est pas une nécessité formelle des objets. Cela revient à postuler un monde idéal de figures et à assimiler la véritable activité mathématique à une pure contemplation. C'est certainement une version platonicienne très forte.
- Les mathématiques ne sont pas une contemplation, mais une activité dont l'unité de base est le *problème*, le but en est la résolution par la mise en œuvre de procédures. Parmi celles-ci, les constructions, l'engendrement de nouveaux objets — nouveaux par rapport aux données du problème — sont *essentiels* et non accessoires.

Ces positions ne sont pas des vues de l'esprit. Si l'on suit Proclus¹²⁹, ce furent précisément celles adoptées dans un débat qui opposait, d'une part Speusippe, le neveu et successeur de Platon à la tête de l'Académie, et Amphinomos, inconnu par ailleurs, et d'autre part, le cercle du géomètre Ménèchme, lui-même disciple d'Eudoxe de Cnide et peut-être inventeur des coniques. Pour les premiers, tout était théorème et le problème n'avait pas sa place dans les sciences mathématiques car il implique une génération, laquelle n'existe pas pour les choses éternelles dont s'occupe le géomètre. Une telle affirmation implique sans doute qu'un sens particulier de "problème" (par opposition à "théorème") se soit fixé à ce moment, car dans

¹²⁸ A cet égard il y a une différence perceptible entre géométrie et arithmétique. Le "faire" en arithmétique est essentiellement un "trouver" (étant donnés deux nombres, trouver leur PGCD, leur PPCM, tels nombres vérifiant telle condition ...), comme s'il était admis que l'arithméticien disposait d'un réservoir de nombres où puiser sans que l'on explique comment et pourquoi cela peut se faire. A cause de l'implication spatiale de la géométrie, le "faire" y est un construire (selon différentes modalités) et cette différence explique aussi qu'il y a des postulats géométriques mais pas de postulats arithmétiques. Comme l'a relevé [Mueller, 1981] (p. 60), Euclide n'utilise pas non plus la formule « ce qu'il fallait faire » dans ses Livres VII-IX.

¹²⁹ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 77, l. 15—p. 78, l. 13.

le Livre VII de la *République*, nous voyons, au contraire, Platon faire l'éloge du problème géométrique et le proposer en modèle aux astronomes¹³⁰. Mais il s'agissait, en l'occurrence, de "problème" au sens général de "questionnement". Étymologiquement un problème, c'est ce qui est "proposé" (littéralement : « lancer en avant ») à la recherche.

Quelles conséquences Speusippe tirait-il de son rejet des problèmes ? Condamnait-il les constructions géométriques élémentaires comme les exemples énumérés par Proclus pourraient le laisser croire ? Sans doute pas.

Dans son traité *Du ciel*, Aristote argumente contre ceux qui défendent la thèse que le cosmos est à la fois engendré et incorruptible. Il pense évidemment aux Platoniciens. Certains, dit-il, argumentent en disant qu'ils parlent de génération (γένεσις) à la manière de ceux qui tracent des diagrammes géométriques (τὰ διαγράμματα), sans penser à une génération dans le temps, mais seulement en vue de considérations didactiques, afin de mieux comprendre, comme c'est le cas quand on a vu la genèse du diagramme. Aristote montre ensuite que cette analogie, établie entre la cosmogonie "fictive" qui résulterait d'une certaine lecture du *Timée* et la construction géométrique — qu'il ne remet donc pas en cause —, est factice. Pour les diagrammes, le temps ne joue aucun rôle, contrairement à ce qui se passe dans la mise en ordre cosmique¹³¹. Les commentateurs attribuent cette interprétation de la genèse du *Timée* à Xénocrate, le successeur de Speusippe.

Il semble donc que l'idée selon laquelle les générations géométriques ne sont que des artifices didactiques était adoptée par l'Académie, probablement pour rendre compatible la pratique des géomètres et la thèse fondamentale de l'ontologie mathématique de l'École.

Pour résumer on pourrait dire que Platon et ses disciples savent parler des mathématiques — ou plutôt des *objets mathématiques* — mais pas vraiment de l'*activité des mathématiciens*. Leur épistémologie n'est peut-être pas tout-à-fait incompatible avec l'*arithmétique* ancienne, mais elle ne rend certainement pas bien compte de la géométrie. Elle ne pouvait sans doute pas satisfaire les mathématiciens soucieux de prendre en compte le travail constructif qu'implique leur pratique.

Ainsi, pour Ménèchme, peut-être par esprit de contradiction, en géométrie il n'y a que des problèmes ! Il leur reconnaissait cependant une double nature : tantôt on demande de procurer (πορίσασθαι) la chose cherchée, tantôt, en la supposant circonscrite, il s'agit d'examiner ce que

¹³⁰ V. Platon, *Resp.*, VII, 530 b7-c3.

¹³¹ V. Aristote, *Du ciel*, I, 10, 279 b34—280 a10.

42 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

c'est, de quelle sorte elle est, ses qualités, les relations qu'elle entretient relativement à d'autres¹³².

L'opposition est donc totale et Proclus est manifestement très content de pouvoir donner raison aux uns et aux autres — autrement dit, ni aux uns, ni aux autres ! — chacun ayant bien compris une partie (mais une partie seulement) de la question. Sa propre épistémologie, en termes de projection dans l'imagination, permet de concilier l'existence de raisons mathématiques purement intelligibles et éternelles avec la nécessité de recourir, pour progresser dans l'invention mathématique, à des "représentations" qui, dans l'imagination¹³³, impliquent générations et mouvements. En bon platonicien, il maintient simplement le primat, en géométrie, du théorème sur le problème¹³⁴.

Sur cette question des constructions dans les Propositions géométriques et les générations qu'elles semblent comporter, Aristote est resté discret. Il connaît la position des Platoniciens et rien n'indique qu'il soit en désaccord avec eux, du moins sur ce point, car il s'agit dès lors d'un problème gnoséologique ou "psychologique", pas d'ontologie. Un célèbre passage de la *Métaphysique* suggère même qu'il accordait davantage d'importance à l'étape de construction dans une proposition géométrique en tant que celle-ci représente l'ajout d'éléments qui provoque la compréhension immédiate du problème par le mathématicien. L'exemple est celui de la somme des trois angles d'un triangle qui vaut deux droits. Le tracé d'une parallèle à l'un des côtés du triangle, dit le Stagirite, nous en convainc immédiatement¹³⁵.

Cette relative discrétion du Stagirite explique sans doute en partie pourquoi ses commentateurs de l'Antiquité tardive, puis les géomètres et

¹³² S'agit-il d'une typologie des problèmes ou d'une allusion au double mouvement de la synthèse et de l'analyse ? Signalons, sans entrer dans les détails, que la suite du commentaire (*ibid.*, p. 79, l. 12—p. 81, l. 4) montre que la réflexion sur l'opposition « problème *versus* théorème » connut encore d'autres développements. Proclus signale notamment deux cercles intellectuels, dont celui des disciples de Posidonius, qui introduisirent ce que l'on peut appeler l'interprétation "constructiviste" de la notion de "problème" : sa résolution constituerait une démonstration d'existence. L'idée eut beaucoup de succès par la suite.

¹³³ V. *Ibid.*, p. 78, l. 13—p. 79, l. 2.

¹³⁴ *Ibid.*, p. 79, l. 3-11. Cette position était aussi celle du Stoïcien Géminus. Dans son commentaire à la Proposition I. 4, le Diadoque se fait l'écho d'un reproche, frivole selon lui, que le mécanicien Carpos d'Antioche avait adressé à Géminus sur cette primauté du théorème par rapport au problème (*ibid.*, p. 243, l. 12-25). Carpos, en bon mécanicien, soutenait la thèse opposée !

¹³⁵ V. Aristote, *Met*, Θ , 9, 1051 a21-32. Cf. Euclide, *Él.*, I. 32.

philosophes médiévaux ne semblent pas s'être particulièrement intéressés à la distinction « problème *versus* théorème ».

Il en va tout autrement pour celle qui porte sur les principes de la science, notamment l'opposition « postulat *versus* axiome », et pour le coup, l'exposé aristotélicien des *Seconds Analytiques*, confronté à la pratique euclidienne, a engendré une littérature considérable dont l'examen détaillé réclamerait, à lui seul, toute une analyse. Celle-ci dépasse largement les objectifs du présent travail et je me contenterai de quelques indications sommaires. Des questions relevant de différents registres (logique, mathématique, épistémologique, philologique) ont été soulevées au sujet des principes : combien faut-il distinguer d'espèces de principes dans une science démonstrative ? une seule ? Deux ? Trois ? ... Si on en distingue plusieurs — c'est le cas en géométrie —, quelles seront les fonctions, logiques et/ou mathématiques, de ces différentes sortes de principes ? Quelles relations entretiennent-ils avec les démonstrations ? les constructions ?, les problèmes d'existence ? Peut-on les démontrer ? Sinon, peut-on les justifier et comment les trouve-t-on ?

Euclide, au début de son traité, propose une trichotomie : Définitions (ὅροι), Demandes (αἰτήματα), Notions communes (κοινὰ ἔννοιαι). Est-il en accord ou non avec Aristote (étant entendu que leurs nomenclatures ne coïncident pas) ? Si ce n'est pas le cas, sur quoi porte la divergence ? Quels sont, parmi les principes d'Euclide, ceux qui sont authentiques et ceux qui ne le sont pas ? Faut-il tous les maintenir comme principes ou certains doivent-ils faire l'objet de démonstrations (et donc devenir des propositions) ? Faut-il en ajouter d'autres qu'Euclide aurait omis ? Existe-t-il un lien entre les deux distinctions dont nous venons de faire état (« problème *versus* théorème », « postulat *versus* axiome ») ?...

Toutes ces questions furent soulevées tour à tour dès l'Antiquité, d'Aristote à Simplicius et Philopon, en passant par Apollonius, Posidonius, Géminus, Diodore d'Alexandrie, Héron, Ptolémée, Alexandre d'Aphrodise, Peithon, Pappus, Thémistius, Aganis (?), et surtout Proclus. Il y avait là de quoi nourrir une abondante exégèse médiévale et moderne. Si la pratique euclidienne n'avait eu aucun rapport, avec l'exposé aristotélicien des *Seconds Analytiques*, ou si elle avait été en totale conformité avec lui, il y aurait très peu à dire, mais comme le lecteur l'a sans doute deviné, il n'en est rien.

Aristote distingue lui aussi trois sortes de principes scientifiques : les axiomes (ἀξιώματα), les définitions (ὅροι) et les hypothèses (ὑποθέσεις). Il y a donc accord avec Euclide sur le nombre (3) et, pour aller très vite, on peut établir une assez bonne correspondance entre nos deux auteurs pour ce qui concerne les Définitions (même s'il est clair que toutes les définitions

44 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

euclidiennes ne satisfont pas les réquisits de la doctrine aristotélicienne) et les principes communs¹³⁶, quoique ceux-ci soient désignés de manières différentes (ἀξιώματα, κοινά ἔννοια).

La divergence est en revanche bien réelle en ce qui concerne les postulats (nom dérivé du latin "postulatum" = "demande")¹³⁷. Aristote introduit en effet le terme "ἀἴτημα" — cette fois il y aura donc coïncidence lexicale ! — pour désigner une sous-espèce d'hypothèses, par opposition à celles qui sont dites "hypothèses" au sens absolu. Cette nouvelle distinction apparaît dans un contexte pédagogique ou dialectique, pour désigner un point de départ *démontrable* mais posé sans démonstration, sur lequel l'apprenant n'a pas d'opinion ou l'opinion contraire.

Contrairement au cas des Notions communes, aucun exemple de postulat euclidien ne se trouve chez le Stagirite et, qui plus est, contrairement au cas de l'"hypothèse", aucun exemple mathématique n'est donné dans cette discussion du "postulat". Aristote ne précise même pas que le postulat, au même titre que l'hypothèse, aurait à voir avec l'existence, quoique cela puisse se déduire avec vraisemblance de l'interprétation du passage. Les autres utilisations¹³⁸ du terme "ἀἴτημα" confirment qu'il s'agit

¹³⁶ Si l'on admet ce point, il faut donc en déduire que les NC d'Euclide valent pour l'ensemble des spécialités présentées dans le traité : géométrie plane, arithmétique et stéréométrie. C'est d'ailleurs ce que suggère la différence que l'on peut facilement observer entre Demandes (libellées à l'aide de termes particuliers préalablement définis : point, droite, ligne ...) et NC (expressions générales au neutre, non définies, que l'on traduit généralement par "choses" égales, inégales, ajustées, le tout ...). Cette lecture suppose aussi que l'on élimine la NC 9 (« Et deux droites ne contiennent pas une aire »), d'ailleurs inauthentique. On en fait soit un postulat géométrique, soit une proposition. Chacune de ces solutions a été adoptée dans l'Antiquité.

¹³⁷ Contrairement à ce que suggère la présentation de M. Caveing dans [Euclide / Vitrac, 1990], pp. 117-125 qui cherche à harmoniser Aristote, Euclide et Proclus. Ce dernier traite de la différence entre "axiome" et "postulat" à deux reprises : dans son second prologue ([Proclus / Friedlein, 1873], p. 75, l. 5—p. 77, l. 6 pour une discussion générale des principes indémonstrables) et avant de commenter en détails chacun desdits principes autres que les Définitions (*Ibid.*, p. 178, l. 21—p. 184, l. 11). Il précise que cette seconde discussion sera plus approfondie et c'est donc là qu'il faut chercher le point de vue qu'il adopte. Dans ces deux passages, il cite bien entendu Aristote mais, ni dans l'un, ni dans l'autre, il ne dit qu'il y a plein accord avec Euclide. Et lui-même adopte une position qu'il rapporte à Géminus et selon laquelle la différence "postulat" / "axiome" est celle qu'il y a entre ce qui fournit quelque chose (qui est une "prise" (λήψις)) et ce qui fait connaître (γνώσις). Il ajoute qu'il y a une analogie entre d'une part axiomes et théorèmes, d'autre part postulats et problèmes.

¹³⁸ Il n'apparaît que dans les *Analytiques premiers et seconds* et une fois dans le *de Anima* (II, 7, 418 b26).

d'une notion de "demande" en un sens très général, que l'on utilise en rhétorique, en philosophie naturelle, en théorie de la démonstration et, peut-être en mathématiques, mais rien ne permet de faire un rapprochement direct entre la notion aristotélicienne de postulat et celle d'Euclide.

Le rapprochement sera pourtant fait, notamment par Proclus et Simplicius¹³⁹, avec des conséquences importantes, parfois fécondes, parfois trompeuses :

- Il suggère l'idée que les postulats euclidiens étaient considérés par leur auteur comme des principes admis mais démontrables, ce qui n'a pu qu'encourager les tentatives de démonstration des Demandes 4-5, d'autant que la seconde — le célèbre postulat des parallèles — était complexe et ressemblait davantage à l'énoncé d'un théorème qu'à un principe.
- A partir de ce rapprochement hâtif, on en a aussi déduit que les postulats euclidiens de construction (N°1-3) avaient une fonction existentielle. On doit remarquer que chez Aristote, ce sont les "hypothèses" *au sens absolu* — dont les postulats sont distingués — qui ont cette fonction. Même Proclus, pourtant prompt à chercher les points de contact entre autorités, ne fait jamais explicitement référence à une quelconque interprétation existentielle des postulats¹⁴⁰.

Un dernier point mérite d'être relevé au sujet des (vrais) postulats. Si l'on peut — si l'on doit — les admettre dans le cadre d'un exposé scientifique comme celui que constituent les *Éléments* de géométrie pour éviter toute régression à l'infini, reste qu'on peut chercher à les justifier. Et quel moyen pourrait être mieux adapté que de recourir au mouvement pour rendre compte d'énoncés comme les trois premières Demandes ? Celles-ci nous enjoignent en effet de :

- « 1. ... mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

¹³⁹ Et donc transmis par cet intermédiaire, entre autres, aux mathématiciens d'expression arabe. V. [Djebbar, 2003], p. 300. On retrouve cette connexion dans les *Musâdarât* d'Ibn al-Haytham. V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], pp. 75-76 avec l'idée que les postulats sont donc démontrables.

¹⁴⁰ En revanche, nous avons vu que certains Anciens, notamment les disciples de Posidonius, attribuaient une telle valeur aux *problèmes* par opposition aux théorèmes. Pour l'étendre aux postulats, il faudrait donc combiner cette première interprétation avec l'analogie que Proclus lui-même propose (v. *supra*, n. 137) : « axiome : postulat :: théorème : problème ». Mais le Diadoque n'attribue jamais cette analogie aux Stoïciens, en particulier à Géminus. Et Proclus lui-même, de l'analogie qu'il a posée, ne déduit pas explicitement que les postulats ont une fonction existentielle.

46 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle ».

Proclus introduit son commentaire de la manière suivante :

« Ces trois énoncés, à cause de leur clarté et de ce qu'il nous est prescrit de procurer quelque chose, devront être nécessairement rangés parmi les postulats, si l'on suit Géminus. Car le fait de mener une ligne droite de tout point à tout point est une conséquence du fait que la ligne est un flux du point, et la droite, celui d'un flux uniforme et sans déviation. En effet, en concevant que le point est mû d'un mouvement uniforme et minimal, nous aboutirons à l'autre point, et le premier postulat aura été réalisé sans que nous ayons eu à concevoir quoi que ce soit de complexe »¹⁴¹.

Autrement dit, il s'efforce de montrer qu'en accord avec sa propre doctrine des postulats — reprise à Géminus, d'ailleurs cité à nouveau ici — nos trois assertions remplissent les deux conditions requises : (i) procurer (πορίσασθαι) quelque chose, mais (ii) sans que nous ayons à concevoir quoi que ce soit de complexe (ποικίλον). La justification intercalée entre les rappels de ces deux conditions est intéressante car nous y retrouvons la ligne conçue comme flux d'un point.

Certains interprètes en ont déduit que Géminus, dès le 1^{er} siècle avant notre ère, justifiait les postulats de construction en termes de mouvement et même de ῥύσις¹⁴². Cela n'est pas impossible puisque nous avons vu, quand nous en avons discuté à propos d'Ératosthène et Sextus, que cette dernière notion est bien antérieure à Proclus. Géminus, friand de considérations classificatoires, aurait introduit une caractérisation de la ligne droite (chez Sextus, il s'agit de la ligne générique), en précisant que le flux générateur devait être uniforme, sans déviation et minimal (une allusion à la caractérisation archimédienne de la droite comme plus courte ligne joignant deux points).

Un autre indice en faveur de cette identification est l'absence de la φαντασία à ce niveau de l'explication, l'imagination, si caractéristique de l'épistémologie de Proclus. Celui-ci l'introduit d'ailleurs un peu plus loin pour justifier, face à un hypothétique contradictoire, l'introduction du mouvement dans les objets géométriques, immobiles par nature¹⁴³. Pour l'instant, il n'est encore question que de "concevoir" (νοεῖσθαι) un mouvement géométrique, comme c'était déjà le cas chez Héron, Théon de Smyrne et Sextus, probablement à la suite d'Ératosthène.

¹⁴¹ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 185, l. 6-15.

¹⁴² V. par exemple [Jaouiche, 1986], p. 51.

¹⁴³ Dans cette justification, il soulignera avec force la différence qu'il y a entre mouvement imaginaire (φανταστική) et mouvement corporel (σωματική). V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 185, l. 25 — p. 187, l. 3.

Enfin, dernier élément de ce dossier, quand il commente, non plus les postulats mais les notions communes, Proclus rapporte ce qu'il présente comme des démonstrations des trois premières Notions, démonstrations en termes de « lieux occupés » qu'aurait proposées Apollonius de Pergè¹⁴⁴. On peut émettre l'hypothèse que l'Auteur des *Coniques* se proposait, non pas de démontrer des axiomes — c'est la faute logique que Proclus lui reproche —, mais de justifier, à partir d'un argument mi-mathématique mi-physique, la position de ces trois principes. Il y a alors une certaine cohérence à tenter de justifier les notions communes en termes de lieu d'un côté et les postulats en termes de mouvement, de l'autre. L'entreprise pourrait donc bien remonter à l'époque hellénistique.

Cela dit, les indices sont minces et l'initiative de ces justifications en termes de flux pourrait revenir à Proclus, capable de faire la synthèse entre une tradition cosmologique pythagoricienne de la *ῥύσις* et le recours au mouvement conçu ou imaginé pratiqué par les géomètres. On constate, par exemple, que les citations du commentaire de Simplicius par an-Nayrîzî — mais il ne s'agit que d'extraits — ne contiennent à peu près rien de tel. Il mentionne le caractère imaginaire des objets géométriques¹⁴⁵, et, commentant le postulat 3¹⁴⁶, il fait évidemment le lien avec le tracé instrumental du cercle à l'aide du compas, mais on est loin des considérations détaillées que propose le Diadoque. Quoi qu'il en soit, certains savants des Pays d'Islam ne vont pas hésiter à s'engager dans la même voie, et l'un de ceux qui sont allés le plus loin est sans doute Ibn al-Haytham.

Son *Commentaire sur les prémisses (Musâdarât) des Éléments d'Euclide* propose effectivement des "démonstrations" des trois premières Demandes en termes de mouvement dans l'imagination¹⁴⁷. Celles-ci n'épuisent pas les recours au mouvement dans les *Musâdarât*. Celui-ci intervient en effet pour

¹⁴⁴ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 194, l. 9—p. 195, l. 22.

¹⁴⁵ V. le commentaire au postulat n°1, [an-Nayrîzî / Besthorn & Heiberg, 1893], p. 17 ou [an-Nayrîzî / Tummers, 1994], p. 28.

¹⁴⁶ V. [an-Nayrîzî / Besthorn & Heiberg, 1893], p. 21 (circumagitur) ou [an-Nayrîzî / Tummers, 1994], p. 30 (circumducitur). On retrouve la même connexion dans l'introduction de Thâbit. V. [Djebbar, 2003], p. 310.

¹⁴⁷ V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], resp. p. 84, l. 6—p. 88, l. 11; p. 88, l. 15—p. 90, l. 4; p. 90, l. 15—p. 91, l. 7. Ibn al-Haytham propose également :

- une démonstration de la Demande 4, en termes de superposition (p. 91, l. 25—p. 93, l. 11) et d'origine grecque, dans laquelle le vocabulaire de l'imagination n'intervient d'ailleurs pas;
- une preuve du postulat des parallèles (p. 93, l. 12—p. 106, l. 15) dans laquelle des mouvements imaginaires sont utilisés. V. aussi [Jaouiche, 1986], pp. 161-175.

48 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

justifier la classification des angles rectilignes en aigus, droits, obtus, et dans le commentaire, en termes de génération, de la Définition euclidienne du cercle. De cet ouvrage se dégage la thèse épistémologique suivante : les objets géométriques appartiennent à l'imagination et donc, ce qui existe en géométrie, c'est ce que l'on peut imaginer¹⁴⁸. C'est notamment le cas des lignes parallèles telles qu'Euclide les avait définies — en particulier en tant qu'« indéfiniment prolongées de part et d'autre » — qui existent parce qu'elles sont imaginables grâce au mouvement d'une perpendiculaire, bien que l'infini lui-même soit unimaginable¹⁴⁹. Car l'imagination, pour Ibn al-Haytham, reste proche d'une capacité de "représentation" qui ne peut s'affranchir de l'idée de limite.

Cet abondant recours aux mouvements imaginaires évoque naturellement les développements proposés par Proclus, mais l'inspiration directe me paraît exclue. Nos deux auteurs mobilisent l'idée qu'un point engendre une ligne. Mais là où Proclus parle de flux et doit qualifier celui-ci d'uniforme et de minimal pour obtenir une droite, Ibn al-Haytham dit seulement que le mouvement d'un point engendre la ligne, sans faire usage — autant que je puisse en juger à partir de traductions — de quoi que ce soit qui correspondrait à la notion de "ῥύσις". En revanche, il développe un long argument pour établir comment ledit mouvement peut engendrer une droite. Pour cela, il montre comment l'imagination peut dégager la notion de "rectitude" à partir des choses sensibles, dans le cadre de la théorie aristotélicienne de l'abstraction que Proclus, pour sa part, avait rejetée¹⁵⁰.

Les sources du commentaire d'Ibn al-Haytham incluent très probablement des éléments d'origine grecque. J'ai déjà mentionné la preuve par superposition du postulat n°4. Il est également frappant que son commentaire à la Définition euclidienne de la droite consiste à mentionner trois définitions alternatives qui sont celles que l'on trouve aussi — et dans le même ordre ! — dans les *Definitiones* de Héron¹⁵¹. Ibn al-Haytham, comme

¹⁴⁸ V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], p. 30, l. 8-9; p. 55, l. 2-6.

¹⁴⁹ *Ibid.*, p. 49, l. 21-22.

¹⁵⁰ V. Ladite théorie est d'ailleurs placée par lui aux fondements de la géométrie dans une sorte de préambule qui justifie comment on peut, par abstraction, dériver les notions géométriques fondamentales que sont le solide, la surface, la ligne et le point. Celles-ci existent donc dans l'imagination. Cette séparation, précise Ibn al-Haytham, n'altère pas la forme. Dans cette dérivation, ni le mouvement, ni la ῥύσις parfois associée aux définitions génétiques d'inspiration platonicienne, n'interviennent. V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], pp. 22-30.

¹⁵¹ Cf. [Heron / Heiberg, 1912], p. 16, l. 24—p. 18, l. 5. Là aussi, l'écart avec Proclus, à l'inverse, est considérable.

Archimède, fait explicitement appel au temps¹⁵². Sa façon de s'exprimer, en termes de similitude de mouvements ponctuels (autant que je puisse en juger), fait peut-être écho, même si le contexte est très différent, au principe posé en préambule au traité d'Autolykos, et qui correspond, nous l'avons vu¹⁵³, à la première proposition des *Spirales*. Bref, il n'y a pas de quoi en faire un héritier direct des Néo-platoniciens¹⁵⁴.

A certains égards l'interprétation des postulats 1 à 3 en termes de mouvement est d'ailleurs assez évidente si on garde à l'esprit la pratique instrumentale sous-jacente aux constructions géométriques élémentaires : l'usage de la règle et du compas. Toutefois, il n'est précisément pas question de règle (κανών) ni de compas (διαβήτης) dans les *Éléments* qui ne se présentent pas comme un traité de géométrie pratique¹⁵⁵. Ils n'incluent pas non plus d'indications relatives à la génération de la circonférence du cercle comme on en trouve dans les justifications du postulat 3 en termes de mouvement. Khayyâm souligne d'ailleurs le choix d'Euclide pour sa Définition I. 15¹⁵⁶, dont la formulation, selon lui, exprime un rejet du mouvement. A l'inverse, Thâbit ibn Qurra et Ibn al-Haytham font de ladite génération imaginaire du cercle le garant de la Définition I. 15, soulignant l'un et l'autre que le mouvement circulaire n'altère pas la mesure du rayon dont l'extrémité trace la circonférence¹⁵⁷.

Ceci nous fournit la transition pour notre deuxième thème, celui de la superposition. Je serai beaucoup plus bref car j'ai déjà consacré une Notice à cette question¹⁵⁸ et il semble que les difficultés que l'on peut reconnaître dans l'utilisation de cette "méthode" dans les Propositions I. 4, 8 et III. 24¹⁵⁹ l'aient été surtout par les Modernes. D'une part, elle semble faire appel à un mouvement de l'une des deux figures considérées pour l'amener sur l'autre,

¹⁵² V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], p. 52, l. 8-16 ou [Jaouiche, 1986], p. 163.

¹⁵³ V. *supra*, n. 105.

¹⁵⁴ Cf. [Jaouiche, 1986], p. 51 à propos de Thâbit.

¹⁵⁵ Par contraste, le traité d'Abû al-Wafâ' al-Bûzjânî sur les constructions géométriques (*Kitâb Nejarât*) consacre le premier de ses 13 chapitres aux instruments du géomètre. Cf. l'édition qu'en prépare le Dr Aghayani-Chavoshi.

¹⁵⁶ V. [Khayyâm / Vahabzadeh, 1999], p. 312; [Khayyâm / Djebbar, 2001], p. 87.

¹⁵⁷ Pour Thâbit, v. [Jaouiche, 1986], p. 152. Il ajoute qu'à leur tour cette Définition et la propriété isométrique qu'elle exprime fondent la première Proposition des *Éléments*. Pour Ibn al-Haytham, v. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], pp. 43-44.

¹⁵⁸ V. [Euclide / Vitrac, 1990], pp. 293-299 et aussi pp. 202-203, 213-214, 439-440.

¹⁵⁹ Même Archimède utilise cette procédure dans ses *Équilibres plans* (Postulat 4 et Prop. 9) et, comme nous l'avons dit en commençant, c'est aussi le cas de Khayyâm, pourtant hostile à l'utilisation du mouvement en géométrie.

50 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

et, à strictement parler, ceci contredit le fait qu'une figure, dans la géométrie ancienne, est censée avoir une position. D'autre part la coïncidence ou non des deux figures est conçue par certains comme un événement physique susceptible d'être discriminé seulement par les sens, en fait la vue, avec toutes les incertitudes que cela comporte. C'est ce qu'objectent certains Modernes comme Jacques Peletier du Mans, mais rien de tel n'est attesté dans l'Antiquité¹⁶⁰.

Ainsi, dans sa discussion de l'ordre des premières Propositions d'Euclide, le mécanicien Carpos d'Antioche affirmait que le premier théorème, I. 4 reposait, bien entendu, sur les notions communes, mais aussi sur le fait qu'il était admis que le *même* triangle puisse être posé en des *lieux différents* (ἐν διαφόροις τόποις) et que l'ajustement et l'égalité démontrée à partir de là, résultait complètement d'une appréhension sensible et évidente (τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ὑπολήψεως)¹⁶¹. Proclus ne réagit même pas à ce *credo* empirique et il ne dit d'ailleurs rien sur la méthode en tant que telle. De même, si l'on admet que la démonstration du postulat 4 et la prise en compte, dans ce contexte, des angles du demi-cercle que Proclus rapporte dans son *Commentaire* ¹⁶² sont dues respectivement à Géminus et à Pappus — et il y a de très bonnes raisons de le croire —, on en déduira que ces deux géomètres n'avaient pas non plus de prévention contre la superposition puisque les deux développements y font appel¹⁶³.

Au demeurant, il n'est pas tout-à-fait certain qu'aux yeux des Anciens cette méthode de superposition était en contradiction avec les procédures constructives comme celles qu'Euclide met en œuvre dans les Propositions I. 2, 3, 22 ... Celles-ci sont des problèmes, et par conséquent, comme nous l'avons vu, des *données* y sont spécifiées, en particulier quant à la position. Dans I. 4, 8, III. 24, nous avons des théorèmes de type hypothétique (si ... alors ...) qui ne se préoccupent ni de savoir si de tels triangles (ou segments de cercles) existent, ni comment on peut les construire. Leur position peut bien être arbitraire. Comme on le voit avec l'affirmation de Carpos, les géomètres grecs admettent que la variation de la

¹⁶⁰ Cette "physicalisation" de la méthode géométrique de superposition tire peut-être son origine des nombreuses discussions médiévales (arabes et latines) de philosophie naturelle portant sur le continu ou l'atomisme et qui mobilisent ladite méthode dans leurs argumentations. A ce sujet, v. [Murdoch, 1964].

¹⁶¹ [Proclus / Friedlein, 1873], p. 243, l. 4-8.

¹⁶² V. resp. *Ibid.*, p. 188, l. 22—p. 189, l. 10 et p. 189, l. 23—p. 191, l. 4.

¹⁶³ Pour Heath, l'admission du postulat 4 montrerait qu'Euclide, réticent à utiliser le mouvement, aurait fait un usage minimal de la superposition. En fait il se trompe; cf. [Mueller, 1981], p. 21-23.

position des figures n'influe pas sur leur forme, ni sur leur grandeur. Ce qui justifie l'abus de langage grâce auquel on peut envisager la "même" figure en différentes positions. Que la forme et la grandeur des figures soient des données indépendantes du lieu est d'ailleurs un présupposé indispensable pour que la géométrie soit applicable à l'astronomie et à la mécanique.

La "rigidité" des figures paraît tellement aller de soi qu'il faut s'étonner des pénétrantes observations que fait Thâbit ibn Qurra à ce sujet dans son opuscule intitulé : *Sur le <fait> que si deux droites sont menées suivant deux <angles> moindres que deux angles droits, elles se rencontrent*. Dans ce texte, Thâbit introduit la discussion du postulat des parallèles en faisant de la superposition et du principe qui la gouverne — la notion commune N°7 des *Éléments* —, la notion la plus fondamentale de la géométrie, entendue ici principalement comme l'art de la mesure des surfaces.

Selon lui, toute mesure procède de la comparaison entre une mesure et ce qui est mesuré par la superposition, éventuellement répétée, de la première sur le deuxième, pour déterminer l'égalité, l'excès ou le défaut. La prise en compte de ces trois possibilités tient sans doute à ce que cette Notion commune, que l'on appelle souvent l'axiome de congruence, est énoncée un peu différemment dans les traditions indirectes arabe et arabo-latine des *Éléments* :

Tradition directe : « Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles ».

Tradition indirecte : « Deux choses, dont aucune des deux n'excède l'autre quand elles sont superposées, sont égales ».

Cette utilisation de la superposition est évidente dans les mesures pratiques, par exemple quand on utilise une règle. Déjà Héron, dans la préface au premier Livre de ses *Métriques*¹⁶⁴, justifiait, en termes de superposition, l'utilisation d'une figure rectiligne et rectangulaire pour effectuer les mesures planes, parce que, disait-il, la droite est la seule des lignes à toujours s'ajuster sur elle-même (même chose pour l'angle droit). Le verbe utilisé ici, "ἐφαρμόζειν", est celui que l'on emploie pour dire la superposition¹⁶⁵.

Mais ici Thâbit se place dans un cadre théorique et souligne que cette opération se fait dans l'imagination. Soucieux de fonder

¹⁶⁴ V. [Héron / Schöne, 1903], p. 4, l. 11-20.

¹⁶⁵ L'idée est que pour les autres lignes (non fermées !), même homéomères telle que l'arc de circonférence, la superposition dépend de la manière dont on place la convexité. Cette manière de voir les choses est connue d'Ibn al-Haytham qui l'utilise pour commenter la deuxième des Définitions alternatives proposées pour la ligne droite. V. [Ibn al-Haytham / Sude, 1974], p. 33, l. 14-26. Il fait aussi le lien entre rectitude et mesure dans sa justification du postulat 1 (*Ibid.*, pp. 85-86).

52 *Fahrang, Commemoration of Khayyâm*

rigoureusement son approche cinématique du postulat des parallèles, il remarque que le procédé même de la mesure suppose l'invariance de la forme et de la grandeur de l'objet géométrique (la mesure) ainsi mis en mouvement. Il ajoute que c'est ce que présupposent également les théorèmes I. 4 et 8 du Livre I des *Éléments*, propositions fondamentales s'il en est, et même la génération du cercle qui, pour lui, justifie la Définition posée par Euclide. Ces cas, ajoute-t-il, sont simples et bien connus, même des débutants. Il cherche à convaincre son lecteur que l'on peut généraliser ces exemples très élémentaires en invoquant ce qui, pour nous, constitue l'invariance de la forme et de la grandeur d'un élément géométrique par translation¹⁶⁶.

Pour en venir à notre troisième et dernier thème, celui des Définitions cinématiques du Livre XI, nous ferons encore un petit détour par les postulats 1 à 3. Certains Modernes, avons-nous dit, ont voulu y reconnaître des assertions existentielles dans le droit fil des injonctions énoncées à ce sujet dans la théorie aristotélicienne de la science démonstrative (*Seconds Analytiques*). Il y a de bonnes raisons d'en douter. D'abord, si telle avait été l'intention d'Euclide, il n'était pas difficile de faire mieux, en les énonçant sous une forme différente, par exemple :

- « 1. ... Il existe une ligne droite (unique) qui joint tout point à tout point.
2. Et pour toute ligne droite limitée, il existe, de part et d'autre, un prolongement (unique) formant avec elle une ligne droite continue.
3. Pour tout point et tout intervalle, il existe un cercle dont le centre est ce point et le rayon (la droite à partir du centre), cet intervalle ».

En y ajoutant un postulat sur l'existence de points, notamment de trois points (resp. quatre) non alignés (resp. non coplanaires), l'exposé euclidien aurait été en bien meilleur accord avec les analyses d'Aristote. Autre avantage de ce même point de vue, le mouvement géométrique était expulsé des principes de la géométrie. Mais on voit bien que cela ne correspond pas du tout à la pratique géométrique, tout particulièrement aux phases de constructions qui interviennent dans les problèmes et les théorèmes, constructions où ces postulats sont mobilisés avec leurs verbes d'action : "joindre", mener", "décrire", "prolonger", "élever" ...

Ces trois postulats suffisent à justifier toutes les constructions utilisées dans les Livres I-IV, VI, X des *Éléments*. En outre, Euclide considérait sans doute que ses postulats pouvaient suffire à valider la construction des figures solides à faces planes, telles que les parallélépipèdes, les prismes, les pyramides et les polyèdres réguliers. Il semble en effet que pour lui les fondements de la géométrie des solides

¹⁶⁶ V. [Jaouiche, 1986], pp. 151-153.

soient fournis par la géométrie plane; d'où l'absence de postulats spécifiquement stéréométriques et des démonstrations logiquement peu satisfaisantes au début du Livre XI¹⁶⁷. Reste qu'il a inclus dans son traité des solides à éléments curvilignes, la sphère, le cône et le cylindre, dont les constructions ou générations ne peuvent être garanties à l'aide de ces trois Demandes.

Il introduit lesdits solides des Définitions rigoureusement parallèles, à partir d'un mouvement géométrique, en l'occurrence la rotation axiale d'une figure plane sur un tour complet :

« 14. Quand le diamètre d'un demi-cercle étant maintenu fixe, le demi-cercle a été porté circulairement jusqu'à ce qu'il revienne de nouveau à la même [position] d'où il avait commencé à être mû, la figure de révolution [ainsi] comprise est une sphère.

18. Quand l'un des côtés autour de l'angle droit d'un triangle rectangle étant maintenu fixe, le triangle a été porté circulairement jusqu'à ce qu'il revienne de nouveau à la même [position] d'où il avait commencé à être mû, la figure de révolution [ainsi] comprise est un cône ...

21. Quand l'un des côtés autour de l'angle droit d'un parallélogramme rectangle étant maintenu fixe, le parallélogramme a été porté circulairement jusqu'à ce qu'il revienne de nouveau à la même [position] d'où il avait commencé à être mû, la figure de révolution [ainsi] comprise est un cylindre ».

C'est bien entendu la "Définition" cinématique de la sphère qui a été l'objet des plus nombreux commentaires. D'ailleurs les scholiastes de l'Antiquité tardive qui annotèrent les manuscrits des *Éléments* considèrent qu'Euclide n'a pas *défini* la sphère; il en a seulement indiqué la *génération*. Ce qui a choqué tel ou tel géomètre, c'est peut-être moins l'introduction du mouvement pour définir certains objets géométriques — cela était nécessaire dans la géométrie ancienne afin d'engendrer certaines courbes complexes et même les coniques —, que de l'avoir fait pour des objets fondamentaux, y compris pour la plus simple et la plus éminente des figures solides d'après la doctrine d'Aristote¹⁶⁸ : la sphère. Khayyâm y voit une faute, d'autant que cela rompt le parallélisme avec le cercle à partir duquel il est facile de concevoir une Définition par propriété, ce que fera d'ailleurs Théodose dans son premier Livre des *Sphériques*.

A sa décharge, on peut dire qu'en ne proposant pas de définitions par propriété pour les sphères, les cônes et les cylindres, en se contentant d'indiquer leurs générations, les Définitions d'Euclide soulignent que ces

¹⁶⁷ Sur la stéréométrie des Anciens et, en particulier sur celle d'Euclide, v. l'introduction de [Euclide / Vitrac, 2001], pp. 13-31.

¹⁶⁸ Cette primauté a certainement une origine esthétique-cosmologique. V. Aristote, *Du ciel*, II, 4, 286 b10-26.

54 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

figures appartiennent à une même famille, celle des solides de révolution. En outre, les *Sphériques*, de par leur sujet, ne prennent en considération ni les cônes, ni les cylindres. Si l'on suggère de remplacer la Définition euclidienne de la sphère par celle de Théodose, comme le veut Khayyâm, il faudra aussi, pour rester cohérent, proposer d'autres Définitions du cône et du cylindre sans faire appel à des considérations cinématiques. Cela est évidemment moins simple que dans le cas de la sphère. Je ne vois pas trop comment faire, sauf à poser, dans le cas du cône par exemple, quelque postulat comme :

« Pour tout cercle donné et tout point donné non situé dans le plan du cercle, il existe une figure solide telle d'une part, tout plan passant par le point et l'un des diamètres du cercle coupe sa surface selon un triangle dont ce point est un sommet, le diamètre, un côté; d'autre part tout plan parallèle au plan du cercle la coupe également selon un cercle. Que cette figure soit appelée cône, le point, son sommet, le cercle, sa base ».

Ce n'est pas du tout la manière qu'ont suivie les anciens géomètres. Au demeurant, cette solution par postulation n'était certainement pas praticable pour Euclide qui, nous l'avons dit, ne voulait pas introduire d'énoncé de ce genre dans sa stéréométrie. Dans cet ordre d'idées, pour parfaire le parallélisme entre cercle et sphère relevé par Khayyâm, il aurait également dû poser quelque chose comme :

« Et il est demandé, avec tout centre et tout intervalle de décrire une sphère ».

Ce dont Euclide s'est bien gardé. L'introduction d'un tel postulat aurait d'ailleurs introduit un nouveau questionnement : comment fait-on pour décrire une sphère ?

Il faut en effet remarquer que chez Euclide, et plus généralement chez les géomètres grecs, il y a une différence frappante d'expression selon qu'il s'agit soit de figures planes — et la même chose vaut pour les solides à faces toutes planes —, soit de sphères, cônes et cylindres. Les premières sont "décrites" (le cercle, le carré) ou "construites" (le triangle, les quadrilatères, ..., les polyèdres réguliers du Livre XIII); les figures de révolution sont dites "conçues" ou "imaginées". La pratique du diagramme géométrique, nécessairement inscrit dans le plan de la feuille de papyrus, de la tablette, ou à même le sol, influence la façon de parler des figures, même quand celles-ci sont conçues comme des idéalités. Elle façonne aussi l'épistémologie "projectionniste" de Proclus. Celui-ci, commentant la Définition de la surface plane (Df. I. 7), en justifie la supériorité sur tout autre espèce. Ce qui le conduit à comparer le raisonnement géométrique à l'écriture sur une tablette et l'imagination à une sorte de miroir plan sur

lequel les idées de la *διάφοια* viennent projeter leurs images¹⁶⁹. Ces dernières seront donc en « deux dimensions ».

Comme il aurait pu le faire dans le cas de la géométrie plane, Euclide pouvait opter pour une version existentielle du postulat concernant les sphères, quelque chose comme :

« Et pour tout point et tout intervalle, il existe une sphère dont ce point est le centre et l'intervalle, le rayon ».

Mais il a privilégié la génération de ladite figure grâce à la révolution d'un demi-cercle. Cela confirme que ses principes, contrairement à ce que beaucoup d'interprètes médiévaux et modernes ont affirmé, ne cherchaient ni à satisfaire les exigences existentielles posées par certains philosophes, ni à éviter le recours au mouvement géométrique. Il subsiste toutefois un réel contraste entre l'approche "constructiviste" qui est la sienne pour la géométrie plane (Définitions par propriété; postulats de construction) et le recours au mouvement qu'il s'autorise dans les Livres stéréométriques.

Khayyâm y voyait une simple facilité pédagogique qui constituait cependant un manquement et une forme d'incohérence logique du point de vue des fondements de la géométrie. Deux éléments échappaient, semble-t-il, au Commentateur persan :

- L'idée que certains solides mathématiques puissent être engendrés par révolution, comme s'ils étaient réalisés au tour, pour reprendre une métaphore déjà faite par Platon¹⁷⁰, était à la fois ancienne — nous l'avons vu à l'œuvre déjà chez Archytas — et bien acceptée, même après les mises en garde des philosophes à l'égard du mouvement. Ni Archimède, ni Apollonius, ni plus tard Sérénus, pourtant postérieur à Théodose, n'ont hésité à utiliser le mouvement circulaire pour engendrer les solides de révolution qu'ils utilisaient.
- Le trait logique le plus saillant de l'entreprise euclidienne est son réductionnisme, tant au niveau des objets pris en compte, très peu nombreux, qu'en ce qui concerne les constructions permises. Le traité d'Euclide est d'ailleurs unique en son genre dans l'ensemble de la géométrie grecque en ce qu'il explicite les postulats de construction. On aboutit à ce que le cercle est la seule figure dont l'existence soit, en un certain sens, postulée. Les constructions des figures à côtés rectilignes, planes ou solides, sont quant à elles réduites au postulat autorisant le tracé de la

¹⁶⁹ V. [Proclus / Friedlein, 1873], p. 120, l. 15—p. 121, l. 7.

¹⁷⁰ V. *Philèbe*, 51c. Socrate explique qu'il y a deux sortes de "belles" lignes, la droite et la circulaire et que les figures planes et solides en proviennent « à l'aide de tours, de règles et d'équerres ». Déjà chez le poète élégiaque Théognis de Mégare (VI^e s. avant notre ère), le *tour*, le cordeau et l'équerre sont des symboles de rigueur. V. [Théognis / Carrière, 1975], p. 102, vers 805-806.

56 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

droite. Enfin, trait crucial pour notre propos, il n'y a pas de postulats stéréométriques. Ce n'est donc pas une facilité pédagogique qui explique l'attitude euclidienne en stéréométrie, mais une ambition réductionniste excessive.

Conclusion

Le refus du mouvement géométrique, de Platon et Aristote jusqu'à Khayyâm, manifeste d'abord la volonté de séparer les mathématiques de la physique, ou, de distinguer, à l'intérieur des mathématiques entendues à cette époque dans un sens très large, des disciplines passablement "abstraites", notamment la géométrie. Celle-ci, dans sa spécificité grecque, fut d'abord un procédé de schématisation mobilisé dans l'*Enquête sur la nature*, tout particulièrement la cosmologie, avant de se constituer comme discipline autonome — probablement vers le milieu du V^e siècle avant notre ère —, comme discours démonstratif articulé à un diagramme.

Dans la compétition qui opposait les Sophistes et les Philosophes pour imposer leurs modèles éducatifs, les mathématiques devinrent un enjeu. Les Platoniciens furent séduits par la rigueur qui s'y déploie et y trouvèrent un modèle pour penser l'existence d'objets idéaux. Simultanément, dans l'échange qui s'établit avec les géomètres, les philosophes accentuèrent le phénomène de "disciplinarisation" et exigèrent que soit précisé le statut des objets géométriques, par contraste avec le monde physique, et la nature cognitive des procédés constructifs utilisés. A partir de là, ceux qui s'intéressaient aux mathématiques ont dû articuler plusieurs exigences, pas nécessairement très faciles à concilier : le caractère idéal reconnu aux objets mathématiques, la rigueur des méthodes mises en œuvre, notamment la démonstration, la capacité de décrire et d'expliquer certains aspects du monde physique.

Cette dernière injonction supposait que le mouvement restât un objet d'étude pour des sciences mathématiques comme l'astronomie et la mécanique. Mais la complexité de certaines questions géométriques — nous avons abondamment commenté les exemples du problème de l'insertion des deux moyennes et celui de la quadrature ou de la rectification du cercle — ont fait que certains usages instrumentaux ou cinématiques ont été maintenus et même développés en géométrie. A partir de l'époque hellénistique, deux niveaux (au moins) sont distingués dans l'étude de la discipline par des géomètres qui témoignent d'un certain pragmatisme, tout particulièrement dans la théorie des courbes.

Dans le même temps, à partir des indications données par Aristote, le phénomène de "mentalisation" des objets mathématiques s'accroît, ce

qui aboutit, non pas à l'extinction des questionnements épistémologiques, mais, au contraire, à leur intensification. L'épistémologie "projectionniste" de Proclus, qui tente d'harmoniser les enseignements fondamentaux du platonisme et la pratique réelle des géomètres en termes d'imagination, représente la contribution épistémologique grecque la plus achevée.

On peut décrire le pragmatisme des mathématiciens d'une manière rétrospective, sans doute anachronique, mais qui a peut-être le mérite de nous faire comprendre que le recours au mouvement en géométrie était à peu près inévitable à partir du moment où certains problèmes qui, pour nous, renvoient à la structure du continu et à l'existence de nombres et de fonctions transcendant(e)s, avaient été posés et n'étaient pas abandonnés. Les exemples repris à Archimède et Pappus nous ont montré que l'introduction du temps et le recours à la combinaison de mouvements pour générer des courbes sont des substituts "physiques" pour pallier l'absence de notions mathématiques fondamentales comme celles de nombres réels de fonctions de la variable numérique réelle, d'équations pour définir des courbes, équations dans lesquelles on pourra éventuellement opérer par substitution de variables.

En rejetant le mouvement à l'extérieur de la géométrie, on faisait de celle-ci une discipline "abstraite" et *statique*, mais qui restait toutefois directement corrélée à la physique. Trois autres notions cardinales de la géométrie grecque, celles de "lieu" (τόπος), de "position" (θέσις) et de "grandeur" (μέγεθος) présentent à peu près le même genre d'ambiguïtés que celle de "mouvement". Les emplois qu'en fait Aristote lui-même témoignent de ce que tous ces termes peuvent être entendus soit de manière "abstraite" ou imaginaire, soit en un sens physique. Pour désolidariser complètement la géométrie de la physique, il faudra également élaborer des notions mathématiques dont les Anciens ne disposaient pas. A celles que nous avons mentionnées pour la thématique du mouvement, il faut ajouter celle d'"espace abstrait", affine ou vectoriel, et celle de « groupes de transformations ».

Ainsi pourrions-nous dire que la superposition des figures, utilisée par les Anciens mais aussi par un "puriste" comme Khayyâm, est un pis-aller pour pallier l'absence de la notion de "déplacement" (ou isométrie positive) : translation, rotation autour d'un point dans le plan, rotation axiale dans l'espace.

Le fait qu'il y ait là un problème d'invariant (métrique) a été perçu pour la première fois, à ma connaissance, chez Thâbit ibn Qurra. Dans leurs nombreux travaux sur la théorie des coniques et des conoïdes, les géomètres arabes ont, non seulement augmenté le nombre des résultats, mais aussi contribué au rapprochement entre ce que les Anciens avaient distingué en termes de lieux plans et de lieux solides. L'invention, puis le

58 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

développement, de l'algèbre fut ici décisif et l'on connaît l'éminente contribution que représente l'*Algèbre* de Khayyâm en ce domaine.

Sans que cela ne diminue en rien les mérites des savants d'expression arabe, reste cependant que la connaissance des sources grecques a pesé dans l'orientation des développements qu'ils ont apportés à la géométrie. Que se serait-il passé et quelle aurait été la position de Khayyâm sur le mouvement géométrique si le traité des *Spirales* d'Archimède avait été transmis et traduit au IX^e siècle ?

Indications bibliographiques

1. Éditions et traductions de textes anciens ou médiévaux

Apollonius de Pergè

Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentaris antiquis. Ed. J. L. Heiberg. Leipzig, Teubner, 1891-1893.

Les Coniques. Trad. franç. P. ver Eecke. Bruges 1923.
Réimp. Paris, Blanchard 1963.

Autolykos de Pitane

La sphère en mouvement. Levers et couchers héliaques.
Edition et traduction G. Aujac. Paris, Les Belles-Lettres, 1979.

Muhammad, al-Hasan et Ahmad Banû Mûsâ

Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques.
Edition et traduction française R. Rashed in *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. I, Fondateurs et commentateurs.
Londres, Al-Furqân, Islamic Heritage Foundation, 1996, pp. 1-137.

Dioclès

On Burning Mirrors. The Arabic Translation of the Lost Greek Original.
Edited with English Translation and Commentary by G. J. Toomer.
Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1976.

Euclide

Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, Teubner :
I. *Elementa* i-iv (1969); II. *El.* v-ix (1970); III. *El.* x (1972); IV. *El.* xi-xiii (1973);
V, 1. *El.* xiv-xv, *Scholia in lib.* i-v (1977); V, 2. *Scholia in lib.* vi-xiii (1977).

Les Eléments, Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences.
Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Introduction générale par Maurice Caveing (Vol. 1, pp. 13-148). Volume 1 (Livres I à IV), 1990; Volume 2 (Livres V à IX), 1994; Volume 3 (Livre X), 1998; Volume 4 (Livres XI à XIII), 2001.

Eutocius d'Ascalon

Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Ed. J. L. Heiberg. Leipzig, Teubner, 1893. Volume II, pp. 168—361.

Archimède. Tome IV. Commentaires d'Eutocius et fragments. Texte établi et traduit par. C. Mugler. Paris, Les Belles Lettres, 1972.

Héron d'Alexandrie

Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, ed. W. Schmidt, Leipzig, Teubner : IV. : *Definitiones, Geometrica* (1912, J.L. Heiberg).

Ibn al-Haytham

Sharh musâdarât Uqlîdis. Édition partielle, trad. angl. et comm. par B. H. Sude dans *Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's Elements* : Books I-VI. Princeton University, Ph. D, 1974.

Jamblique

Iamblichi in Nicomachi arithmetica Introductionem Liber. Ed. H. Pistelli. Leipzig, Teubner, 1894.

Jean Philopon

In Aristotelis Physicorum libros tres priores commentaria, ed. Vitelli. *Commentaria in Aristotelem Græca*, Vol. XVI., Berlin, G. Reimer, 1887.

an-Nayrîzî

Abû I-'Abbâs al-Fadl ibn Hâtim an-Nayrîzî, *Sharh kitâb Uqlîdis fi I-Usûl*. Édité par R. O. Besthorn , J. L. Heiberg, puis G. Junge, J. Raeder et W. Thomson (Texte arabe et trad. latine) : *Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschdschaschii cum Commentariis al' Nayrizii*. Hauniae, Lib. Gyldendaliana : I, 1 et 2 (= L. I), 1893-1897; II, 1 et 2 (= L. II et III), 1900-1905; III, 1, 2 et 3 (=L. IV, V, VI), 1910-1932).

Traduction latine par Gérard de Crémone.

Éditée par M. Curtze, *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii* (in *Euclidis Opera omnia*, ed. J.L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, Teubner, IX. *Supplementum*, 1899).

Nouvelle édition en cours : Tummers, P. M. J. E., *Anaritus' Commentary on Euclid*. The Latin translation I-IV. *Artistarium Supplementa IX*. Nijmegen, Ingenium Publishers, 1994.

Nicomaque de Gérase

Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticae Libri II. Ed. R. Hoche. Leipzig, Teubner, 1866.

Omar al-Khayyâm

L'algèbre d'Omar AlKhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits. Paris, B. Duprat, 1851.

60 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

'Umar al-Khayyâm, *Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb Uqlîdis*.

Édition du texte arabe avec trad. franç. par B. Vahabzadeh dans
Rashed R. & Vahabzadeh, B., *Al-Khayyâm mathématicien*, Paris, Blanchard, 1999.

Trad. franç. dans Djebbar, A., Épître sur l'explication des prémisses problématiques
du Livre d'Euclide. *Fahrang*, Vol. 14, N°39-40, Winter 2002, pp. 79-136.

Pappus d'Alexandrie

Pappi Alexandrini *Collectionis*. Ed. F. Hultsch. Berlin, Weidman, 1876.

La Collection mathématique. Trad. franç. P. Ver Eecke. 2 vol.
Bruges, Desclée de Brouwer, réimp. Paris, A. Blanchard, 1982.

Proclus de Lycie

Procli Diadochi, *In primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*.

Ed. G. Friedlein. Leipzig, Teubner, 1873

Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide*.

Traduction par P. Ver Eecke. Bruges, Desclée de Brouwer, 1948.

Réimp. Paris, A. Blanchard.

Ptolémée d'Alexandrie

Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. Vol. 1, *Syntaxis mathematica*, L. I-VI.

Ed. J. L. Heiberg, Leipzig, Teubner, 1898.

Théognis de Mégare

Poèmes Élégiques. Texte établi, traduit et commenté par J. Carrière.

Paris, Les Belles Lettres, 1975.

Théon de Smyrne

Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.

Ed. E. Hiller. Leipzig, Teubner, 1878.

2. Études

Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry*. Trad. angl. H. S. Carslaw, 1912.

Réimpr. New York, Dover Publications, 1955.

Bowen, A. C., & Goldstein, B., A new View on Early Greek Astronomy.

Isis 74 , 1983, pp. 330-340.

Cleary, J., J., *Aristotle & Mathematics : Aporetic Method in Cosmology & Metaphysics*. Leiden, Brill, 1995.

Cleary, J. J., Proclus' Philosophy of Mathematics, in

Bechtle G., O'Meara, D. J. (eds), *La philosophie des mathématiques de l'Antiquité tardive*. Éditions Universitaires de Fribourg Suisse, 2000, pp. 85-101.

Crubellier, M. et Pellegrin, P., *Aristote, le philosophe et les savoirs*. Paris, Éditions du Seuil, 2002.

Détienne, M., En Grèce archaïque : Géométrie, Politique et Société. *Annales E. S. C.*, 1965, pp. 425-441.

Djebbar, A., Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid. In *Vestigia Mathematica*. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard. M. Folferts & J.P. Hogendijk (eds). Amsterdam-Atlanta, Rodopi, 1993, pp. 79-91.

Djebbar, A., Quelques exemples de scholies dans la tradition arabe des *Éléments* d'Euclide. *Revue d'histoire des sciences*, Tome 56-2, 2003, pp. 293-321.

Fauvel, J., *Topics in the History of mathematics*, Unit 4 : « The Greek Study of Curves », The Open University Press, 1987.

Fried, M. N. & Unguru, S., *Apollonius of Perga's Conica*. Text, Context, Subtext. Leiden, Brill, 2001.

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1921. Réed. New York, Dover Pub., 2 vol., 1981.

Hogendijk, J., Traces of the Lost *Geometrical Elements* of Menelaus in two Texts of al-Sijzi. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, XIII, 1999-2000, pp. 129-164.

Houzel, C., Histoire de la théorie des parallèles dans Rashed, R. (ed.), *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*. Hommage à Jules Vuillemin. Paris, Editions du CNRS, 1991, pp. 163-179.

Jaouiche, K., *La théorie des parallèles en Pays d'Islam*. Paris, Vrin, 1986.

Jolivet, J., art. « Classifications des sciences » dans R. Rashed (dir.), *Histoire des sciences arabes*. Paris, Éditions du Seuil, 1997, vol. 3, pp. 255-270.

Knorr, W. R., *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1986.

Knorr, W. R., *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1989.

Lear, J., Aristotle's philosophy of mathematics. *Philosophical Review* 91, 1982, pp. 161-192.

Lévêque, P. & Vidal-Naquet, P., *Clisthène l'Athénien*. Paris, Les Belles Lettres, 1964.

62 *Fahrang*, Commemoration of Khayyâm

Mc Kirahan, Jr., R. D., *Principles and Proofs, Aristotle's Theory of Demonstrative Science*. Princeton University Press, 1992.

Mueller, I., Aristotle on Geometrical Objects.
Archiv für Geschichte der Philosophie, 52, 1970, pp. 156-171.

Mueller, I., *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge (Mass.) and London, M. I. T. Press., 1981.

Mueller, I., Geometry and Scepticism in Barnes, J. ; Brunschwig, J. ; Burnyeat, M. et Schofield, M. (eds), *Science and Speculation ; Studies in Hellenistic theory and practice*. Cambridge University Press, 1982, pp. 69-95.

Mueller, I., Mathematics and Philosophy in Proclus' commentary on Book I of Euclid's *Elements*. in Pépin, J. et Saffrey, H. D. (eds.), *Proclus, lecteur et interprète des Anciens*. Paris, Éditions du CNRS., 1987, pp. 305-318.

Murdoch, J., Superposition, Congruence and Continuity in the Middle Ages in *L'aventure de la science*. Mélanges Alexandre Koyré. Paris, Hermann, 1964. Vol. I, pp. 416-441.

O'Meara, D., *Pythagoras revived : Mathematics and Philosophy in Late Antiquity*. Oxford, Clarendon Press, 1989.

Pont, J. C. *L'aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne : Précurseurs et attardés*. Berne-Frankfurt-am Main - New York, Peter Lang, 1986.

Rosenfeld, B. A., Youschkevitch, A. P., art. « Géométrie » dans R. Rashed (dir.), *Histoire des sciences arabes*. Paris, Éditions du Seuil, 1997, vol. 2, pp. 121-162.

Vernant, J. P., « Structure géométrique et notions politiques dans la cosmologie d'Anaximandre » et « Géométrie et astronomie sphérique dans la première cosmologie grecque », repris dans : *Mythe et pensée chez les Grecs*. 1965. Réimp. Paris, Maspero, 1978, T. I, respectivement pp. 185-206 et pp. 171-184.

*