



## Géométrie, points entiers et courbes entières

Pascal Autissier

### ► To cite this version:

Pascal Autissier. Géométrie, points entiers et courbes entières. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2009, 42 (2), pp.221-239. <hal-00174050>

**HAL Id: hal-00174050**

**<https://hal.science/hal-00174050v1>**

Submitted on 21 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Géométrie, points entiers et courbes entières

Pascal Autissier

21 septembre 2007

**Abstract :** Let  $X$  be a projective variety over a number field  $K$  (resp. over  $\mathbb{C}$ ). Let  $H$  be the sum of “sufficiently many positive divisors” on  $X$ . We show that any set of quasi-integral points (resp. any integral curve) in  $X - H$  is not Zariski dense.

*2000 Mathematics Subject Classification :* 14G25, 11J97, 11G35.

## 1 Introduction

Soient  $K$  un corps de nombres et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ . On note  $O_{K;S}$  l’anneau des  $S$ -entiers de  $K$ . On s’intéresse dans cet article aux solutions dans  $O_{K;S}^r$  de systèmes d’équations du type

$$\forall i \in \{1; \dots; n\} \quad F_i(x_1; \dots; x_r) = 0 \quad , \quad (*)$$

où les  $F_i$  sont des polynômes à  $r$  variables et à coefficients dans  $O_{K;S}$ . Pour formaliser cette étude, on utilise le langage de la géométrie algébrique :

Désignons par  $Y$  la “variété algébrique” sur  $K$  définie par  $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$ . Tout ensemble de solutions de  $(*)$  dans  $O_{K;S}^r$  définit alors un ensemble (de points)  $S$ -entier sur  $Y$ .

Le problème est de donner des conditions géométriques suffisantes sur  $Y$  pour que tout ensemble  $S$ -entier soit non Zariski-dense dans  $Y$ .

Dans la suite, on se donne  $Y$  sous la forme  $Y = X - D$ , où  $X$  est une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$  et  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ . L’esprit de la conjecture de Lang et Vojta (cf conjecture 4.2 de [11] p. 223) est qu’une telle condition suffisante s’exprime en termes de “positivité” de  $D$  :

**Conjecture (Lang, Vojta) :** Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $K$  de diviseur canonique  $\mathcal{K}_X$ . Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ , à croisements normaux. Posons  $Y = X - D$ . On suppose  $\mathcal{K}_X + D$  gros (par exemple ample) sur  $X$ . Alors tout ensemble  $S$ -entier sur  $Y$  est non Zariski-dense dans  $Y$ .

Les théorèmes de Siegel et de Faltings [7] montrent cette conjecture lorsque  $X$  est une courbe. Plus généralement, cet énoncé est connu de Faltings [8] lorsque  $X$  est une sous-variété de variété abélienne. Notons cependant que la conjecture est encore largement ouverte : le

cas où  $X = \mathbb{P}_K^2$  n'est par exemple pas connu.

Dans cet article, on démontre des cas particuliers de cette conjecture, lorsque  $D$  a “suffisamment” de composantes irréductibles. Plus précisément, on prouve le résultat suivant (cf section 2 pour les définitions) :

**Théorème 1.1 :** *Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1; \dots; D_{d\delta}$  des diviseurs effectifs presque amples sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux (avec  $\delta \geq 2$ ). On suppose que toute intersection de  $\delta + 1$  quelconques d'entre eux est vide. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_{d\delta}$ . Alors  $Y$  est arithmétiquement quasi-hyperbolique. En particulier, tout ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K)$   $S$ -entier sur  $Y$  est non Zariski-dense dans  $Y$ .*

Cet énoncé améliore un résultat récent de Levin (cf théorème 10.4A de [13]). En fait, Levin a besoin de  $2 \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor d + 1$  diviseurs au lieu de  $d\delta$ .

On démontre en outre l'énoncé suivant (on prouve en fait un résultat plus général) :

**Théorème 1.2 :** *Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs amples sur  $X$  qui se coupent proprement (avec  $r \geq 2d$ ). Posons  $L = \sum_{i=1}^r D_i$  et  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . On suppose que le diviseur  $L - 2dD_i$  est nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Alors  $Y$  est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

L'hypothèse sur les  $L - 2dD_i$  est vérifiée lorsque les  $D_i$  vivent dans un cône “suffisamment étroit” du groupe de Néron-Severi de  $X$ . L'intérêt de ce résultat réside dans le nombre (potentiellement linéaire en  $d$ ) de diviseurs à considérer.

Remarquons que les théorèmes 1.1 et 1.2 s'inscrivent bien dans le cadre de la conjecture de Lang et Vojta, puisque si  $X$  est lisse sur  $K$  de diviseur canonique  $\mathcal{K}_X$  et les  $D_i$  sont amples sur  $X$ , alors  $\mathcal{K}_X + D_1 + \dots + D_r$  est ample sur  $X$  dès que  $r \geq d + 2$  (cf exemple 1.5.35 de [12] p. 87).

Les démonstrations reposent sur une extension (théorème 3.3) de travaux de Corvaja-Zannier [5] et de Levin [13], qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points  $S$ -entiers, et sur un bon choix (théorème 4.4) de multiplicités associées aux diviseurs  $D_i$ .

L'ingrédient arithmétique principal est la version de Vojta [18] du théorème du sous-espace de Schmidt [15] et Schlickewei [14] (c'est un énoncé d'approximation diophantienne qui généralise le théorème de Roth).

Par ailleurs, Vojta [17] a développé un “dictionnaire” entre la géométrie diophantienne et la théorie de Nevanlinna : l'étude des points  $S$ -entiers sur les variétés sur  $K$  est mise en analogie avec l'étude des courbes entières sur les variétés complexes.

Pour étayer ce dictionnaire, on montre aussi les énoncés qui “correspondent” aux théorèmes 1.1 et 1.2 :

**Théorème 1.3 :** Soit  $X$  une variété complexe projective de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1; \dots; D_{d\delta}$  des diviseurs effectifs presque amples sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux (avec  $\delta \geq 2$ ). On suppose que toute intersection de  $\delta + 1$  quelconques d'entre eux est vide. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_{d\delta}$ . Alors  $Y$  est Brody quasi-hyperbolique. En particulier, toute courbe entière  $f : \mathbb{C} \rightarrow Y(\mathbb{C})$  est d'image non Zariski-dense dans  $Y$ .

**Théorème 1.4 :** Soit  $X$  une variété complexe projective de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs amples sur  $X$  qui se coupent proprement (avec  $r \geq 2d$ ). Posons  $L = \sum_{i=1}^r D_i$  et  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . On suppose que le diviseur  $L - 2dD_i$  est nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Alors  $Y$  est Brody quasi-hyperbolique.

Je remercie Antoine Chambert-Loir et Christophe Mourougane pour de fructueuses discussions.

## 2 Définitions et énoncés

### 2.1 Géométrie

Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle.

**Conventions :** On appelle variété sur  $K$  tout schéma quasi-projectif et géométriquement intègre sur  $K$ . Le mot “diviseur” sous-entend “diviseur de Cartier”.

Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Lorsque  $L$  est un diviseur sur  $X$  tel que  $h^0(X; L) \geq 1$ , on désigne par  $\mathbf{B}_L$  le lieu de base de  $\Gamma(X; L)$  et par  $\Phi_L : X - \mathbf{B}_L \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X; L))$  le morphisme défini par  $\Gamma(X; L)$ . Pour tout diviseur effectif  $D$  sur  $X$ , on note  $1_D$  la section globale de  $\mathcal{O}_X(D)$  qu'il définit.

**Définition :** Un diviseur  $L$  sur  $X$  est dit **libre** lorsque  $\mathbf{B}_L$  est vide.

**Définition :** Un diviseur  $L$  sur  $X$  est dit **gros** lorsque  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^d} h^0(X; nL) > 0$ .

**Définition :** Soit  $L$  un diviseur gros sur  $X$ . On dit que  $L$  est **presque ample** lorsqu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $nL$  soit libre.

**Définition :** Un  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L$  sur  $X$  est dit **nef** lorsque pour tout 1-cycle effectif  $C$  sur  $X$ , on a  $\langle L, C \rangle \geq 0$  (où  $\langle L, C \rangle$  désigne le nombre d'intersection).

**Définition :** Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux diviseurs effectifs sur  $X$ . On dit que  $D_1$  et  $D_2$  **se coupent proprement** lorsque  $\mathcal{O}_X(-D_1 - D_2) = \mathcal{O}_X(-D_1) \cap \mathcal{O}_X(-D_2)$ .

**Définition :** Plus généralement, soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs sur  $X$ . On dit que  $D_1; \dots; D_r$  **se coupent proprement** lorsque pour toute partie  $I$  non vide de  $\{1; \dots; r\}$ ,

la section globale  $(1_{D_i})_{i \in I}$  de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(D_i)$  est régulière (autrement dit, pour tout  $x \in \bigcap_{i \in I} D_i$ , en notant  $\varphi_i$  une équation locale de  $D_i$  en  $x$ , les  $(\varphi_i)_{i \in I}$  forment une suite régulière de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X;x}$ ).

Soit  $L$  un diviseur sur  $X$  tel que  $h^0(X; L) \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  (avec  $r \geq 1$ ). Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties  $I$  non vides de  $\{1; \dots; r\}$  telles que  $\bigcap_{i \in I} D_i$  soit non vide. Pour  $I \in \mathcal{P}$ ,  $\underline{a} = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit le sous-espace vectoriel  $V_{I;\underline{a};k}$  de  $\Gamma(X; L)$  par

$$V_{I;\underline{a};k} = \sum_{\underline{b}} \Gamma\left(X; L - \sum_{i \in I} b_i D_i\right) \text{ où la somme porte sur les } \underline{b} \in \mathbb{N}^I \text{ tels que } \sum_{i \in I} a_i b_i \geq k .$$

$$\textbf{Définition :} \text{ On pose } \nu(L; D_1; \dots; D_r) = \inf_{I \in \mathcal{P}} \inf_{\underline{a} \in \mathbb{N}^I - \{0\}} \frac{\sum_{k \geq 1} \dim V_{I;\underline{a};k}}{h^0(X; L) \sum_{i \in I} a_i} .$$

On démontre à la section 4 le résultat suivant :

**Théorème 2.1 :** *On suppose  $d \geq 2$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs presque amples sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux; supposons que toute intersection de  $\delta + 1$  quelconques d'entre eux est vide (avec  $2 \leq \delta \leq r$ ). Il existe alors  $(m_1; \dots; m_r) \in \mathbb{N}^{*r}$  tel qu'en posant  $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$ , on ait  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; m_1 D_1; \dots; m_r D_r) > \frac{r}{d\delta}$ .*

Posons  $\lambda_d = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{d+1}\right] \frac{d}{d+1}$ . On prouve à la section 5.2 l'énoncé suivant :

**Théorème 2.2 :** *Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls et nef sur  $X$  qui se coupent proprement. On suppose que  $L = \sum_{i=1}^r D_i$  est ample. Soit  $\theta > 1$  un réel tel que le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L - d\theta D_i$  soit nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . On a alors la minoration*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \lambda_d \theta \quad .$$

**Remarque :** On a  $\lambda_d > \frac{1}{2}$  pour tout  $d \geq 2$ . En outre,  $\lambda_d$  converge vers  $1 - e^{-1}$  lorsque  $d$  tend vers  $+\infty$ .

## 2.2 Hyperbolicité

Lorsque  $K$  est un corps de nombres et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ , on note  $\mathcal{O}_{K;S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ , i.e. l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $|x|_v \leq 1$  pour toute place finie  $v \notin S$ .

Soit  $K$  un corps de nombres.

**Définition :** Soient  $Y$  une variété sur  $K$ ,  $K'$  une extension finie de  $K$  et  $S$  un ensemble fini de places de  $K'$ . Un ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  est dit  **$S$ -entier** sur  $Y$  lorsqu'il existe un  $O_{K',S}$ -schéma intègre et quasi-projectif  $\mathcal{Y}$  de fibre générique  $Y_{K'}$  tel que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K',S})$ .

**Définition :** Soient  $Y$  une variété sur  $K$  et  $K'$  une extension finie de  $K$ . Un ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  est dit **quasi-entier** sur  $Y$  lorsqu'il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $K'$  tel que  $\mathcal{E}$  soit  $S$ -entier sur  $Y$ .

**Définition :** Soit  $Y$  une variété sur  $K$ . On dit que  $Y$  est **arithmétiquement quasi-hyperbolique** lorsqu'il existe un fermé  $Z \neq Y$  tel que pour toute extension finie  $K'$  de  $K$  et tout ensemble quasi-entier  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  sur  $Y$ , l'ensemble  $\mathcal{E} - Z(K')$  soit fini.

**Définition :** Soit  $Y$  une variété complexe. Une **courbe entière** sur  $Y$  est une application holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow Y(\mathbb{C})$  non constante.

**Définition :** Soit  $Y$  une variété complexe. On dit que  $Y$  est **Brody quasi-hyperbolique** lorsqu'il existe un fermé  $Z \neq Y$  tel que pour toute courbe entière  $f$  sur  $Y$ , on ait  $f(\mathbb{C}) \subset Z(\mathbb{C})$ .

L'intérêt de la définition de  $\nu$  réside dans les critères suivants :

**Théorème (3.3) :** *Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . Soit  $n \geq 1$  un entier. On suppose que le diviseur  $L = n \sum_{i=1}^r D_i$  est libre et gros sur  $X$  et que  $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > n$ . Alors  $Y$  est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

**Théorème (3.5) :** *Soit  $X$  une variété complexe projective de dimension  $d \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . Soit  $n \geq 1$  un entier. On suppose que le diviseur  $L = n \sum_{i=1}^r D_i$  est libre et gros sur  $X$  et que  $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > n$ . Alors  $Y$  est Brody quasi-hyperbolique.*

On en déduit le théorème 1.1 —respectivement 1.3— en appliquant le théorème 2.1 (avec  $r = d\delta$ ) puis le théorème 3.3 —respectivement 3.5—.

On en déduit de même les théorèmes 1.2 et 1.4 en appliquant le théorème 2.2.

### 3 Démonstration des critères

#### 3.1 Rappels

Soit  $X$  une variété complexe projective. Soit  $L$  un faisceau inversible sur  $X$ . On munit  $L$  d'une métrique (continue)  $\|\cdot\|$  et on pose  $\hat{L} = (L; \|\cdot\|)$ .

Soit  $f$  une courbe entière sur  $X$ . On définit la **fonction caractéristique**  $T_{\hat{L};f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  relativement à  $\hat{L}$  de la manière suivante :

On choisit une section rationnelle  $s$  de  $L$  définie et non nulle en  $f(0)$ . Pour tout réel  $r \geq 0$ , on pose

$$T_{\hat{L};f}(r) = \sum_{|z| \leq r} \mu_z(f^*s) \ln \frac{r}{|z|} - \int_0^{2\pi} \ln \|s(f(re^{i\theta}))\| \frac{d\theta}{2\pi} + \ln \|s(f(0))\| \quad ,$$

où  $\mu_z(f^*s)$  désigne l'ordre de  $f^*s$  en  $z \in \mathbb{C}$ . Cela ne dépend pas du choix de  $s$ .

Soient  $K$  un corps de nombres et  $X'$  une variété projective sur  $K$ . Soit  $L'$  un faisceau inversible sur  $X'$ . On munit  $L'$  d'une métrique adélique  $(\|\cdot\|_v)_v$  et on pose  $\hat{L}' = (L'; (\|\cdot\|_v)_v)$  (pour des précisions sur les métriques adéliques, on pourra consulter le paragraphe 1.2 de [21]).

Soient  $K'$  une extension finie de  $K$  et  $P \in X'(K')$ . On définit la **hauteur** (normalisée)  $h_{\hat{L}'}(P)$  de  $P$  relativement à  $\hat{L}'$  de la façon suivante :

On choisit une section rationnelle  $s'$  de  $L'$  définie et non nulle en  $P$ . On pose

$$h_{\hat{L}'}(P) = -\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v \ln \|s'(P)\|_v \quad ,$$

où  $v$  parcourt l'ensemble des places de  $K'$ . Ce réel ne dépend pas du choix de  $s'$ .

### 3.2 Cas arithmétique

Commençons par un résultat facile d'algèbre linéaire :

**Lemme 3.1 :** *Soient  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$  une suite décroissante de parties de  $V$  telle que  $\mathcal{F}_k = \{0\}$  pour tout  $k$  assez grand. Il existe alors une base  $\mathcal{B}$  de  $V$  adaptée à la suite  $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ , i.e.  $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_k$  est une base de  $\text{Vect}(\mathcal{F}_k)$  pour tout  $k \geq 1$ .*

*Démonstration :* Soit  $m \geq 1$  un entier tel que  $\mathcal{F}_k = \{0\}$ . On pose  $\mathcal{B}_m = \emptyset$ . On construit par récurrence une suite  $(\mathcal{B}_m; \dots; \mathcal{B}_1)$  de parties de  $V$  de la manière suivante :

Pour  $k \in \{1; \dots; m-1\}$ , on complète la partie libre  $\mathcal{B}_{k+1}$  en une base  $\mathcal{B}_k$  de  $\text{Vect}(\mathcal{F}_k)$  contenue dans  $\mathcal{F}_k$ .

Pour finir, on complète  $\mathcal{B}_1$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $V$ .  $\square$

Soient  $K$  un corps de nombres et  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . On va utiliser la version suivante du théorème du sous-espace de Schmidt, Schlickewei et Vojta :

**Proposition 3.2 :** *Soit  $L \in \text{Pic}(X)$  libre et gros. Notons  $q = h^0(X; L)$ . On munit  $L$  d'une métrique adélique  $(\|\cdot\|_v)_v$ . Soient  $s_1; \dots; s_N$  des sections non nulles engendrant  $\Gamma(X; L)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors un fermé  $Z \neq X$  tel que pour toute extension finie  $K'$  de  $K$  et tout ensemble fini  $S$  de places de  $K'$ , l'ensemble des points  $P \in (X - Z)(K')$  vérifiant*

$$\sum_{v \in S} \max_{j \in \mathcal{L}} \sum_{j \in J} \ln \|s_j(P)\|_v^{-1} \geq (q + q\varepsilon)[K' : \mathbb{Q}] h_{\hat{L}}(P) \quad (1)$$

est fini, où  $\mathcal{L}$  désigne l'ensemble des parties  $J$  de  $\{1; \dots; n\}$  telles que  $(s_j)_{j \in J}$  soit une base de  $\Gamma(X; L)$ .

*Démonstration :* En posant  $V = \Gamma(X; L)$ , on a un morphisme  $\Phi_L : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  génériquement fini. Il existe donc un fermé  $Z_1 \neq X$  tel que  $\Phi_{L|X-Z_1}$  soit à fibres finies. On applique alors la version de Vojta (cf théorème 0.3 et reformulation 3.4 de [18]) du théorème du sous-espace :

Il existe une réunion finie  $H$  de  $K$ -hyperplans de  $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_K^{q-1}$  telle que pour toute extension finie  $K'$  de  $K$  et tout ensemble fini  $S$  de places de  $K'$ , l'ensemble des points  $P \in (X - Z_1 \cup \Phi_L^{-1}(H))(K')$  vérifiant (1) est fini.  $\square$

**Remarque :** Vojta a en fait montré que l'on peut trouver un  $Z$  indépendant de  $\varepsilon$ , mais on n'en aura pas besoin dans la suite.

On montre ci-dessous une extension d'un résultat de Levin (cf théorème 8.3A de [13]), lui-même inspiré de travaux de Corvaja et Zannier (cf théorème principal de [5] p. 707-708) :

**Théorème 3.3 :** Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . Soit  $m \geq 1$  un entier. On suppose que le diviseur  $L = m \sum_{i=1}^r D_i$  est libre et gros sur  $X$  et que  $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > m$ . Alors  $Y$  est arithmétiquement quasi-hyperbolique.

*Démonstration :* On procède en deux étapes : dans la première, on construit un fermé  $Z \neq X$  candidat à contenir “presque tous les points entiers” ; dans la seconde, on prouve que  $Y$  est arithmétiquement quasi-hyperbolique.

*Étape 1 :* On pose  $\varepsilon = \frac{1}{4m}(\nu(L; D_1; \dots; D_r) - m)$  et  $q = h^0(X; L)$ , on choisit un entier  $c \geq 1$  tel que  $h^0(X; L - cD_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , et on fixe un entier  $b \geq \frac{cr}{m\varepsilon}$ . Choisissons aussi une base  $\mathcal{B}_0$  de  $\Gamma(X; L)$ .

Désignons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties  $I$  non vides de  $\{1; \dots; r\}$  telles que  $\bigcap_{i \in I} D_i$  soit non vide. Soit  $I \in \mathcal{P}$ . On note  $\Delta_I$  l'ensemble des  $\underline{a} = (a_i)_i \in \mathbb{N}^I$  tels que  $\sum_{i \in I} a_i = b$ . Soit  $\underline{a} \in \Delta_I$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\mathcal{F}_k = \bigcup_{\underline{b}} \Gamma\left(X; L - \sum_{i \in I} b_i D_i\right)$  où la réunion porte sur les  $\underline{b} \in \mathbb{N}^I$  tels que  $\sum_{i \in I} a_i b_i \geq k$ , et on note  $V_{I; \underline{a}; k} = \text{Vect}(\mathcal{F}_k)$ . Le lemme 3.1 fournit une base  $\mathcal{B}_{I; \underline{a}}$  de  $\Gamma(X; L)$  adaptée à la suite  $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ .

On munit chaque faisceau  $\mathcal{O}_X(D_i)$  d'une métrique adélique. Appliquons le théorème du sous-espace (proposition 3.2) avec  $\{s_1; \dots; s_N\} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{I; \underline{a}} \mathcal{B}_{I; \underline{a}}$  (remarquons que cette réunion est finie puisque  $\mathcal{P}$  et les  $\Delta_I$  le sont) :

Il existe un fermé  $Z \neq X$  tel que pour toute extension finie  $K'$  de  $K$  et tout ensemble fini



$S$  de places de  $K'$ , l'ensemble des points  $P \in (X - Z)(K')$  vérifiant l'inégalité (1) est fini.

*Étape 2 :* Soient  $K'$  une extension finie de  $K$  et  $S$  un ensemble fini de places de  $K'$  contenant les places archimédiennes. Soit  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  un ensemble  $S$ -entier sur  $Y$ . Raisonnons par l'absurde en supposant  $\mathcal{E} - Z(K')$  infini. On choisit une suite injective  $(P_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{E} - Z(K')$ .

Quitte à extraire, on peut supposer (par compacité) que pour tout  $v \in S$ , la suite  $(P_{nv})_{n \geq 0}$  converge dans  $X(K'_v)$  vers un  $y_v \in X(K'_v)$ .

Pour tout  $v \in S$ , on note  $I_v$  l'ensemble des  $i \in \{1; \dots; r\}$  tels que  $y_v \in D_i$ . Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que pour tout  $v \in S$  tel que  $I_v$  soit non vide et tout  $i \in I_v$ , la suite  $\left( \frac{\ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v}{\sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v} \right)_{n \geq 0}$  converge vers un  $t_{vi} \in [0; 1]$ . Remarquons que l'on a

$$\sum_{i \in I_v} t_{vi} = 1.$$

Fait : Soit  $v \in S$ . Il existe une base  $(s_{1v}; \dots; s_{qv})$  de  $\Gamma(X; L)$  contenue dans  $\{s_1; \dots; s_N\}$  telle que l'on ait la minoration suivante pour tout  $n \geq 0$  :

$$- \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + 2q\varepsilon) \ln \|1_L(P_n)\|_v - O(1) \quad , \quad (2)$$

où le  $O(1)$  est indépendant de  $n$ .

Prouvons ce fait. Si  $I_v$  est vide, on prend  $\{s_{1v}; \dots; s_{qv}\} = \mathcal{B}_0$  et on obtient la minoration (2) en remarquant que  $\ln \|1_L(P_n)\|_v = O(1)$  (puisque  $y_v \notin L$ ).

On suppose maintenant  $I_v$  non vide. On a donc  $I_v \in \mathcal{P}$ . Choisissons un  $\underline{a}_v = (a_{vi})_i \in \Delta_{I_v}$  tel que  $|bt_{vi} - a_{vi}| \leq 1$  pour tout  $i \in I_v$ . On prend alors  $\{s_{1v}; \dots; s_{qv}\} = \mathcal{B}_{I_v; \underline{a}_v}$ . Vérifions que ce choix convient.

Soit  $s \in \Gamma(X; L) - \{0\}$ . Pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , notons  $\mu_i(s)$  le plus grand entier  $\mu$  tel que le diviseur  $\text{div}(s) - \mu D_i$  soit effectif. Puisque les diviseurs  $D_i$  se coupent proprement deux à deux, le diviseur  $\text{div}(s) - \sum_{i \in I_v} \mu_i(s) D_i$  est encore effectif. Ceci implique

$$- \ln \|s(P_n)\|_v \geq - \sum_{i \in I_v} \mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v - O(1) \quad .$$

En remarquant que  $t_{vi} > \frac{a_{vi}}{b} - \frac{2m\varepsilon}{cr}$  et que  $\mu_i(s) \leq c$  pour tout  $i \in I_v$ , on a, par définition des  $t_{vi}$  :

$$- \mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v \geq - \left( \frac{a_{vi}}{b} \mu_i(s) - \frac{2m\varepsilon}{r} \right) \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v$$

pour tout  $n$  assez grand et tout  $i \in I_v$ .

On en déduit l'inégalité (pour tout  $n \geq 0$ )

$$- \ln \|s(P_n)\|_v \geq - \left( \frac{1}{b} \sum_{i \in I_v} a_{vi} \mu_i(s) - 2m\varepsilon \right) \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v - O(1) \quad .$$

On écrit cette inégalité pour  $s = s_{kv}$ , puis on somme sur  $k$ . En observant que pour  $i \in I_v$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_v} a_{vi} \mu_i(s_{kv}) &= \sum_{\mu \geq 1} \# \left\{ k \in \{1; \dots; q\} \mid \sum_{i \in I_v} a_{vi} \mu_i(s_{kv}) \geq \mu \right\} \\ &= \sum_{\mu \geq 1} \dim V_{I_v; \underline{a}_v; \mu} \geq \nu(L; D_1; \dots; D_r) q b = (1 + 4\varepsilon) q b m \quad , \end{aligned}$$

on trouve alors

$$- \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + 2q\varepsilon)m \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v - O(1) \quad .$$

Le fait énoncé (2) s'en déduit en remarquant que  $\ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v = O(1)$  pour tout  $j \notin I_v$ .

Maintenant, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est  $S$ -entier sur  $Y$ , donc pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$[K' : \mathbb{Q}] h_{\hat{L}}(P_n) = - \sum_{v \in S} \ln \|1_L(P_n)\|_v + O(1) \quad .$$

En utilisant la minoration (2), on obtient (pour tout  $n \geq 0$ )

$$- \sum_{v \in S} \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq (q + 2q\varepsilon) [K' : \mathbb{Q}] h_{\hat{L}}(P_n) - O(1) \quad .$$

D'où une contradiction avec (1).  $\square$

### 3.3 Cas analytique

Soit  $X$  une variété complexe projective de dimension  $d \geq 1$ .

**Proposition 3.4 :** *Soit  $L \in \text{Pic}(X)$  libre et gros. Notons  $q = h^0(X; L)$ . On munit  $L$  d'une métrique  $\| \cdot \|$ . Soient  $s_1; \dots; s_N$  des sections non nulles engendrant  $\Gamma(X; L)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors un fermé  $Z \neq X$  tel que pour toute courbe entière  $f$  sur  $X$  d'image non contenue dans  $Z(\mathbb{C})$ , l'ensemble des réels  $r \geq 0$  vérifiant*

$$\int_0^{2\pi} \max_{J \in \mathcal{L}} \sum_{j \in J} \ln \|s_j(f(re^{i\theta}))\|^{-1} \frac{d\theta}{2\pi} \geq (q + q\varepsilon) T_{\hat{L}; f}(r) \quad (1')$$

*est de mesure de Lebesgue finie, où  $\mathcal{L}$  désigne l'ensemble des parties  $J$  de  $\{1; \dots; n\}$  telles que  $(s_j)_{j \in J}$  soit une base de  $\Gamma(X; L)$ .*

*Démonstration :* En posant  $V = \Gamma(X; L)$ , on a un morphisme  $\Phi_L : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  génériquement fini. Il existe donc un fermé  $Z_1 \neq X$  tel que  $\Phi_{L|X-Z_1}$  soit à fibres finies. On applique alors la version de Vojta (cf théorème 2 de [20]) du théorème de Cartan :

Il existe une réunion finie  $H$  d'hyperplans de  $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{q-1}$  telle que pour toute courbe entière d'image non contenue dans  $Z_1 \cup \Phi_L^{-1}(H)$ , l'ensemble des réels  $r \geq 0$  vérifiant (1') est

de mesure de Lebesgue finie.  $\square$

**Théorème 3.5 :** Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . Soit  $m \geq 1$  un entier. On suppose que le diviseur  $L = m \sum_{i=1}^r D_i$  est libre et gros sur  $X$  et que  $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > m$ . Alors  $Y$  est Brody quasi-hyperbolique.

*Démonstration :* On procède en deux étapes : dans la première, on construit un fermé  $Z \neq X$  candidat à contenir toutes les courbes entières ; dans la seconde, on prouve que  $Y$  est Brody quasi-hyperbolique.

*Étape 1 :* On reprend la démonstration du théorème 3.3, jusqu'à la construction des bases  $\mathcal{B}_{I;\underline{a}}$ . On munit chaque faisceau  $\mathcal{O}_X(D_i)$  d'une métrique  $\|\cdot\|$ . Appliquons le théorème de Cartan et Vojta (proposition 3.4) avec  $\{s_1; \dots; s_N\} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{I;\underline{a}} \mathcal{B}_{I;\underline{a}}$  :

Il existe un fermé  $Z \neq X$  tel que pour toute courbe entière  $f$  sur  $X$  d'image non contenue dans  $Z(\mathbb{C})$ , l'ensemble des réels  $r \geq 0$  vérifiant l'inégalité (1') est de mesure de Lebesgue finie.

*Étape 2 :* Soit  $f$  une courbe entière sur  $Y$ . Raisonnons par l'absurde en supposant  $f(\mathbb{C}) \not\subset Z(\mathbb{C})$ .

Par compacité de  $X(\mathbb{C})$ , il existe un réel  $M > 0$  tel que pour tout  $y \in X(\mathbb{C})$ , l'ensemble d'indices  $I_y = \{i \in \{1; \dots; r\} \mid -\ln \|1_{D_i}(y)\| \geq M\}$  appartienne à  $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$  (il suffit d'extraire du recouvrement ouvert  $\left( \left\{ y \in X(\mathbb{C}) \mid \exists I \in \mathcal{P} \cup \{\emptyset\} \forall i \notin I -\ln \|1_{D_i}(y)\| < M \right\} \right)_{M>0}$  un recouvrement fini).

Fait : Soit  $y \in Y(\mathbb{C})$ . Il existe une base  $(s_{1y}; \dots; s_{qy})$  de  $\Gamma(X; L)$  contenue dans  $\{s_1; \dots; s_N\}$  telle que l'on ait la minoration suivante :

$$-\sum_{k=1}^q \ln \|s_{ky}(y)\| \geq -(q + 3q\varepsilon) \ln \|1_L(y)\| - O(1) \quad , \quad (2')$$

où le  $O(1)$  est indépendant de  $y$ .

Prouvons ce fait. Si  $I_y$  est vide, on prend  $\{s_{1y}; \dots; s_{qy}\} = \mathcal{B}_0$  et on obtient la minoration (2') en remarquant que  $-\ln \|1_L(y)\| < Mr$ .

On suppose maintenant  $I_y$  non vide. On a donc  $I_y \in \mathcal{P}$ . Pour tout  $i \in I_y$ , on pose  $t_{yi} = \frac{\ln \|1_{D_i}(y)\|}{\sum_{j \in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\|}$ . Remarquons que l'on a  $\sum_{i \in I_y} t_{yi} = 1$ . Choisissons un  $\underline{a}_y = (a_{yi})_i \in \Delta_{I_y}$  tel que  $|bt_{yi} - a_{yi}| \leq 1$  pour tout  $i \in I_y$ . On prend alors  $\{s_{1y}; \dots; s_{qy}\} = \mathcal{B}_{I_y; \underline{a}_y}$ . Vérifions que ce choix convient.

Soit  $s \in \Gamma(X; L) - \{0\}$ . Puisque les diviseurs  $D_i$  se coupent proprement deux à deux, le

diviseur  $\operatorname{div}(s) - \sum_{i \in I_y} \mu_i(s) D_i$  est effectif. Ceci implique

$$-\ln \|s(y)\| \geq -\sum_{i \in I_y} \mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(y)\| - O(1) \quad .$$

En remarquant que  $t_{yi} \geq \frac{a_{yi}}{b} - \frac{m\varepsilon}{cr}$  et que  $\mu_i(s) \leq c$  pour tout  $i \in I_y$ , on a, par définition des  $t_{yi}$  :

$$-\mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(y)\| \geq -\left(\frac{a_{yi}}{b} \mu_i(s) - \frac{m\varepsilon}{r}\right) \sum_{j \in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\|$$

pour tout  $i \in I_y$ .

On en déduit l'inégalité

$$-\ln \|s(y)\| \geq -\left(\frac{1}{b} \sum_{i \in I_y} a_{yi} \mu_i(s) - m\varepsilon\right) \sum_{j \in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\| - O(1) \quad .$$

On écrit cette inégalité pour  $s = s_{ky}$ , puis on somme sur  $k$ . En observant que pour  $i \in I_y$ , on a

$$\sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_y} a_{yi} \mu_i(s_{ky}) \geq \nu(L; D_1; \dots; D_r) qb = (1 + 4\varepsilon) qbm$$

comme dans la démonstration du théorème 3.3, on trouve alors

$$-\sum_{k=1}^q \ln \|s_{ky}(y)\| \geq -(q + 3q\varepsilon)m \sum_{j \in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\| - O(1) \quad .$$

Le fait énoncé (2') s'en déduit en remarquant que  $-\ln \|1_{D_j}(y)\| < M$  pour tout  $j \notin I_y$ .

Maintenant  $f$  est une courbe entière sur  $Y$ , donc pour tout  $r \geq 0$ , on a

$$T_{\hat{L};f}(r) = -\int_0^{2\pi} \ln \|1_L(f(re^{i\theta}))\| \frac{d\theta}{2\pi} + O(1) \quad .$$

En utilisant la minoration (2'), on obtient (pour tout  $r \geq 0$ )

$$\int_0^{2\pi} \max_{J \in \mathcal{L}} \sum_{k \in J} \ln \|s_k(f(re^{i\theta}))\|^{-1} \frac{d\theta}{2\pi} \geq (q + 3q\varepsilon) T_{\hat{L};f}(r) - O(1) \quad .$$

D'où une contradiction avec (1') (puisque  $T_{\hat{L};f}(r)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ ).  $\square$

## 4 Démonstration du théorème 2.1

Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle et  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 2$ . Pour tous diviseurs  $L_1; \dots; L_d$  sur  $X$ , on désigne par  $\langle L_1 \cdots L_d \rangle$  leur nombre d'intersection. Lorsque  $L$  est un diviseur sur  $X$  tel que  $q = h^0(X; L) \geq 1$  et  $E$  un diviseur effectif

non nul sur  $X$ , on pose  $\alpha(L; E) = \frac{1}{q} \sum_{k \geq 1} h^0(X; L - kE)$ .

**Proposition 4.1 :** *Soit  $L$  un diviseur sur  $X$  tel que  $q = h^0(X; L) \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement deux à deux; supposons que toute intersection de  $\delta + 1$  quelconques d'entre eux est vide (avec  $2 \leq \delta \leq r$ ). On a alors*

$$\nu(L; D_1; \dots; D_r) \geq \frac{2}{\delta} \inf_i \alpha(L; D_i) \quad .$$

*Démonstration :* On utilise les notations de la section 2.1. Lorsque  $x$  est un réel, on désigne par  $\lceil x \rceil$  le plus petit entier  $\geq x$ . Soient  $I \in \mathcal{P}$  et  $\underline{a} \in \mathbb{N}^I - \{0\}$ . Quitte à réduire  $I$ , on peut supposer que  $a_i \geq 1$  pour tout  $i \in I$ . Observons que  $\#I \leq \delta$ .

Si  $I$  est un singleton  $\{i\}$ , alors  $V_{I; \underline{a}; k} = \Gamma(X; L - \lceil \frac{k}{a_i} \rceil D_i)$ , donc on a bien

$$\sum_{k \geq 1} V_{I; \underline{a}; k} = a_i \sum_{k \geq 1} h^0(X; L - kD_i) \geq a_i q \frac{2}{\delta} \inf_j \alpha(L; D_j) \quad .$$

On suppose maintenant  $\#I \geq 2$ . On choisit deux indices  $j < l$  dans  $I$  tels que  $a_l \geq a_j \geq a_i$  pour tout  $i \in I - \{j; l\}$ . Pour  $(b_1; b_2) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $W(b_1; b_2) = \Gamma(X; L - b_1 D_j - b_2 D_l)$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . L'espace vectoriel  $V_{I; \underline{a}; k}$  contient alors le sous-espace

$$V'_k = W\left(0; \lceil \frac{k}{a_l} \rceil\right) + \sum_{b=0}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} W\left(\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \rceil; b\right) \quad .$$

Puisque les diviseurs  $D_j$  et  $D_l$  se coupent proprement, on a l'égalité suivante pour tout  $b' \in \{0; \dots; \lceil k/a_l \rceil - 1\}$  :

$$W\left(\lceil \frac{k - a_l b'}{a_j} \rceil; b'\right) \cap \left[W\left(0; \lceil \frac{k}{a_l} \rceil\right) + \sum_{b=b'+1}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} W\left(\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \rceil; b\right)\right] = W\left(\lceil \frac{k - a_l b'}{a_j} \rceil; b' + 1\right) \quad .$$

En utilisant  $\lceil k/a_l \rceil$  fois la formule  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$ , on obtient que la dimension de  $V'_k$  vaut

$$\dim W\left(0; \lceil \frac{k}{a_l} \rceil\right) + \sum_{b=0}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} \left[ \dim W\left(\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \rceil; b\right) - \dim W\left(\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \rceil; b + 1\right) \right] \quad .$$

Maintenant, on somme sur  $k$  l'égalité précédente. Après simplifications, on trouve

$$\sum_{k \geq 1} \dim V'_k = a_l \sum_{k \geq 1} h^0(X; L - kD_l) + a_j \sum_{k \geq 1} h^0(X; L - kD_j) \quad .$$

On en conclut la minoration

$$\sum_{k \geq 1} \dim V_{I; \underline{a}; k} \geq \sum_{k \geq 1} \dim V'_k \geq (a_j + a_l) q \inf_i \alpha(L; D_i) \geq \left( \sum_{i \in I} a_i \right) q \frac{2}{\delta} \inf_j \alpha(L; D_j) \quad .$$

D'où le résultat.  $\square$

On aura besoin dans la suite d'une variante des "inégalités de Morse holomorphes" (cf [6] §12 et [1]) :

**Lemme 4.2 :** *Soient  $E$  un diviseur libre et gros sur  $X$  et  $L$  un diviseur sur  $X$  tel que  $L - E$  soit nef. Soit  $\beta$  un réel  $> 0$ . Pour tout couple d'entiers  $(n; k)$  vérifiant  $1 \leq k \leq \beta n$ , on a alors la minoration*

$$h^0(X; nL - kE) \geq \frac{\langle L^d \rangle}{d!} n^d - \frac{\langle L^{d-1} E \rangle}{(d-1)!} n^{d-1} k + \frac{d-1}{d!} \langle L^{d-2} E^2 \rangle n^{d-2} \min(k^2; n^2) - O(n^{d-1}) ,$$

où le  $O$  ne dépend pas de  $(n; k)$ .

*Démonstration :* On a deux cas.

Cas  $k \leq n$  : La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne que  $\chi(X; nL - kE)$  est une fonction polynomiale en  $(n; k)$  dont on peut expliciter la composante homogène dominante :

$$\text{Pour tout } (n; k) \text{ tel que } 1 \leq k \leq n, \text{ on a } \chi(X; nL - kE) = \frac{1}{d!} \langle (nL - kE)^d \rangle + O(n^{d-1}).$$

Par ailleurs, d'après le théorème 1.4.40 de [12] p. 69 (ou plutôt d'après sa démonstration), on a  $h^i(X; nL - kE) = O(n^{d-i})$  pour tout  $i \geq 1$ , puisque  $L$  et  $L - E$  sont nef. On a en particulier  $h^0(X; nL - kE) = \frac{1}{d!} \langle (nL - kE)^d \rangle + O(n^{d-1})$ .

Or un calcul montre (par multilinéarité) la formule

$$\langle (nL - kE)^d \rangle = \langle L^d \rangle n^d - d \langle L^{d-1} E \rangle n^{d-1} k + \sum_{i=2}^d (i-1) \langle L^{i-2} (nL - kE)^{d-i} E^2 \rangle n^{i-2} k^2 .$$

L'inégalité de l'énoncé s'en déduit facilement : les diviseurs  $L$ ,  $nL - kE$  et  $E$  sont nef, donc on a  $\langle L^{i-2} (nL - kE)^{d-i} E^2 \rangle \geq 0$  pour tout  $i \in \{2; \dots; d-1\}$ .

Cas  $k > n$  : D'après le théorème de Bertini (cf corollaire 6.11 de [10] p. 89), il existe  $s \in \Gamma(X; E) - \{0\}$  tel que  $Z = \text{div}(s)$  soit géométriquement intègre sur  $K$ .

Soit  $i$  un entier tel que  $n \leq i \leq \beta n$ . On a la suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - (i+1)E) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iE) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iE)|_Z \rightarrow 0 .$$

On en déduit une suite exacte en cohomologie qui fournit l'inégalité

$$h^0(X; nL - (i+1)E) \geq h^0(X; nL - iE) - h^0(Z; (nL - iE)|_Z) .$$

En utilisant la majoration

$$h^0(Z; (nL - iE)|_Z) \leq h^0(Z; nL|_Z) = \frac{\langle L^{d-1} E \rangle}{(d-1)!} n^{d-1} + O(n^{d-2})$$

(obtenue par Hirzebruch-Riemann-Roch), on trouve

$$\begin{aligned} h^0(X; nL - kE) &\geq h^0(X; nL - nE) - \sum_{i=n}^{k-1} h^0(Z; (nL - iE)|_Z) \\ &\geq \frac{\langle L^d \rangle}{d!} n^d - \frac{\langle L^{d-1} E \rangle}{(d-1)!} n^{d-1} k + \frac{d-1}{d!} \langle L^{d-2} E^2 \rangle n^d - O(n^{d-1}) \end{aligned}$$

(la minoration de  $h^0(X; nL - nE)$  est donnée par le premier cas). D'où le résultat.  $\square$

**Remarque :** La démonstration fournit en fait une minoration de  $h^0(X; nL - kE) - h^1(X; nL - kE)$ .

On note ici  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'application continue définie par  $g(\beta) = \frac{\beta^3}{3}$  si  $\beta \leq 1$  et  $g(\beta) = \beta - \frac{2}{3}$  si  $\beta \geq 1$ .

**Corollaire 4.3 :** Soient  $E$  un diviseur effectif libre et gros sur  $X$  et  $L$  un diviseur sur  $X$  tel que  $L - E$  soit nef. On a alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \alpha(nL; E) \geq \frac{\langle L^d \rangle}{2d \langle L^{d-1} E \rangle} + (d-1) \frac{\langle L^{d-2} E^2 \rangle}{\langle L^d \rangle} g\left(\frac{\langle L^d \rangle}{d \langle L^{d-1} E \rangle}\right) .$$

*Démonstration :* On pose  $\beta = \frac{\langle L^d \rangle}{d \langle L^{d-1} E \rangle}$  et  $M = (d-1) \langle L^{d-2} E^2 \rangle$ . Grâce au lemme 4.2, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} h^0(X; nL - kE) &\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \beta n \rfloor} \left( \frac{\langle L^d \rangle}{d!} n^d - \frac{\langle L^{d-1} E \rangle}{(d-1)!} n^{d-1} k + \frac{M}{d!} n^{d-2} \min(k^2; n^2) \right) - O(n^d) \\ &= \left( \frac{\langle L^d \rangle}{d!} \beta - \frac{\langle L^{d-1} E \rangle}{(d-1)!} \frac{\beta^2}{2} + \frac{M}{d!} g(\beta) \right) n^{d+1} - O(n^d) . \end{aligned}$$

D'où la minoration  $\alpha(nL; E) \geq \left( \frac{\beta}{2} + \frac{M}{\langle L^d \rangle} g(\beta) \right) n - O(1)$ .  $\square$

Montrons maintenant le résultat principal de cette section :

**Théorème 4.4 :** Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs presque amples sur  $X$ . Il existe alors des entiers  $m_1; \dots; m_r$  tels qu'en posant  $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$ , on ait

$$m_i \geq 1 \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \alpha(nL; m_i D_i) > \frac{r}{2d} \text{ pour tout } i \in \{1; \dots; r\} .$$

*Démonstration* : On pose ici  $\Delta = \{(t_1; \dots; t_r) \in \mathbb{R}_+^r \mid t_1 + \dots + t_r = 1\}$ . Pour tout  $t = (t_1; \dots; t_r) \in \Delta$ , on désigne par  $L_t$  le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L_t = \sum_{j=1}^r t_j D_j$  et on pose  $\phi(t) = \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{\langle L_t^{d-1} D_i \rangle} \right)^{-1}$ .

On note  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  l'application continue définie par  $f(t) = \left( \frac{\phi(t)}{\langle L_t^{d-1} D_1 \rangle}; \dots; \frac{\phi(t)}{\langle L_t^{d-1} D_r \rangle} \right)$  pour tout  $t \in \Delta$ . D'après le théorème de Brouwer,  $f$  admet un point fixe  $x = (x_1; \dots; x_r)$ . On a alors  $\phi(x) = \langle L_x^{d-1} D_i \rangle x_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , donc  $\phi(x)r = \langle L_x^d \rangle$ .

On en déduit l'inégalité

$$\frac{\langle L_x^d \rangle}{2d \langle L_x^{d-1} D_i \rangle x_i} + (d-1) \frac{\langle L_x^{d-2} D_i^2 \rangle x_i^2}{\langle L_x^d \rangle} g\left(\frac{\langle L_x^d \rangle}{d \langle L_x^{d-1} D_i \rangle x_i}\right) > \frac{r}{2d} \text{ pour tout } i \in \{1; \dots; r\}.$$

On approche  $x$  par un  $y \in \mathbb{Q}_+^{*r} \cap \Delta$  de la forme  $y = \left( \frac{m_1}{m}; \dots; \frac{m_r}{m} \right)$  de telle sorte que l'inégalité précédente soit encore valable avec  $y$  au lieu de  $x$ , et on conclut en appliquant le corollaire 4.3.  $\square$

On en déduit le théorème 2.1 en appliquant la proposition 4.1.

## 5 Géométrie bis

### 5.1 Préliminaires

Soient  $r$  et  $m$  des entiers  $\geq 1$ . On pose  $\Delta = \{0; \dots; m\}^r$ . On munit  $\Delta$  de l'ordre lexicographique. Notons  $\underline{m} = (m; \dots; m)$  le plus grand élément de  $\Delta$ . Pour tout  $\underline{b} = (b_1; \dots; b_r) \in \Delta$ , on désigne par  $J_{\underline{b}}$  l'ensemble des  $i \in \{1; \dots; r\}$  tels que  $b_i < m$ .

Commençons par la variante suivante du lemme 2.2 de [4] :

**Lemme 5.1** : *Soit  $A$  un anneau local. Soit  $(\varphi_1; \dots; \varphi_r)$  une suite régulière de  $A$ . Pour tout  $\underline{b} \in \Delta$ , on a alors l'inclusion d'idéaux*

$$(\varphi_1^{b_1} \dots \varphi_r^{b_r} A) \cap \left( \sum_{\underline{c} > \underline{b}} \varphi_1^{c_1} \dots \varphi_r^{c_r} A \right) \subset \sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_1^{b_1} \dots \varphi_r^{b_r} \varphi_j A \quad .$$

*Démonstration* : On raisonne par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$ , alors l'inclusion est évidente. Supposons  $r \geq 2$  et le résultat au cran  $r - 1$ . Posons  $\Delta' = \{0; \dots; m\}^{r-1}$  et  $\underline{b}' = (b_2; \dots; b_r)$ . Soit  $x \in (\varphi_1^{b_1} \dots \varphi_r^{b_r} A) \cap \left( \sum_{\underline{c} > \underline{b}} \varphi_1^{c_1} \dots \varphi_r^{c_r} A \right)$ . On a deux cas.



Cas  $b_1 = m$  : L'élément  $x$  s'écrit  $x = \varphi_1^m y = \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_1^m a_{\underline{c}'}$  avec un  $y \in \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} A$  et des  $a_{\underline{c}'} \in \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$ . En simplifiant par  $\varphi_1^m$ , on obtient que  $y$  appartient à  $\sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$ . Or  $(\varphi_2; \dots; \varphi_r)$  est une suite régulière de  $A$ , donc  $y$  est un élément de  $\sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} \varphi_j A$  par hypothèse de récurrence.

Cas  $b_1 < m$  : L'élément  $x$  s'écrit  $x = \varphi_1^{b_1} y = \varphi_1^{b_1+1} z + \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_1^{b_1} a_{\underline{c}'}$  avec un  $y \in \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} A$ , un  $z \in A$  et des  $a_{\underline{c}'} \in \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$ . On écrit  $y = \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} w$  avec  $w \in A$ . On simplifie par  $\varphi_1^{b_1}$  puis on réduit modulo  $\varphi_1$  ; on trouve ainsi dans  $A' = A/\varphi_1 A$  l'égalité  $\bar{y} = \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \bar{a}_{\underline{c}'}$ .

On en déduit que  $\bar{y}$  appartient à  $(\bar{\varphi}_2^{b_2} \cdots \bar{\varphi}_r^{b_r} A') \cap \left( \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \bar{\varphi}_2^{c_2} \cdots \bar{\varphi}_r^{c_r} A' \right)$ . Or  $(\bar{\varphi}_2; \dots; \bar{\varphi}_r)$  est une suite régulière de  $A'$ , donc  $\bar{y}$  est un élément de  $\sum_{j \in J_{\underline{b}} - \{1\}} \bar{\varphi}_2^{b_2} \cdots \bar{\varphi}_r^{b_r} \bar{\varphi}_j A'$  par hypothèse de récurrence. En simplifiant par  $\bar{\varphi}_2^{b_2} \cdots \bar{\varphi}_r^{b_r}$ , on obtient que  $\bar{w}$  est dans  $\sum_{j \in J_{\underline{b}} - \{1\}} \bar{\varphi}_j A'$ . On en conclut que  $w$  appartient à  $\sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_j A$ .

D'où le résultat.  $\square$

Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle et  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ .

**Définition :** Un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{C}$  sur  $X$  est dit **acyclique** lorsque  $h^i(X; \mathcal{C}) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .

Soit  $L$  un diviseur sur  $X$  tel que  $q = h^0(X; L) \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement.

Pour tout  $\underline{b} \in \Delta$ , on pose  $\mathcal{L}_{\underline{b}} = \mathcal{O}_X \left( L - \sum_{i=1}^r b_i D_i \right)$ . Pour  $\underline{b} \in \Delta$ , on définit le sous-module  $\mathcal{C}_{\underline{b}}$  de  $\mathcal{L}_{\underline{b}}$  par

$$\mathcal{C}_{\underline{b}} = \sum_{j \in J_{\underline{b}}} \mathcal{O}_X \left( L - D_j - \sum_{i=1}^r b_i D_i \right) \quad .$$

Soit  $(a_1; \dots; a_r) \in \mathbb{N}^r$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $V_k$  le sous-espace de  $\Gamma(X; L)$  défini par

$$V_k = \sum_{\underline{b}} \Gamma(X; \mathcal{L}_{\underline{b}}) \text{ où la somme porte sur les } \underline{b} \in \mathbb{N}^r \text{ tels que } \sum_{i=1}^r a_i b_i \geq k \quad .$$

**Lemme 5.2 :** Avec ces notations, on a la minoration suivante :

$$\sum_{k \geq 1} \dim V_k \geq \sum_{i=1}^r a_i \sum_{\underline{b} \in \Delta} \left[ h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}}) - h^0(X; \mathcal{C}_{\underline{b}}) \right] b_i \quad .$$

*Démonstration* : Soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq \sum_{i=1}^r a_i m$ . Notons  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des  $\underline{b} \in \Delta$  tels que  $\sum_{i=1}^r a_i b_i \geq k$ . L'espace vectoriel  $V_k$  contient alors le sous-espace  $V'_k = \sum_{\underline{b} \in \mathcal{D}_k} \Gamma(X; \mathcal{L}_{\underline{b}})$ .

Soit  $\underline{b} \in \mathcal{D}_k - \{\underline{m}\}$ . Le lemme 5.1 fournit l'inclusion de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{L}_{\underline{b}} \cap \sum_{\underline{c} > \underline{b}} \mathcal{L}_{\underline{c}} \subset \mathcal{C}_{\underline{b}}$ , puisque les diviseurs  $D_1; \dots; D_r$  se coupent proprement. On a en particulier l'inclusion d'espaces vectoriels

$$\Gamma(X; \mathcal{L}_{\underline{b}}) \cap \sum_{\underline{c} > \underline{b}} \Gamma(X; \mathcal{L}_{\underline{c}}) \subset \Gamma(X; \mathcal{C}_{\underline{b}}) \quad .$$

En utilisant  $\#\mathcal{D}_k - 1$  fois la formule  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$ , on trouve l'inégalité

$$\dim V'_k \geq h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{m}}) + \sum_{\underline{b} \in \mathcal{D}_k - \{\underline{m}\}} \left[ h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}}) - h^0(X; \mathcal{C}_{\underline{b}}) \right] \quad .$$

On obtient le résultat en sommant sur  $k$  cette inégalité.  $\square$

**Proposition 5.3** : *On suppose de plus que  $\mathcal{L}_{\underline{b}}$  est acyclique pour tout  $\underline{b} \in \Delta$ . On a alors*

$$\sum_{k \geq 1} \dim V_k \geq \sum_{i=1}^r a_i \sum_{k=1}^m h^0(X; L - kD_i) \quad .$$

On a en particulier  $\nu(L; D_1; \dots; D_r) \geq \frac{1}{q} \inf_i \sum_{k=1}^m h^0(X; L - kD_i)$ .

*Démonstration* : Soit  $\underline{b} \in \Delta - \{\underline{m}\}$ . Pour toute partie  $I$  de  $J_{\underline{b}}$ , posons ici

$$\mathcal{L}_{\underline{b}; I} = \mathcal{O}_X \left( L - \sum_{j \in J_{\underline{b}}} D_j - \sum_{i=1}^r b_i D_i \right) \quad .$$

On pose aussi  $p = \#J_{\underline{b}}$  et  $\mathcal{E}_{\underline{b}} = \bigoplus_{j \in J_{\underline{b}}} \mathcal{L}_{\underline{b}; \{j\}}$ .

Les diviseurs  $(D_j)_{j \in J_{\underline{b}}}$  se coupent proprement, donc on a la suite exacte de Koszul suivante (cf [9] p. 431) :

$$0 \rightarrow \Lambda^p \mathcal{E}_{\underline{b}} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 \mathcal{E}_{\underline{b}} \rightarrow \mathcal{C}_{\underline{b}} \rightarrow 0 \quad .$$

On remarque que  $\Lambda^j \mathcal{E}_{\underline{b}} = \bigoplus_{\#I=j} \mathcal{L}_{\underline{b}; I}$  (qui est en particulier acyclique) pour tout  $j \in \{1; \dots; p\}$ . La suite de Koszul précédente induit donc par acyclicité une suite exacte en image directe :

$$0 \rightarrow \Gamma(X; \Lambda^p \mathcal{E}_{\underline{b}}) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma(X; \Lambda^1 \mathcal{E}_{\underline{b}}) \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{C}_{\underline{b}}) \rightarrow 0 \quad .$$

On en déduit la relation

$$h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}}) - h^0(X; \mathcal{C}_{\underline{b}}) = \sum_{I \subset J_{\underline{b}}} (-1)^{\#I} h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}; I}) \quad .$$

Maintenant, on fixe  $i \in \{1; \dots; r\}$  et  $c \in \{0; \dots; m\}$ , et on somme sur l'ensemble  $\Delta'_c$  des  $\underline{b} \in \Delta$  tels que  $b_i = c$ . Un réarrangement des termes permet de simplifier et montre que :

$$\sum_{\underline{b} \in \Delta'_c} \sum_{I \subset J_{\underline{b}}} (-1)^{\#I} h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}; I}) = \begin{cases} h^0(X; L - cD_i) - h^0(X; L - (c+1)D_i) & \text{si } c < m; \\ h^0(X; L - mD_i) & \text{si } c = m. \end{cases}$$

(En effet, si  $p' = \#\{j \neq i \mid b_j \geq 1\} \geq 1$ , alors le terme  $h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}})$  apparaît  $2^{p'-1}$  fois avec le signe plus et  $2^{p'-1}$  fois avec le signe moins ; de même avec le terme  $h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}; \{i\}})$  dans le cas  $c < m$ ).

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{b} \in \Delta} [h^0(\mathcal{L}_{\underline{b}}) - h^0(\mathcal{C}_{\underline{b}})] b_i &= h^0(L - mD_i)m + \sum_{c=0}^{m-1} [h^0(L - cD_i) - h^0(L - (c+1)D_i)] c \\ &= \sum_{k=1}^m h^0(X; L - kD_i) \quad . \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme 5.2.  $\square$

## 5.2 Démonstration du théorème 2.2

Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle et  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement (avec  $r \geq 1$ ). Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties  $I$  non vides de  $\{1; \dots; r\}$  telles que  $\bigcap_{i \in I} D_i$  soit non vide.

**Théorème 5.4 :** *Soit  $L$  un diviseur ample sur  $X$ . On suppose que  $D_i$  est nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Soit  $\theta > 1$  un réel tel que le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L - \theta \sum_{i \in I} D_i$  soit nef pour tout  $I \in \mathcal{P}$ .*

*On a alors l'inégalité*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \frac{\theta}{(d+1)\langle L^d \rangle} \inf_i \sum_{j=0}^d \langle L^{d-j} (L - \theta D_i)^j \rangle \quad .$$

*Démonstration :* D'après le théorème d'annulation de Fujita (cf théorème 1.4.35 de [12] p. 66), il existe  $n_0 \geq 1$  tel que  $n_0L + N$  soit acyclique pour tout  $N \in \text{Pic}(X)$  nef.

On pose  $n' = \lfloor (n - n_0)\theta \rfloor$  pour tout  $n > n_0$ . En appliquant la proposition 5.3 (avec  $m = n'$ ), on obtient (pour tout  $n > n_0$ )

$$\nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \frac{1}{h^0(X; nL)} \inf_i \sum_{k=1}^{n'} h^0(X; nL - kD_i) \quad .$$

Soit  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Grâce à la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n'} h^0(X; nL - kD_i) &= \frac{1}{d!} \sum_{k=1}^{n'} \left[ \langle (nL - kD_i)^d \rangle + O(n^{d-1}) \right] \\
&= \frac{1}{d!} \sum_{j=0}^d \sum_{k=1}^{n'} C_d^j \langle L^{d-j} D_i^j \rangle n^{d-j} (-k)^j + O(n^d) \\
&= \frac{1}{d!} \sum_{j=0}^d C_d^j \langle L^{d-j} D_i^j \rangle \frac{(-1)^j}{j+1} \theta^{j+1} n^{d+1} + O(n^d) \quad .
\end{aligned}$$

Or un calcul montre la formule

$$\sum_{j=0}^d C_d^j \langle L^{d-j} D_i^j \rangle \frac{(-1)^j}{j+1} \theta^{j+1} = \frac{\theta}{d+1} \sum_{j=0}^d \langle L^{d-j} (L - \theta D_i)^j \rangle \quad .$$

D'où l'inégalité de l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 5.5 :** *Soit  $L$  un diviseur ample sur  $X$ . On suppose que  $D_i$  est nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Soit  $\theta > 1$  un réel tel que le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L - d\theta D_i$  soit nef pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . On a alors*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \lambda_d \theta \quad .$$

*Démonstration :* Pour tout  $I \in \mathcal{P}$ , le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L - \theta \sum_{i \in I} D_i$  est nef puisque  $\#I \leq d$ . Soit  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Les  $\mathbb{R}$ -diviseurs  $L - \theta D_i - \left(1 - \frac{1}{d}\right)L$  et  $L$  sont nef, donc on a

$$\langle L^{d-j} (L - \theta D_i)^j \rangle \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^j \langle L^d \rangle \text{ pour tout } j \in \{1; \dots; d\} \quad .$$

En appliquant le théorème 5.4, on trouve ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \frac{\theta}{d+1} \sum_{j=0}^d \left(1 - \frac{1}{d}\right)^j = \lambda_d \theta \quad .$$

D'où le résultat.  $\square$

## Références

- [1] *F. Angelini* : An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities. *Proceedings of the AMS* **124** (1996), 3265-3269.
- [2] *P. Autissier* : Géométrie des surfaces algébriques et points entiers. Prépublication de l'IRMAR (2006) ; math.NT/0606184.

- [3] *Y. Bilu* : The many faces of the subspace theorem (after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier...). Séminaire Bourbaki **967** (2006).
- [4] *P. Corvaja, U. Zannier* : On a general Thue's equation. American Journal of Math. **126** (2004), 1033-1055.
- [5] *P. Corvaja, U. Zannier* : On integral points on surfaces. Annals of Math. **160** (2004), 705-726.
- [6] *J.P. Demailly* :  $L^2$  vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. Lecture Notes in Math. **1646** (1996), 1-97.
- [7] *G. Faltings* : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Inventiones Math. **73** (1983), p. 349-366.
- [8] *G. Faltings* : Diophantine approximation on abelian varieties. Annals of Math. **133** (1991), 549-576.
- [9] *W. Fulton* : Intersection theory (second edition). Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **2** (1998).
- [10] *J.P. Jouanolou* : Théorèmes de Bertini et applications. Progress in Math. **42** (1983).
- [11] *S. Lang* : Number theory III. Encyclopaedia of Math. Sciences **60** (1991).
- [12] *R. Lazarsfeld* : Positivity in algebraic geometry I. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **48** (2004).
- [13] *A. Levin* : Generalizations of Siegel's and Picard's theorems. Annals of Math. (2007), à paraître ; math.NT/0503699.
- [14] *H.P. Schlickewei* : The  $p$ -adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. Archiv der Math. **29** (1977), 267-270.
- [15] *W.M. Schmidt* : Diophantine approximation. Lecture Notes in Math. **785** (1980).
- [16] *J.P. Serre* : Lectures on the Mordell-Weil theorem (third edition). Aspects of Math. **15** (1997).
- [17] *P. Vojta* : Diophantine approximations and value distribution theory. Lecture Notes in Math. **1239** (1987).
- [18] *P. Vojta* : A refinement of Schmidt's subspace theorem. American Journal of Math. **111** (1989), 489-518.
- [19] *P. Vojta* : Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I. Inventiones Math. **126** (1996), 133-181.
- [20] *P. Vojta* : On Cartan's theorem and Cartan's conjecture. American Journal of Math. **119** (1997), 1-17.
- [21] *S. Zhang* : Small points and adelic metrics. Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), 281-300.

Pascal Autissier. I.R.M.A.R., Université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.

pascal.autissier@univ-rennes1.fr