



HAL
open science

Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique

Alberto Minguez

► **To cite this version:**

| Alberto Minguez. Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique. 2007. hal-00173527

HAL Id: hal-00173527

<https://hal.science/hal-00173527>

Preprint submitted on 20 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ D'UNE INDUITE PARABOLIQUE

ALBERTO MÍNGUEZ

RÉSUMÉ. Let F be a non-Archimedean locally compact field and let D be a central division algebra over F . Let π_1 and π_2 be respectively two smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}(n_1, D)$ and $\mathrm{GL}(n_2, F)$, $n_1, n_2 \geq 0$. In this article, we give some sufficient conditions on π_1 and π_2 so that the parabolically induced representation of $\pi_1 \otimes \pi_2$ to $\mathrm{GL}(n_1 + n_2, D)$ has a unique irreducible quotient. In the case where π_1 is a cuspidal representation, we compute the Zelevinsky's parameters of such a quotient in terms of parameters of π_2 . This is the key point for making explicit Howe correspondence for dual pairs of type II (cf. [Mi1]).

Codes MSN : 22E50, 22E35.

INTRODUCTION

Dans l'étude des représentations irréductibles d'un groupe réductif sur un corps local non archimédien F , on est amené à considérer aussi des représentations réductibles. En général, elles ne sont pas semi-simples et il est très intéressant de construire de telles représentations ayant un unique quotient (ou sous-représentation) irréductible. C'est dans cette lignée, par exemple, que l'on trouve les classifications de Langlands et de Zelevinsky du type : "*l'unique quotient irréductible de...*" ou "*l'unique sous-représentation irréductible de...*".

Cet article est motivé par la question suivante : *Soit D une algèbre à division de centre F de dimension finie sur F . Si π_1 et π_2 sont deux représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n_1, D)$ et $\mathrm{GL}(n_2, F)$ respectivement, est-ce que l'induite parabolique, notée $\pi_1 \times \pi_2$, de $\pi_1 \otimes \pi_2$ à $\mathrm{GL}(n_1 + n_2, D)$ possède un unique quotient irréductible ?*

Nous utilisons des techniques des foncteurs de Jacquet, avec des considérations de combinatoire, pour donner des conditions suffisantes pour que la réponse soit positive.

Donnons quelques premières applications de ce résultat général : la représentation $\pi_1 \times \pi_2$ admet, en particulier, un unique quotient irréductible si :

Partially supported by MTM2004-07203-C02-01 and FEDER.

- (1) La représentation π_1 est un caractère de $\mathrm{GL}(n_1, D)$. C'est une question qui apparaît naturellement dans la correspondance de Howe. Ceci prouve une ancienne conjecture de M.-F. Vignéras, *cf.* [MVW, Conjecture 3.III.6].
- (2) La représentation π_1 est une représentation cuspidale. Ceci permet, dans [Mi1], de rendre explicite la correspondance de Howe pour les paires duales de type II.
- (3) Les représentations π_1 et π_2 sont essentiellement de carré intégrable. Ceci permet de donner (*cf.* [Mi2]) une preuve simple, complètement combinatoire, de la classification de Zelevinsky [Ze1], des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, D)$, en termes des segments.

Remarquons, pour comprendre l'importance de la question qui motive cet article, que parmi d'autres applications, l'unicité du quotient irréductible impliquerait, en particulier, la conjecture (U0) de Tadic (qui vient d'être prouvée dans [Se]) qui permet de déterminer le dual unitaire de $\mathrm{GL}(n, D)$.

Donnons maintenant plus de détails concernant les différentes sections de l'article :

Dans la section 1, on introduit les notations. Dans la section 2, on utilise le lemme géométrique combinatoire de [Ze1], pour donner une condition suffisante pour que l'induite parabolique du produit tensoriel de plusieurs représentations irréductibles n'ait qu'un seul quotient irréductible. En section 3, on introduit les foncteurs de Jacquet et, en section 4, on rappelle la classification de Tadic des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, D)$.

Dans la section 5, on combine ces résultats pour donner le théorème principal de cet article (Théorème 5.1). Dans la section 6, on calcule, avec la classification de la section 4, les paramètres de l'unique quotient irréductible de $\pi_1 \times \pi_2$, quand la représentation π_1 est cuspidale, en termes des paramètres de π_2 .

On utilise ce calcul, dans la section 7, pour tirer quelques conséquences : on donne une condition combinatoire nécessaire et suffisante d'irréductibilité de $\pi_1 \times \pi_2$, quand π_1 est cuspidale (Théorème 7.4). De plus, il nous permet de montrer (Théorème 7.7) une conjecture géométrique de Tadic [Ta1, Conjecture 3.6] sur l'involution de Zelevinsky ainsi que la généralisation de la description combinatoire de cette involution au cas des formes intérieures de $\mathrm{GL}(n, F)$, ce qui facilite les calculs de [Ta2].

Dans l'appendice, on montre (Corollaire A.3) un lemme jouant un rôle clé dans le calcul de [Mi1] de la correspondance θ explicite dans le cas des paires duales de type II. Il serait très intéressant de trouver une preuve plus simple, sans devoir utiliser tous les calculs des sections précédentes, pour, peut-être, généraliser les résultats de [Mi1] aux paires duales de type I. Remarquons que dans le cas des représentations des groupes orthogonaux, la représentation induite parabolique

à partir du produit tensoriel de deux représentations cuspidales peut avoir deux sous-modules irréductibles (*cf.* [Moe]).

Je voudrais particulièrement remercier Guy Henniart et Colette Mœglin pour leurs nombreux conseils et idées. Je remercie aussi Florent Benaych-Georges, Goran Muic, Hiroshi Saito et Vincent Sécherre pour les remarques et corrections intéressantes qu'ils m'ont faites à propos de cet article.

1. PRÉLIMINAIRES

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F .

On note \mathcal{M}_n l'ensemble de matrices $n \times n$ à coefficients dans D et $\text{Nrd} : \mathcal{M}_n \rightarrow F$ la norme réduite. Le groupe $\text{GL}_n(D)$ des matrices inversibles dans \mathcal{M}_n sera noté G_n . Le groupe trivial sera noté G_0 . On note $\nu = |\text{Nrd}|_F$, la valeur absolue de la norme réduite (par abus de notation on ne fera pas distinction entre ν agissant sur G_n pour différent n).

A toute partition (ordonnée) $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$, $n_i \geq 0$, de l'entier n , correspond une décomposition en blocs des matrices carrées d'ordre n . On notera G_α le sous-groupe de G_n formé des matrices inversibles diagonales par blocs, P_α (resp. \overline{P}_α) le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) par blocs, et U_α le sous-groupe de P_α formé des éléments dont les blocs diagonaux sont des matrices unité. Le sous-groupe \overline{P}_α est conjugué à $P_{\overline{\alpha}}$ dans G_n avec $\overline{\alpha} = (n_r, \dots, n_1)$.

Dans cet article on ne considérera que des représentations lisses complexes et le mot *représentation* voudra toujours dire *représentation lisse complexe*. On notera $\text{Irr}(G_n)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G_n . On note Irr l'union disjointe

$$\text{Irr} = \bigcup_{n \geq 0} \text{Irr}(G_n),$$

et \mathcal{C} le sous-ensemble de Irr formé de représentations cuspidales. Le support cuspidal de $\pi \in \text{Irr}$ sera noté $\text{supp}(\pi)$.

On note $r_{(n_1, \dots, n_r), n}$ (resp. $\overline{r}_{(n_1, \dots, n_r), n}$) le foncteur de Jacquet normalisé associé au parabolique standard P_α (resp. \overline{P}_α).

Soient $\rho_i \in \text{Irr}(G_{n_i})$, $1 \leq i \leq r$. On note $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ la représentation $\text{ind}_{P_\alpha}^{G_n}(\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r \otimes 1_{U_\alpha})$ induite parabolique normalisée.

Soit π une représentation de G_n ; on a un isomorphisme canonique (réciprocité de Frobenius) :

$$(1.1) \quad \text{Hom}_{G_n}(\pi, \rho_1 \times \dots \times \rho_r) \simeq \text{Hom}_{G_\alpha}(r_{(n_1, \dots, n_r), n}(\pi), \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r).$$

On dispose aussi d'un isomorphisme de réciprocity à la *Casselman* (cf. [Ber, Theorem 20]) :

(1.2)

$$\mathrm{Hom}_{G_n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{G_\alpha}(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r, \bar{\tau}_{(n_1, \dots, n_r), n}(\pi)).$$

On notera \mathcal{R}_n le groupe de Grothendieck de la catégorie des G_n -modules de longueur finie identifié au \mathbb{Z} -module libre qui a pour base $(\pi)_{\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)}$. Le sous-semigroupe de \mathcal{R}_n qui consiste en des sommes finies $\pi_1 + \cdots + \pi_k$ où $\pi_i \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $k \geq 0$ sera noté \mathcal{R}_n^+ . Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}_n, \\ \mathcal{R}^+ &= \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}_n^+. \end{aligned}$$

Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}$ on note $\pi_1 \leq \pi_2$ si $\pi_2 - \pi_1 \in \mathcal{R}^+$.

On note s. s. (π) (ou $\mathrm{JH}(\pi)$) l'image de π dans \mathcal{R} pour toute représentation de longueur finie π .

Si π est une représentation de G_n on notera $\mathrm{gr}(\pi) = n$ et $\tilde{\pi}$ la contragrédiente de π .

Si π est une représentation de longueur finie, alors

$$\mathrm{s. s.}(\pi) = \bigoplus_{\tau_i \in \mathrm{Irr}, 1 \leq i \leq r} m_i \tau_i, \quad \text{où les } \tau_i \text{ sont distincts.}$$

On dit que les τ_i forment une suite de composition de π et que m_i est la multiplicité de τ_i dans π .

2. LEMME GÉOMÉTRIQUE COMBINATOIRE

On rappelle ici les résultats de [Ze1, 1.6.] et on déduit quelques premiers lemmes simples qui seront utilisés dans la suite.

Soient β, γ deux partitions de n , $\beta = (n_1, \dots, n_r)$, $\gamma = (m_1, \dots, m_s)$ et pour $i \in \{1, \dots, r\}$ soit ρ_i une représentation de G_{n_i} . On veut calculer une suite de composition de $r_{(m_1, \dots, m_s), n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Notons $M^{\beta, \gamma}$ l'ensemble des matrices $b = (b_{i,j})$ telles que

- (1) Les $b_{i,j}$ sont des entiers non négatifs,
- (2) $\sum_j b_{i,j} = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$; $\sum_i b_{i,j} = m_j$ pour tout $j = 1, \dots, s$.

Fixons $b \in M^{\beta, \gamma}$ et notons β_i la partition (b_{i1}, \dots, b_{is}) de n_i et γ_j la partition (b_{1j}, \dots, b_{rj}) de m_j .

Les $r_{\beta_i, n_i}(\rho_i)$ sont de longueur finie. Supposons alors $\mathrm{JH}(r_{\beta_i, n_i}(\rho_i)) = \{\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}, \dots, \sigma_i^{(r_i)}\}$ où

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{is}^{(k)}, \quad \sigma_{ij}^{(k)} \in \mathrm{Irr}(G_{b_{ij}}), \quad k = 1, \dots, r_i.$$

Pour tous k_1, \dots, k_r on pose

$$\sigma_j = \sigma_{1j}^{(k_1)} \times \sigma_{2j}^{(k_2)} \times \cdots \times \sigma_{rj}^{(k_r)}, \quad 1 \leq k_j \leq r_j,$$

représentation de G_{m_j} , et

$$\sigma(k_1, \dots, k_r) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_s,$$

représentation de G_γ .

Alors, d'après [Ze1, 1.6.], les $\sigma(k_1, \dots, k_r)$ quand on fait varier les (k_1, \dots, k_r) et $b \in M^{\beta, \gamma}$ forment une suite de composition de la représentation $r_{(m_1, \dots, m_s), n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Une première conséquence immédiate est la proposition ci-dessous :

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i , $1 \leq i \leq r$, toute partition $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \text{JH}(r_{\beta_i, n_i}(\rho_i))$ on ait*

$$(1) \text{ Ou bien } \text{supp} \left(\sigma_{i1}^{(k)} \right) \not\subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} \text{supp}(\rho_j);$$

$$(2) \text{ Ou bien } \text{supp} \left(\sigma_{i2}^{(k)} \right) \not\subseteq \bigcup_{i+1 \leq j \leq r} \text{supp}(\rho_j).$$

Alors la représentation $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\text{JH}(r_{\beta, n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))$.

Démonstration. D'après ce qui précède, les $\sigma(k_1, \dots, k_r)$, quand on fait varier (k_1, \dots, k_r) et $b \in M^{\beta, \beta}$, forment une suite de composition de $r_{\beta, n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Si b est la matrice diagonale dans $M^{\beta, \beta}$ d'éléments diagonaux n_1, n_2, \dots, n_r , alors $\sigma(k_1, \dots, k_r) = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ et $k_i = 1$ pour tout i .

Il suffit donc de montrer que pour tout $b \in M^{\beta, \beta}$, b non diagonale, et tout (k_1, \dots, k_r) , $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \dots, k_r)$. Or, si b n'est pas diagonale (par la condition (2) de la page 4 sur les matrices b), il existe $j < i$ et $j' > i'$ tels que b_{ij} et $b_{i'j'}$ soient non nuls. Soient

$$\begin{aligned} i_0 &= \min \{i : \exists j < i, b_{ij} \neq 0\} & j_0 &= \min \{j : b_{i_0 j} \neq 0\}, \\ i'_0 &= \max \{i' : \exists j' > i', b_{i' j'} \neq 0\} & j'_0 &= \max \{j' : b_{i'_0 j'} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (1), puisque $j_0 < i_0$, pour tout k_{i_0} , $\text{supp} \left(\sigma_{i_0 j_0}^{(k_{i_0})} \right) \not\subseteq \text{supp}(\rho_{j_0})$ et donc, ρ_{j_0} ne peut pas être un sous-quotient de σ_{j_0} . Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \dots, k_r)$.

Par l'hypothèse (2), puisque $j'_0 > i'_0$, pour tout $k_{i'_0}$, $\text{supp} \left(\sigma_{i'_0 j'_0}^{(k_{i'_0})} \right) \not\subseteq \text{supp}(\rho_{j'_0})$ et donc, $\rho_{j'_0}$ ne peut pas être un sous-quotient de $\sigma_{j'_0}$. Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \dots, k_r)$. \square

Corollaire 2.2. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i , $1 \leq i \leq r$, toute partition $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \text{JH}(r_{\beta_i, n_i}(\rho_i))$, on ait*

$$(1) \text{ Ou bien } \text{supp} \left(\sigma_{i1}^{(k)} \right) \not\subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} \text{supp}(\rho_j);$$

(2) Ou bien $\text{supp} \left(\sigma_{i_2}^{(k)} \right) \not\subseteq \bigcup_{i+1 \leq j \leq r} \text{supp} (\rho_j)$.

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à 1.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme qui suit et de la proposition précédente. \square

Lemme 2.3. *Supposons que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans*

$$\begin{aligned} & \text{JH} (r_{\beta,n} (\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)) \\ & (\text{resp. } \text{JH} (\bar{r}_{\beta,n} (\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))). \end{aligned}$$

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à 1.

Démonstration. Supposons qu'il existe π_1 et π_2 deux sous-modules irréductibles de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ et posons $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Ainsi

$$\dim (\text{Hom}_{G_n} (\pi, \rho_1 \times \cdots \times \rho_r)) \geq 2.$$

Par (1.1), on trouve

$$\dim (\text{Hom}_{G_\beta} (r_{\beta,n} (\pi), \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r)) \geq 2.$$

Or, par l'exactitude du foncteur de Jacquet,

$$\text{JH} (r_{\beta,n} (\pi)) \leq \text{JH} (r_{\beta,n} (\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)).$$

On trouve donc que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité au moins 2 dans $\text{JH} (r_{\beta,n} (\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))$ ce qui est absurde, par hypothèse. \square

3. LES BLOCS DANS $Fin(G_n)$

Pour un ensemble X , $M(X)$ sera l'ensemble de tous les multi-ensembles dans X , *i.e.*, des fonctions $m : X \rightarrow \mathbb{N}$ à support fini. On définit la somme de multi-ensembles de façon naturelle.

Si $\Omega \in M(\mathcal{C})$, on pose

$$|\Omega| = \sum_{\rho \in \mathcal{C}} \Omega(\rho) \text{gr}(\rho).$$

Soit Ω un multi-ensemble de représentations cuspidales, avec $|\Omega| = n$. On note $Fin(G_n)$ la sous-catégorie pleine de $Alg(G_n)$ des représentations de longueur finie et $Fin(\Omega)$ la sous-catégorie pleine de $Fin(G_n)$ telle que pour tout sous-quotient irréductible π de tout élément dans $Fin(\Omega)$, $\text{supp}(\pi) = \Omega$.

Alors (*cf.* [Cas, Theorem 7.3.2]) la catégorie $Fin(G_n)$ est produit direct des blocs $Fin(\Omega)$ quand Ω parcourt tous les multi-ensembles de représentations cuspidales de G_n avec $|\Omega| = n$.

On veut dire par cela,

- (1) Tout $\pi \in \text{Fin}(G_n)$ est une somme directe de représentations $\pi_i \in \text{Fin}(\Omega_i)$, où $\Omega_i \neq \Omega_j$ si $i \neq j$.
- (2) $\text{Hom}_{G_n}(\pi_i, \pi_j) = 0$ si $\pi_i \in \text{Fin}(\Omega_i)$ et $\Omega_i \neq \Omega_j$.

Soient n, t deux entiers positifs, $t < n$ et soit π une représentation de longueur finie de G_n . La représentation $r_{(t, n-t), n}(\pi)$, étant de longueur finie, se décompose alors :

$$r_{(t, n-t), n}(\pi) = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=1}^s \Pi_{i,j}$$

où, pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, $\Pi_{i,j}$ est une représentation de longueur finie de $G_t \times G_{n-t}$ telle que tout sous-quotient irréductible de $\Pi_{i,j}$ est la forme $\pi_i \otimes \pi'_j$ avec $\pi_i \in \Omega_i$ et $\pi'_j \in \Omega'_j$ où $\{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq r}$ et $\{\Omega'_j\}_{1 \leq j \leq s}$ sont deux sous-ensembles de $M(\mathcal{C})$ tels que $|\Omega_i| = t$, $|\Omega'_j| = n - t$, pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, et $\Omega_i \neq \Omega_{i'}$ si $i \neq i'$, et $\Omega'_j \neq \Omega'_{j'}$ si $j \neq j'$.

Si ρ une représentation irréductible de G_t , avec $\text{supp}(\rho) = \Omega_i$, on pose

$$\text{Jac}_\rho(\pi) = \bigoplus_{1 \leq j \leq s} \Pi_{i,j},$$

et si ρ' une représentation irréductible de G_{n-t} avec $\text{supp}(\rho') = \Omega'_j$, on pose

$$\overline{\text{Jac}}_{\rho'}(\pi) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \Pi_{i,j}.$$

Remarquons que $\text{Jac}_\rho(\pi)$ et $\overline{\text{Jac}}_{\rho'}(\pi)$ ne dépendent que du support cuspidal de ρ et ρ' , respectivement. Remarquons aussi que on obtient le foncteur $\overline{\text{Jac}}_\rho$ à partir du foncteur Jac_ρ en changeant dans la définition de Jac_ρ le foncteur de Jacquet par son foncteur opposé (d'où la notation).

Proposition 3.1. *Supposons qu'il existe $\rho \in \text{Irr}(G_t)$, $V \in \text{Irr}(G_{n-t})$ telles que $\rho \otimes V$ soit un sous-quotient de $r_{(t, n-t), n}(\pi)$. Il existe alors ρ' une représentation irréductible avec $\text{supp}(\rho') = \text{supp}(\rho)$ et une représentation $V' \in \text{Irr}(G_{n-t})$ telles que π soit un sous-module de $\rho' \times V'$.*

Démonstration. Par hypothèse, $\text{Jac}_\rho(\pi) \neq 0$. Soit $\rho' \otimes V'$ un quotient irréductible de $\text{Jac}_\rho(\pi)$. Alors ρ' est une représentation irréductible avec $\text{supp}(\rho') = \text{supp}(\rho)$ et, la composée du morphisme non nul dans

$$\text{Hom}_{G_{(t, n-t)}}(\text{Jac}_\rho(\pi), \rho' \otimes V') \neq 0$$

avec le morphisme surjectif canonique de $r_{(t, n-t), n}(\pi)$ vers $\text{Jac}_\rho(\pi)$ montre que

$$\text{Hom}_{G_{(t, n-t)}}(r_{(t, n-t), n}(\pi), \rho' \otimes V') \neq 0,$$

et, par réciprocity de Frobenius on trouve le résultat cherché. \square

4. REPRÉSENTATIONS DE $GL_n(D)$

On va rappeler ici quelques résultats de [Ta1] et [Mi2]. Dans [Ta1, §2] (voir aussi [Se, Theorem 3.4] pour une preuve différente valable en toute caractéristique), on montre qu'il existe une fonction qui, à chaque représentation cuspidale ρ associe un entier strictement positif s_ρ tel que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations cuspidales de $GL_{n_1}(D)$ et $GL_{n_2}(D)$, $n_1, n_2 \geq 1$ alors $\rho_1 \times \rho_2$ est réductible si, et seulement si

$$\rho_1 = \nu^{s_{\rho_1}} \rho_2 \text{ ou } \rho_1 = \nu^{-s_{\rho_1}} \rho_2.$$

Pour toute représentation ρ cuspidale on pose $\nu_\rho = \nu^{s_\rho}$.

Soit $\rho \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Delta = \{\rho, \nu_\rho \rho, \dots, \nu_\rho^{n-1} \rho\}.$$

On appelle Δ un segment et l'ensemble de tous les segments sera noté S .

On dit que $\Delta = \{\rho, \nu_\rho \rho, \dots, \nu_\rho^{n-1} \rho\}$, $\Delta' = \{\rho', \nu_{\rho'} \rho', \dots, \nu_{\rho'}^{n'-1} \rho'\}$ sont liés si $\Delta \cup \Delta'$ est encore un segment et $\Delta \not\subseteq \Delta'$ et $\Delta' \not\subseteq \Delta$.

On dit que Δ précède Δ' s'ils sont liés et il existe $\tau \in \Delta$ tel que $\rho' = \tau \nu_\tau$. On dit que $\Delta \geq \Delta'$ s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\rho = \nu_\rho^r \rho', \text{ ou bien } \rho = \rho' \text{ et } n \geq n'.$$

L'ordre ainsi défini n'est total que si l'on se restreint à des segments inclus dans l'ensemble $\{\rho \nu_\rho^t : t \in \mathbb{Z}\}$, où ρ est fixé..

Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments de la forme ci-dessus. On dira qu'un multisegment est rangé si l'on peut l'identifier à l'ensemble indicé $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ où

$$\Delta_r \not\prec \Delta_{r-1} \not\prec \dots \not\prec \Delta_2 \not\prec \Delta_1.$$

Proposition 4.1. *A chaque segment $\Delta = \{\rho, \nu_\rho \rho, \dots, \nu_\rho^{n-1} \rho\}$, ρ étant une représentation cuspidale de G_p , on peut associer des représentations irréductibles $\langle \Delta \rangle$ et $\langle \Delta \rangle^t$ telles que*

- (1) $\langle \Delta \rangle$ (resp. $\langle \Delta \rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\rho \times \nu_\rho \rho \times \dots \times \nu_\rho^{n-1} \rho$.
- (2) $r_{(p, \dots, p), np}(\langle \Delta \rangle) = \rho \otimes \nu_\rho \rho \otimes \dots \otimes \nu_\rho^{n-1} \rho$ (resp. $r_{(p, \dots, p), np}(\langle \Delta \rangle^t) = \nu_\rho^{n-1} \rho \otimes \dots \otimes \nu_\rho \rho \otimes \rho$).

Les représentations $\langle \Delta \rangle$ et $\langle \Delta \rangle^t$ sont aussi caractérisées par la propriété (2). L'ensemble de représentations de la forme $\langle \Delta \rangle^t$ est l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable.

Démonstration. Cf. [Ta1, 2.7.] □

A partir d'un argument d'unitarité on montre le théorème suivant, clé dans toute la construction qui suit :

Théorème 4.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

- (1) Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés.
- (2) $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_n \rangle$ est irréductible.
- (3) $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_n \rangle^t$ est irréductible.

Démonstration. 1 équivaut à 3 par [Ta1, 2.5]. 2 équivaut à 3 par [Aub, Corollaire 3.9.(b)], car les représentations $\langle \Delta \rangle$ et $\langle \Delta \rangle^t$ se correspondent par l'involution de Zelevinsky. \square

Les théorèmes ci-dessous, classifient toutes les représentations irréductibles de G_n en fonction des représentations cuspidales de G_i , $i \leq n$.

Théorème 4.3. (1) Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments et supposons que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j . Alors la représentation $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$ admet un unique quotient irréductible. Il est noté $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$. La multiplicité de $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ dans $\text{JH}(\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t)$ est égale à 1.

- (2) Les représentations $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ et $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t$ sont équivalentes si, et seulement si, les suites $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ sont égales à l'ordre près.
- (3) Toute représentation irréductible de G_n peut s'écrire sous la forme $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$.

Démonstration. Cf. [Ta1, §2] \square

C'est une paramétrisation à la Langlands. De même, on trouve un théorème similaire, à la Zelevinsky, quand on change le mot "quotient" par "sous-module" :

Théorème 4.4. (1) Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments et supposons que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j . Alors la représentation $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ admet une unique sous-représentation irréductible. On la note $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$. La multiplicité de $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ dans $\text{JH}(\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle)$ est égale à 1.

- (2) Les représentations $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ et $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle$ sont équivalentes si, et seulement si, les suites $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ sont égales à l'ordre près.
- (3) Toute représentation irréductible de G_n peut s'écrire sous la forme $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$.

Démonstration. Cf. [Mi2, 2.3.6] \square

Remarque 4.5. Si $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ est un multi-segment rangé, avec $\Delta_1 = \{\rho, \nu_\rho \rho, \dots, \nu_\rho^{n-1} \rho\}$, alors

$$\overline{\text{Jac}}_\rho(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t) \neq \emptyset.$$

En effet, $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ étant un quotient de $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$, $\langle \Delta_1 \rangle^t \otimes \cdots \otimes \langle \Delta_r \rangle^t \in \overline{r}(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t)$, avec \overline{r} le foncteur de Jacquet associé au parabolique approprié.

Définition 4.6. L'automorphisme d'algèbre de \mathcal{R} qui envoie la représentation $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ vers $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ est appelée l'involution de Zelevinsky.

Remarque 4.7. Soit X un sous-ensemble maximal de \mathcal{C} vérifiant la propriété suivante : si $\rho_1, \rho_2 \in X$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\rho_1 = \nu^n \rho_2$, alors $n = 0$. Notons $\mathcal{R}(\rho)$ le sous-ensemble de \mathcal{R} formé des représentations dont le support est inclus dans l'ensemble $\{\rho \nu_\rho^t : t \in \mathbb{Z}\}$. Alors [Ta1, §3]

$$\mathcal{R} = \bigotimes_{\rho \in X} \mathcal{R}(\rho).$$

5. UNICITÉ DU SOUS-MODULE

Le but de cette section est de donner des conditions suffisantes sur deux représentations irréductibles π et ρ pour que leur induite parabolique $\pi \times \rho$ n'ait qu'un seul sous-module irréductible. C'est un problème très intéressant : si c'était toujours le cas, *i.e.* si l'induite parabolique du produit tensoriel de deux représentations irréductibles avait toujours un seul sous-module irréductible alors cela montrerait la conjecture (U0) de [Ta1], *i.e.* le fait que l'induite $\pi \times \rho$ de deux représentations irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_i(D)$ et $\mathrm{GL}_j(D)$ respectivement reste toujours irréductible. Cette conjecture vient d'être prouvée par V. Sécherre (*cf.* [Se]).

Théorème 5.1. Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments non liés vérifiant la condition suivante

$$(5.1) \quad \text{Si } i \neq j, \text{ alors ou bien } \Delta_i = \Delta_j \text{ ou bien } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset.$$

Soit $\rho = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ (*resp.* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$) et $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. Alors $\pi \times \rho$ a un seul sous-module irréductible et il apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$.

Définition 5.2. Soient $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ et $\rho \in \mathrm{Irr}(G_p)$, $p \leq n$. On définit l'entier $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ par

$$l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \left\{ i : \exists \tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}), \tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_i) \right. \\ \left. \text{avec } \mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0, \text{ et } \mathrm{supp}(\tau_2) \subset \mathrm{supp}(\rho) \right\}.$$

Remarque 5.3. On a aussi

$$l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \left\{ i : \exists \tau'_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}), \tau'_2 \in \mathrm{Irr}(G_i) \right. \\ \left. \text{avec } \tau'_1 \otimes \tau'_2 \in \mathrm{JH}(r_{(n-i,i),n}(\pi)), \text{ et } \mathrm{supp}(\tau'_2) \subset \mathrm{supp}(\rho) \right\}.$$

En effet, si $\tau'_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau'_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau'_2) \subset \mathrm{supp}(\rho),$$

d'après la proposition 3.1, il existerait $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau_2) = \mathrm{supp}(\tau'_2) \subset \mathrm{supp}(\rho)$$

et $\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$.

Cette remarque nous permet de définir l'entier $l_\pi^{\text{supp}(\rho)}$ pour π une représentation de longueur finie (non nécessairement irréductible).

Démonstration du théorème 5.1. Posons pour simplifier $l = l_\pi^{\text{supp}(\rho)}$. Soient $\tau_1 \in \text{Irr}(G_{n-l}), \tau_2 \in \text{Irr}(G_l)$, avec $\text{Hom}_{G_n}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$, et $\text{supp}(\tau_2) \subset \text{supp}(\rho)$. Alors,

- (1) La condition (5.1) nous dit que les segments de ρ ne sont pas liés avec ceux de τ_2 dans la paramétrisation à la Langlands (resp. à la Zelevinsky). La représentation $\tau = \tau_2 \times \rho$ est donc irréductible d'après [Ta1, Prop. 2.2] (resp. [Mi2, 2.3.8]).
- (2) Par maximalité de $l_\pi^{\text{supp}(\rho)}$ et la remarque précédente, pour tout $i \geq 1$ et tous

$$\begin{aligned} \rho_1 \otimes \rho_2 &\in \text{JH}(r_{(n-l-i, i), n-l}(\tau_1)), \\ \rho_1 &\in \text{Irr}(G_{n-l-i}) \text{ et } \rho_2 \in \text{Irr}(G_i), \text{ on a} \\ \text{supp}(\rho_2) &\not\subset \text{supp}(\tau). \end{aligned}$$

Le théorème découle du fait que τ et τ_1 sont alors deux représentations irréductibles qui satisfont aux conditions du corollaire 2.2. Leur induite n'a alors qu'un seul sous-module irréductible et donc, $\pi \times \rho$, sous-module non nul de $\tau_1 \times \tau$, n'a, lui aussi, qu'un seul sous-module irréductible. \square

Remarque 5.4. Si V est l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$, alors $l_V^{\text{supp}(\rho)} = l_\pi^{\text{supp}(\rho)} + t$, où $t = \text{gr}(\rho)$. En effet, l'inégalité $l_V^{\text{supp}(\rho)} \geq l_\pi^{\text{supp}(\rho)} + t$ est claire. Pour l'autre, on remarque que, puisque le foncteur de Jacquet est exact, pour tout $\rho' \in \text{Irr}$, si $\overline{\text{Jac}}_{\rho'}(V) \neq 0$, alors $\overline{\text{Jac}}_{\rho'}(\pi \times \rho) \neq 0$ et donc $l_V^{\text{supp}(\rho)} \leq l_{\pi \times \rho}^{\text{supp}(\rho)}$. Ce dernier entier, par le lemme géométrique, vaut $l_\pi^{\text{supp}(\rho)} + t$.

En passant à la contragrédiente on trouve :

Corollaire 5.5. *Avec les mêmes hypothèses, $\pi \times \rho$ a un unique quotient irréductible et il apparaît avec multiplicité 1.*

De la même façon, en utilisant le foncteur de Jacquet opposé et en redéfinissant de façon appropriée l'entier l , on montre le théorème ci-dessous.

Théorème 5.6. *Avec les hypothèses de 5.1, $\rho \times \pi$ a un seul sous-module (resp. quotient) irréductible et il apparaît avec multiplicité 1.*

On considère pourtant que les conditions ne sont pas nécessaires et on se pose la question suivante :

Question 5.7. Est-ce que l'induite parabolique du produit tensoriel de deux représentations irréductibles a toujours un seul sous-module irréductible?

Remarquons que l'induite du produit tensoriel de *trois* représentations irréductibles peut avoir deux sous-modules irréductibles (Par exemple, cf. [Ze1, 11.2], la représentation $1 \times | \times 1$ de $\mathrm{GL}_3(F)$).

6. CALCUL EXPLICITE

Dans cette section on se propose de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Le premier lemme est une transcription du lemme II.9. de [MW] dans nos notations.

Nous introduisons quelques autres notations dont nous aurons besoin. On fixe une représentation cuspidale α de $\mathrm{GL}_n(D)$. D'après la remarque 4.7, il suffit de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module de $\pi \times \alpha$ pour π une représentation irréductible dans $\mathcal{R}(\alpha)$. Ainsi on peut identifier un segment $\Delta = \{\nu_\alpha^t \alpha, \nu_\alpha^{t+1} \alpha, \dots, \nu_\alpha^r \alpha\}$ à une suite $\{t, t+1, \dots, r\}$. Dorénavant, s'il n'y pas d'ambiguïté, quand on a fixé une représentation cuspidale, on utilisera indifféremment les deux notations. On notera aussi $b(\Delta) = t$ (ou $b(\Delta) = \nu_\alpha^t \alpha$), $e(\Delta) = r$ (ou $e(\Delta) = \nu_\alpha^r \alpha$) et ${}^+ \Delta$ (resp. ${}^- \Delta$) le segment ${}^+ \Delta = \{\nu_\alpha^{t-1} \alpha, \dots, \nu_\alpha^r \alpha\}$ (resp. ${}^- \Delta = \{\nu_\alpha^{t+1} \alpha, \dots, \nu_\alpha^r \alpha\}$).

On notera aussi $\langle \emptyset \rangle^t$ la représentation triviale de G_0 et pour toute représentation V , $\widehat{V} = \langle \emptyset \rangle^t$ (ce qui signifie, en pratique, qu'on ôte la présence de V dans la notation). Le lemme ci-dessous est une adaptation du lemme II.9. de [MW] dans nos notations, la preuve étant la même :

Lemme 6.1. *Soient c un entier, $\rho = \nu^c \alpha$ la représentation associée de $\mathrm{GL}(n, D)$, et π une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(N - n, D)$ paramétrée, à la Langlands, par le multisegment rangé $m = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$. Alors l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(N, D)$ qui sont isomorphes à des sous-représentations de $\pi \times \rho$ (resp. à des quotients de $\rho \times \pi$) est inclus dans l'ensemble des représentations irréductibles suivantes :*

$\langle \{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$
 $\langle \Delta_1, \dots, {}^+ \Delta_s, \dots, \Delta_r \rangle^t$ où Δ_s est un segment de m débutant à $c+1$, et où s parcourt les entiers vérifiant la propriété suivante : notons $\Delta_{j(1)}, \dots, \Delta_{j(t_\pi)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) commençant par c ; pour tout entier v compris entre 1 et r , on définit, inductivement sur v , l'entier $i(v)$ comme étant soit le plus grand entier différent de $i(1), \dots, i(v-1)$, tel que $\Delta_{i(v)}$ commence par $c+1$ et soit précédé par $\Delta_{j(v)}$, soit $i(v) = r+1$ si un tel entier n'existe pas; alors s ne doit pas être l'un des entiers $i(v)$ qui viennent d'être définis.

On note $k(1), \dots, k(w_\pi)$, ceux des entiers $j(v)$, pour $v \in \{1, \dots, t_\pi\}$, pour lesquels $i(v)$ est inférieur ou égal à r , $k(1), \dots, k(w_\pi)$ étant écrits dans l'ordre croissant. Remarquons qu'on a $w_\pi \leq t_\pi$. On note aussi $h(1), \dots, h(w_\pi)$ les $i(v)$ correspondants; $l(1), \dots, l(u_\pi)$ les $i(v)$ différents

de ceux qui viennent d'être définis. On pose $l'_\pi = (t_\pi - w_\pi)$ et $s(1), \dots, s(l'_\pi)$ les $i(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis.

Remarquons que les entiers $t_\pi, w_\pi, u_\pi, l'_\pi$ ne dépendent que des segments $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$. On garde pourtant les sous-indices π pour simplifier la notation.

Le lemme suivant est la clé de tout ce qui suit :

Lemme 6.2. *Soient $\Delta = \{b, \dots, e\}, \Delta' = \{b', \dots, e'\}$ deux segments tels que Δ précède Δ' . Alors $\overline{\text{Jac}}_b(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t) \neq \emptyset \Leftrightarrow b' \neq b + 1$*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \rightarrow \langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \rightarrow \langle \Delta, \Delta' \rangle^t \rightarrow 0.$$

Par le lemme géométrique on a :

- (1) La représentation $r_{((e'-b)n, n), (e'-b+1)n}(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t)$ est composée des représentations $(\langle -\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) \otimes b$ et $(\langle \Delta \rangle^t \times \langle -\Delta' \rangle^t) \otimes b'$.
- (2) La représentation $r_{((e'-b)n, n), (e'-b+1)n}(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t)$ est composée des représentations $(\langle -(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t) \otimes b$ et $(\langle (\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle -(\Delta \cap \Delta') \rangle^t) \otimes b'$ (si $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$).

et donc

$$\begin{aligned} \overline{\text{Jac}}_b(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) &= (\langle -\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) \otimes b \\ \overline{\text{Jac}}_b(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t) &= (\langle -(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t) \otimes b. \end{aligned}$$

Ainsi, par exactitude du foncteur de Jacquet, on a $\overline{\text{Jac}}_b(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t) = \langle -\Delta, \Delta' \rangle^t \otimes b$ si, et seulement si, $\langle -\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \neq \langle -(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t$, i.e, si $b' \neq b + 1$. \square

Cela implique le

Corollaire 6.3. *Avec les notations de 5.1 et 6.1, ρ étant toujours une représentation cuspidale de G_n , on a $l_\pi^{\{\rho\}} \leq nl'_\pi$.*

Démonstration. Pour tout entier i compris entre 1 et r , on pose

$$V_i = \begin{cases} \Delta_i, & \text{si } i \notin \{h(v) : 1 \leq v \leq w_\pi\} \cup \{k(v) : 1 \leq v \leq w_\pi\} \\ \langle \Delta_{h(v)}, \Delta_{k(v)} \rangle^t, & \text{si } i = h(v), 1 \leq v \leq w_\pi, \\ \langle \emptyset \rangle^t, & \text{si } i = k(v), 1 \leq v \leq w_\pi \end{cases}$$

D'après [MW, Preuve du Lemme II.9] π est un quotient de $V_1 \times \dots \times V_r$, et donc, par exactitude du foncteur de Jacquet $l_\pi^{\{\rho\}} \leq l_{V_1 \times \dots \times V_r}^{\{\rho\}}$.

D'un autre côté, par le lemme 6.2, les seuls V_i tels que $\overline{\text{Jac}}_\rho(V_i) \neq \emptyset$ sont les $V_{s(i)}$ avec $1 \leq i \leq l'_\pi$ et donc, par le lemme géométrique

$$l_{V_1 \times \dots \times V_r}^{\{\rho\}} = nl'_\pi,$$

qui prouve le lemme. \square

On définit deux opérateurs :

$$\begin{aligned} Q_c & : M(S) \longrightarrow M(S) \\ S_c & : M(S) \longrightarrow M(S), \end{aligned}$$

par les formules ci-dessous. Notons $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$; on rappelle qu'on a défini en 6.1 des entiers u_π, l'_π . Alors :

$$\begin{aligned} Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) & = \begin{cases} \{\Delta_1, \dots, {}^+ \Delta_{l(1)}, \dots, \Delta_r\} & \text{si } u_\pi \geq 1 \\ \{\{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r\} & \text{si } u_\pi = 0 \end{cases} \\ S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) & = \begin{cases} \{\Delta_1, \dots, {}^- \Delta_{s(l'_\pi)}, \dots, \Delta_r\} & \text{si } l'_\pi \geq 1 \\ \emptyset & \text{si } l'_\pi = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où le multisegment $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ est supposé rangé.

Le lemme ci-dessous explicite, en termes des segments, l'action de S_c sur un multisegment :

Lemme 6.4. *Soit $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ un multisegment. Notons $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ le multisegment $S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\})$, et $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$. Alors,*

$$(1) \Delta'_{h(v)} = \Delta_{h(v)} \text{ et } \Delta'_{k(v)} = \Delta_{k(v)} \text{ pour tout } v = 1, \dots, t_\pi,$$

$$(2) \Delta'_{l(v)} = \begin{cases} {}^- \Delta'_{s(l'_\pi)} & \text{si } v = 1 \\ \Delta'_{l(v-1)} & \text{si } v = 2, \dots, w_\pi + 1. \end{cases}$$

Démonstration. On a $\Delta'_{j(v)} = \begin{cases} \Delta'_{j(v)} & \text{si } v < j^{-1} \circ s(l'_\pi) \\ \Delta'_{j(v+1)} & \text{si } v \geq j^{-1} \circ s(l'_\pi). \end{cases}$

Montrons (1) par récurrence sur v :

Par construction de k , il n'y a pas de segment Δ_α commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\alpha)}$, ${}^- \Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. D'où

$$\Delta'_{k(1)} = \Delta_{k(1)}.$$

$\Delta_{h(1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(1)}$ et minimal parmi les Δ_α vérifiant ces deux propriétés.

- Si $k(1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^- \Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(1)}$.
- Si $k(1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(1)$), alors $\Delta_{h(1)} \leq {}^- \Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(1)} = \Delta_{h(1)}.$$

Supposons maintenant que $\Delta'_{h(i)} = \Delta_{h(i)}$ et $\Delta'_{k(i)} = \Delta_{k(i)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, v\}$, et montrons que $\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}$ et $\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}$.

Il n'y a pas de segment Δ_α commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \dots, k(v)\}$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\alpha)}$, le segment ${}^- \Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$

pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \dots, k(v)\}$ (ce sont des " $\Delta_{s(\beta)}$ "...). D'où

$$\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}.$$

$\Delta_{h(v+1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_r\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(v+1)}$ différent des $\Delta_{h(\beta)}$, pour $\beta \leq v$ et minimal parmi les Δ_α vérifiant ces trois propriétés.

- Si $k(v+1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(v+1)}$.
- Si $k(v+1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(v+1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(v+1)$), alors $\Delta_{h(v+1)} \leq {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}.$$

Pour montrer (2) il suffit, d'après ce qui précède, de remarquer que $\Delta_{l(1)} \leq {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$. \square

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate :

Corollaire 6.5. (1) Si $l'_\pi \geq 1$, alors $Q_c \circ S_c = Id_{M(S)}$.

(2) Si $l'_\pi \geq 1$, alors $l'_{\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} - 1$.

(3) $l'_{\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} + 1$.

(4) Si ω_i est l'un des sous-modules décrits dans le lemme 6.1 et $\omega_i \not\cong \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$, alors $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t}$.

Le théorème suivant est la conclusion de notre étude soigneuse :

Théorème 6.6. Soient ρ une représentation cuspidale de G_n , $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$. Avec les notations précédentes, on a :

(1) $l_\pi^{\{\rho\}} = nl'_\pi$

(2) L'unique sous-module irréductible de $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t \times \rho$ est $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$.

(3) Si $l'_\pi \geq 1$, $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ est un sous-module irréductible de $\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle \times \rho$.

(4) L'unique quotient irréductible de $\rho \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ est $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$.

Démonstration. (3) est une conséquence de (2) et 6.5.(1).

Montrons (1) et (2) par récurrence sur l'_π .

Si $l'_\pi = 0$, d'après 6.3 on a $l_\pi^{\{\rho\}} = 0$. Si $\pi \times \rho$ avait pour sous-modules l'un des $\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$, on aurait, par 6.5.(4), l'égalité $l'_{\omega_i} = 0$, donc $l'_{\omega_i}^{\{\rho\}} = 0$ ce qui est absurde par 5.4.

Supposons $l'_\pi = k > 0$. Alors, par 6.5.(2),

$$l'_{\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} - 1$$

donc, par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour la représentation $\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$, i.e.

- (1) $\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$ est l'unique sous-module de $\pi \times \rho$. Or,
- $$\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t = \pi$$

par 6.5.(1).

- (2) $l_{\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t}^{\{\rho\}} = n(k-1)$.

Par 5.4, on a que $l_{\pi}^{\{\rho\}} = n(k-1) + n = kn$.

Finalemnt supposons que $\pi \times \rho$ a pour sous-module l'un des $\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$. Alors, par 6.5.(4) on aurait $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} = k$. On vient de montrer que, si $l'_{\omega_i} = k$, on trouve par hypothèse de récurrence $l_{\omega_i}^{\{\rho\}} = kn = l_{\pi}^{\{\rho\}}$ ce qui est absurde, par 5.4.

(4) est une conséquence de (1), de 6.5.(4) et de 5.6 ce qui achève la démonstration du théorème. \square

7. APPLICATIONS

La proposition suivante est due à [GK] dans le cas où $D = F$, mais leur preuve n'est pas valable quand D n'est pas commutatif car la transposée d'une matrice inversible n'est plus forcément inversible. Elle découle immédiatement des parties 2. et 4. du théorème précédent.

Proposition 7.1. *Soient $\pi, \pi' \in \text{Irr}, \rho \in \mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{Hom}(\pi', \pi \times \rho) \neq 0$;
(2) $\text{Hom}(\rho \times \pi, \pi') \neq 0$.

Remarque 7.2. On pense, bien sûr, que l'hypothèse ρ cuspidale n'est pas nécessaire.

Notons $\Delta_{j'(1)}, \dots, \Delta_{j'(t'_\pi)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) se terminant par c ; pour tout entier v compris entre 1 et t'_π , on définit inductivement sur v , l'entier $i'(v)$ comme étant soit le plus petit entier différent de $i'(1), \dots, i'(v-1)$, tel que $\Delta_{i'(v)}$ termine par $c-1$ et précède $\Delta_{j'(t'_\pi-v+1)}$, soit $i'(v) = r+1$ si un tel entier n'existe pas. On note $l'(1), \dots, l'(u'_\pi)$ les $i'(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis.

$$\omega'_0 = \langle \{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t.$$

$$\omega'_i = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_{i'(i)}^+, \dots, \Delta_r \rangle^t, \text{ où } i \in 1, \dots, u'_\pi.$$

On a défini les entiers $j'(v), i'(v)$ pour que, en appliquant la contragrédiente à partir du théorème 6.6(2), on trouve :

Corollaire 7.3. *L'unique quotient irréductible de $\pi \times \rho$ est ω'_1 , si $u'_\pi > 0$ où ω'_0 , si $u'_\pi = 0$.*

Si $\pi \times \rho$ est irréductible, alors il est clair que $u'_\pi = u_\pi = 0$. Réciproquement, si $u'_\pi = u_\pi = 0$ on a que $\omega_0 = \omega'_0$ est le seul quotient et sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Or, d'après 5.1, ω_0 apparaît avec multiplicité 1 dans $\text{JH}(\pi \times \rho)$, d'où

Théorème 7.4. $\pi \times \rho$ est irréductible si, et seulement si, $u'_\pi = u_\pi = 0$.

Maintenant il est clair que tout ce qui précède dans cette section est aussi vrai pour les paramétrisations à la Zelevinsky. Il suffit de remplacer, dans les énoncés et les preuves,

- (1) Le mot *quotient* par *sous-représentation*,
- (2) le mot *sous-représentation* par *quotient*,
- (3) le sens de toutes les flèches
- (4) le symbole $\langle \rangle^t$ par $\langle \rangle$,
- (5) le foncteur r (resp. \bar{r}) par le foncteur \bar{r} (resp. r).

Ainsi, on montre un théorème similaire au théorème 6.6 :

Théorème 7.5. (1) L'unique quotient irréductible de la représentation $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle \times \rho$ est $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle$.
 (2) L'unique sous-module irréductible de $\rho \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ est $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle$.

Corollaire 7.6. Soient ρ une représentation cuspidale et π une représentation irréductible. Notons τ l'involution de Zelevinsky (voir 4.6). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) V est un sous-module irréductible de $\rho \times \pi$.
- (2) $\tau(V)$ est un sous-module irréductible de $\tau(\pi) \times \tau(\rho)$.

Démonstration. C'est une conséquence de 7.5.(2), 6.6.(2) et 4.7. \square

La conséquence de ce corollaire est que les résultats du papier [MW] sont valables pour des représentations complexes de $\mathrm{GL}_r(D)$ comme c'était conjecturé dans [Ta1, Conjecture 3.6]. En effet, toute la partie I de [MW] était consacré à la preuve du corollaire 7.6 pour π et ρ des représentations *irréductibles* d'une certaine algèbre de Hecke mais pour la preuve du théorème qui suit, ils n'utilisaient que le corollaire précédent.

Théorème 7.7. L'involution τ vérifie la description géométrique de [Ze2] et la description combinatoire de [MW].

Démonstration. Il suffit de changer dans la preuve du théorème [MW, II.13] la proposition [MW, I.7.3] par le corollaire précédent. \square

ANNEXE A. LA CORRESPONDANCE THÊTA

Ici on montre un lemme qui nous aidera à calculer explicitement la correspondance thêta dans [Mi1]. On continue avec les notations de la section 6. Soient a, b, c des entiers.

Lemme A.1. Soit $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_r\}$ un multisegment et posons π la sous-représentation irréductible de $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_r \rangle^t \times \langle c \rangle$ et π' la sous-représentation irréductible de $\langle b, \dots, b-a, \Delta'_1, \dots, \Delta'_r \rangle^t \times \langle c \rangle$.

Si $c \notin \{b, b - a - 1\}$ et $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$, alors

$$\pi' = \langle b, \dots, b - a, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t.$$

Démonstration. La condition $c \notin \{b, b - a - 1\}$ équivaut au fait que c et $c + 1$ appartiennent tous les deux à $\{b, b - 1, \dots, b - a, b - a - 1\}$ ou aucun des deux. Ainsi, si l'on note $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ (resp. $\{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}$) le sous-ensemble de $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ (resp. $\{b, \dots, b - a, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$) des segments commençant par c ou $c + 1$ on a que :

(1) Si $c \in \{b, b - 1, \dots, b - a, b - a - 1\}$, alors

$$\{c, c + 1, \delta_1, \dots, \delta_n\} = \{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}.$$

(2) Si $c \notin \{b, b - 1, \dots, b - a, b - a - 1\}$, alors

$$\{\delta_1, \dots, \delta_n\} = \{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}.$$

Dans le deuxième cas le lemme est une conséquence immédiate de 6.6. Dans le premier cas, il est évident, par récurrence comme dans 6.4, que $\delta'_{l(v)} = \delta_{l(v)}$ pour $v = 1, \dots, \omega_{\langle \delta'_1, \dots, \delta'_{n'} \rangle^t}$ et $\omega_{\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle^t} = \omega_{\langle \delta'_1, \dots, \delta'_{n'} \rangle^t}$. On achève la démonstration avec le théorème 6.6. \square

On récrit le lemme dans les notations qu'on utilisera dans [Mi1]. On rappelle qu'on a défini, pour $g \in D^\times$, $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_D(g)|_F$.

Définition A.2. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, quotient de Langlands de $\tau_1 \times \dots \times \tau_r$, où τ_1, \dots, τ_r sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Notons alors $\theta_m^*(\pi)$ le quotient de Langlands de

$$\nu^{\frac{m-2n-1}{2}} \times \dots \times \nu^{\frac{-m+1}{2}} \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \tilde{\tau}_1 \times \dots \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \tilde{\tau}_r.$$

Corollaire A.3. Soient ρ une représentation cuspidale de G_p , $\rho \neq$

$$\begin{cases} \nu^{\frac{n+1}{2}} \\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}} \end{cases}, \pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-p}), \text{ et } \pi \text{ l'unique sous-représentation irréductible}$$

de $\rho \times \pi_1$. Notons π' l'unique sous-représentation irréductible de $\nu^{\frac{-p}{2}} \theta_{m-p}^*(\nu^{\frac{-p}{2}} \pi_1) \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \tilde{\rho}$. Alors

$$\pi' = \theta_m^*(\pi).$$

Démonstration. En effet, par 4.7, on peut supposer que pour tout $i \leq r$, $\mathrm{supp}(\tau_i) \subset \mathcal{R}\left(\nu^{\frac{n+1}{2}}\right)$. De même $\rho \in \mathcal{R}\left(\nu^{\frac{n+1}{2}}\right)$, sinon le résultat est trivial. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\rho = \nu^{-c}$ et soient $\Delta'_1, \dots, \Delta'_r$ des segments tels que $\pi_1 = \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t$. Alors π est, par 7.1, l'unique sous-module irréductible de $\langle \tilde{\Delta}'_1, \dots, \tilde{\Delta}'_{r'} \rangle^t \times \langle \nu^c \rangle$. Le corollaire découle maintenant du lemme A.1, avec $b = \frac{-n-1}{2}$ et $a = m - n$. \square

Est-il possible de montrer ce théorème sans utiliser tous les calculs de la section précédente ?

RÉFÉRENCES

- [Aub] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p -adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179-2189 et *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1995), 4687-4690.
- [Ber] I.N. Bernstein, *Representations of p -adic groups*, Notes by K.E. Rumelhart, Harvard Univ. 1992.
- [Cas] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*, preprint.
- [GK] I.M. Gelfand, D.A. Kazhdan, *Representations of the group $GL(n, K)$ where K is a local field*, Lie Groups and their representations, I.M. Gelfand ed., London 1975.
- [Mi1] A. Mínguez, *Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II*, prépublication avril 2007.
- [Mi2] A. Mínguez, *Correspondance de Howe l -modulaire : paires duales de type II*, thèse, Orsay 2006.
- [Moe] C. Mœglin, *Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales ; le cas des groupes classiques p -adiques*. Ann. Math. 151, 817–847 (2000)
- [MVW] C. Mœglin, M.F. Vignéras, J.L. Waldspurger, *Correspondance de Howe sur un corps p -adique*, LNM 1291, Springer-Verlag, 1987.
- [MW] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Sur l'involution de Zelevinsky*, J. Reine Angew. Math. **372** (1986), 136-177.
- [Se] V. Sécherre, *Proof of the Tadic conjecture $U0$ on the unitary dual of $GL_m(D)$* , prépublication 2006.
- [Ta1] M. Tadić *Induced representations of $GL(n, A)$ for p -adic division algebras* J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48-77.
- [Ta2] M. Tadić *Representation theory of $GL(n)$ over a p -adic division algebra and unitarity in the Jacquet-Langlands correspondence*. Pacific J. Math. 223 (2006), no. 1, 167-200.
- [Ze1] A.V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive p -Adic Groups II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e serie, t. 13, 1980, 165-210.
- [Ze2] A.V. Zelevinsky, *p -adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Funct. Anal. Appl. **15**, (1981) 83-92.

ALBERTO MÍNGUEZ, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, BÂT 425 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE, CNRS UMR 8628., URL: <http://www.math.u-psud.fr/~minguez/>
E-mail address: minguez@clipper.ens.fr