



**HAL**  
open science

## Analyse modale sans Transformée de Fourier

José Lozada, Xavier Boutillon, Bertrand David

► **To cite this version:**

José Lozada, Xavier Boutillon, Bertrand David. Analyse modale sans Transformée de Fourier. 8ème Congrès Français d'Acoustique, 2006, Tours, France. 4 p. hal-00170230

**HAL Id: hal-00170230**

**<https://hal.science/hal-00170230v1>**

Submitted on 17 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Analyse modale sans Transformée de Fourier

José Lozada<sup>1</sup>, Xavier Boutillon<sup>1</sup>, Bertrand David<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.

courriel : lozada@lms.polytechnique.fr, boutillon@lms.polytechnique.fr

<sup>2</sup> Télécom' Paris, 46, rue Parraut, 75634 Paris Cedex 13.

courriel : bertrand.david@enst.fr

### Résumé

L'analyse modale traditionnelle fait appel à la transformée de Fourier pour l'estimation de la fréquence modale (et éventuellement de l'amortissement modal) et utilise le rapport spectral entre réponse vibratoire et force excitatrice pour estimer les amplitudes (et éventuellement les phases) modales. Cette technique est peu performante pour estimer des modes dont les fréquences sont proches en regard de leur amortissement intrinsèque.

Nous gardons le mode opératoire traditionnel de l'excitation par marteau d'impact et capture de la réponse vibratoire par accéléromètre. Nous estimons tout d'abord le filtre  $g$  à appliquer à chaque excitation  $f(t)$  du système pour la transformer en impulsion :  $f * g = \delta$ . L'application de ce même filtre à la réponse vibratoire donne ainsi la réponse impulsionnelle normée en chaque point. En théorie modale linéaire, cette réponse impulsionnelle prend la forme d'une somme de sinusoides exponentiellement décroissantes. Nous pouvons donc leur appliquer une analyse spectrale paramétrique (ici, l'algorithme ESPRIT) qui permet d'obtenir les paramètres modaux (fréquence, amortissement, amplitude et phase éventuellement) avec une précision bien meilleure que celle offerte par l'analyse de Fourier.

Nous présenterons en particulier l'application de cette méthode à la séparation entre le mouvement transitoire de corps rigide et les premiers modes de vibration d'une touche de piano.

### Introduction

Lorsqu'une structure mécanique vibrante a un comportement linéaire, on peut décomposer son mouvement libre en une somme de modes propres, produits d'une déformée modale par une exponentielle *complexe* :

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_k A_k(\mathbf{x}) e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1)$$

La transformée de Fourier consiste à représenter un signal sous la forme d'une somme de sinusoides *réelles*. On voit donc immédiatement qu'il s'agit d'une représentation intrinsèquement mal adaptée à l'analyse modale. Le prix de cette inadaptation est la nécessité d'utiliser un ensemble de sinusoides (sur une bande fréquentielle de largeur  $\approx \alpha$ ) pour rendre compte d'un seul mode. L'inadaptation est donc d'autant plus coûteuse que  $\alpha$  est grand.

Une autre source de problème vient de ce que la réponse impulsionnelle d'un système mécanique, un ingrédient de base de l'analyse modale, est bornée dans le temps alors que les sinusoides analysants de la transformée de Fourier ne le sont pas.

Ces difficultés sont particulièrement difficiles à surmonter pour l'analyse :

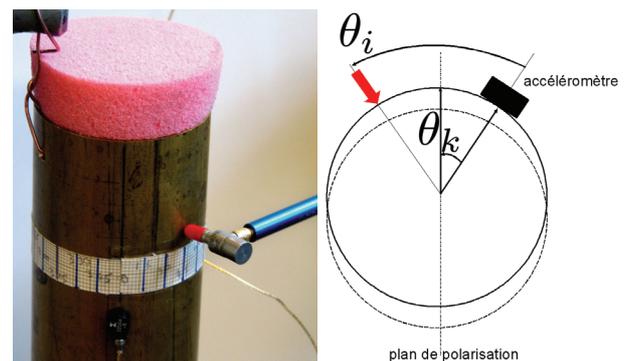
- de modes proches ; "proche" s'entend ici au sens où la différence entre deux fréquences modales successives est de l'ordre de  $\alpha$  ;
- du mouvement de corps rigide lorsque la représentation fréquentielle de ce dernier s'étend jusque vers la fréquence du premier mode de la structure ("vers" signifiant ici "dans le  $\alpha$ -voisinage").

La solution que nous proposons consiste à analyser la réponse temporelle d'une structure à une excitation de nature impulsionnelle en deux étapes :

- construction de la réponse impulsionnelle estimée ;
- traitement de cette estimation par un algorithme recherchant une représentation des signaux en somme d'exponentielles complexes.

## Analyse d'un système vibratoire

### Description du système



**Fig. 1:** Mesure sur la circonférence d'une poutre de sa vibration en flexion.

La poutre représentée figure 1 est un tube de section circulaire, creux ( $\varnothing_{int} \approx 45$  mm,  $\varnothing_{ext} \approx 47$  mm,  $L \approx 905$  mm), en laiton, suspendu par un fil. Pour des conditions d'extrémité que l'on peut considérer comme libre-libre, les fréquences propres de flexion sont données par :

$$f_k = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \beta_k^2 \quad (2)$$

où  $L$  est la longueur de la poutre,  $E$  et  $\rho$  le module d'Young et la densité du matériau,  $S$  et  $I_z$  respectivement la surface et le moment quadratique de la section ;  $\beta_k \simeq k + \frac{1}{2}$ . Nous avons examiné les deux premiers modes propres, à  $\simeq 240$  Hz et  $\simeq 650$  Hz.

Chaque mode de flexion prend place dans un plan de polarisation. En l'absence de dissymétrie du système, deux plans orthogonaux quelconques sont le siège de deux modes orthogonaux, de même fréquence et de même déformée modale dans son plan. Ce système admet donc une série dédoublée de modes propres "jumeaux" ; aucun plan de polarisation n'est particularisé : les modes sont dégénérés. En pratique, c'est l'impulsion initiale qui détermine la polarisation du mouvement. Une dissymétrie dans le système lève la dégénérescence : deux modes jumeaux se différencient (légèrement) en fréquence et en déformée modale ; deux plans orthogonaux particuliers apparaissent, chacun siège de l'un des deux modes.

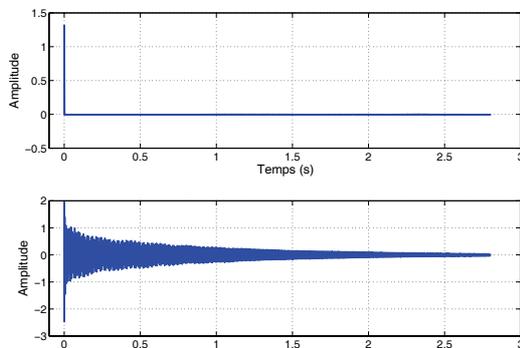
Le mouvement est provoqué par l'impact d'un petit marteau et le mouvement orthogonal à la surface du tube mesuré au moyen d'un accéléromètre, tous deux montrés sur la figure 1. L'accéléromètre est collé en  $\theta = 0$ . La position angulaire  $\theta_i$  de l'impact est repérée par du papier gradué (6 mm  $\leftrightarrow$  15 degrés).

Le mouvement d'un mode propre dont le plan de polarisation est repéré par  $\theta_k$  (figure 1) se traduit (dans la mesure) par sa projection dans la direction de mesure de l'accéléromètre. Le long de la circonférence du tube, chaque déformée modale prend donc la forme :

$$A_{mes} = A_k \cos(\theta_i - \theta_k) \quad (3)$$

## Analyses de Fourier

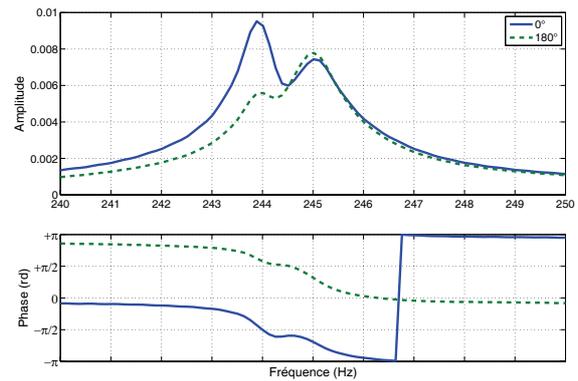
Afin de réaliser une analyse modale de la structure décrite plus haut, on a enregistré les mouvements et les forces appliqués lors d'impacts successifs sur toute la circonférence. Pour chaque point d'excitation, on obtient des signaux tels que ceux présentés dans la figure 2.



**Fig. 2:** Force d'excitation (haut) et accélération vibratoire (bas).

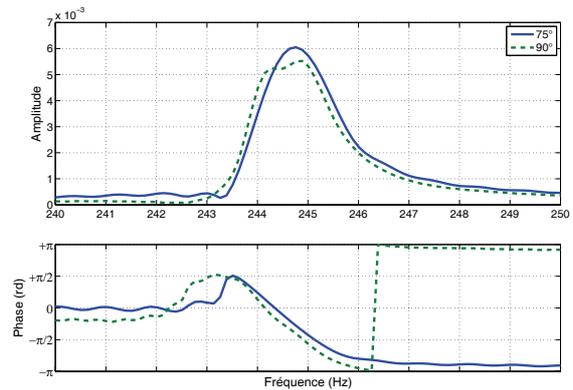
Leurs spectres sont calculés par transformée de Fourier (figures 3 et 4). Dans un cas, on voit deux pics correspondants aux modes jumeaux. L'amortissement propre

de la structure occasionne un recouvrement assez fort entre ces deux résonances.



**Fig. 3:** Spectre de l'accélération. Premier mode de poutre (modes jumeaux) pour deux positions d'excitation.

Il serait cependant possible de caractériser les paramètres modaux à l'aide de techniques d'identification. Par contre, pour les positions où le rapport des amplitudes modales devient plus faible (prédominance d'un des modes), il devient très difficile d'identifier deux modes distincts (figure 4).



**Fig. 4:** Spectre de l'accélération. Premier mode de poutre (modes jumeaux) pour deux positions d'excitation.

## Estimation de la réponse impulsionnelle

Le mode propre d'une structure est une composante de sa réponse impulsionnelle mais en pratique, l'excitation d'une structure n'est jamais strictement impulsionnelle. Dans l'analyse modale traditionnelle, chaque réponse est donc au préalable normalisée par la transformée de Fourier de l'impulsion qui l'a provoquée (les analyses ci-dessus n'ont pas fait l'objet de telles normalisations). Ici, nous estimons la réponse impulsionnelle  $\gamma_{imp}(t)$  (en notant qu'une impulsion génère une vitesse initiale  $v_{imp}(0)$  généralement non nulle) en deux temps :

(a) Estimation du filtre  $g$  qu'il faudrait appliquer à la force  $f_{mes}(t)$  exercée par le marteau d'impact sur la structure pour que cette force devienne une impulsion. Pour des raisons de causalité, cette impulsion n'intervient pas à  $t = 0$  mais est décalée dans le temps de  $p$

échantillons :

$$f_{mes} * g = \delta_p \quad (4)$$

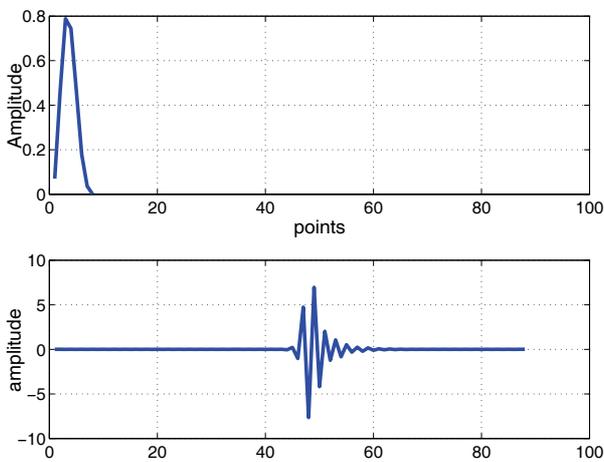
(b) Calcul de  $\gamma_{imp}$  à partir de la réponse réelle  $\gamma_{mes}$ . Une structure initialement à l'équilibre et au repos, soumise à la force  $f_{mes}$ , prend l'accélération  $\gamma_{mes}$  donnée par :

$$\gamma_{mes} = \gamma_{imp} * f_{mes} + v_{imp}|_{t=0} \cdot f_{mes} \quad (5)$$

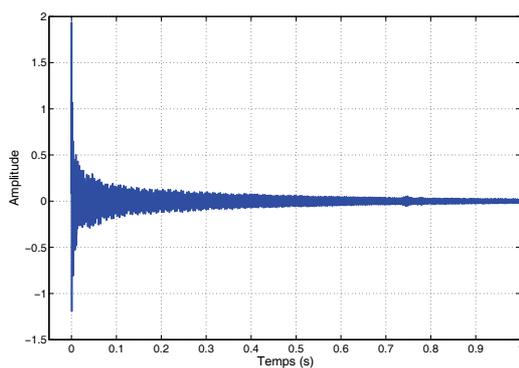
$$(4) \Rightarrow \gamma_{imp} = (\gamma_{mes} * g)_{-p} - v_{imp}|_{t=0} \cdot \delta \quad (6)$$

où  $(.)_{-p}$  indique le décalage de  $-p$  échantillons.

La figure 5 montre un exemple d'impulsion réelle et le filtre  $g$  qu'il faut lui appliquer (on a choisi ici  $p = 50$ ) pour la transformer en impulsion idéale.  $g$  est calculé par optimisation avec critère de moindre carrés et contrainte sur la symétrie du résultat. La figure 6 montre la réponse impulsionnelle obtenue par l'équation (6).



**Fig. 5:** Impulsion réelle (haut), filtre (bas) pour la transformer en impulsion idéale.



**Fig. 6:** Réponse impulsionnelle

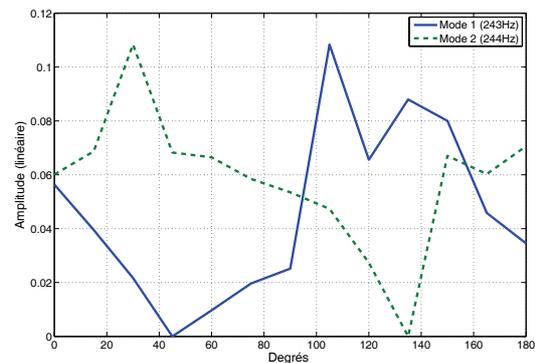
## Analyse modale par ESPRIT

L'algorithme ESPRIT [1, 2] fait partie de la famille des méthodes d'analyse spectrale à haute résolution [3]; il recherche une décomposition du signal en somme de sinusoides amorties dont il donne les fréquences et amplitudes complexes, c'est-à-dire la fréquence et l'amortissement des modes, ainsi que leur amplitude et phase au

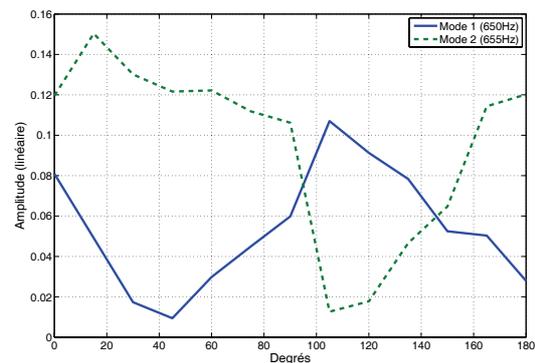
point de mesure (Eq 1). Il s'agit donc d'une méthode paramétrique correspondant précisément à la forme du signal que l'on veut analyser, à la différence de la transformée de Fourier, non paramétrique.

L'analyse fait apparaître deux composantes vers 240 Hz (une seule à 45 et 135 degrés) et deux composantes vers 650 Hz. Leurs amplitudes sont tracées en fonction de la position de mesure (figures 7 et 8). Les deux couples de modes suivent assez bien la loi donnée par l'équation (3); de plus, le nœud d'un mode correspond bien au ventre du mode jumeau (plans de polarisation en principe orthogonaux). On peut donc considérer que ces modes ont bien été identifiés.

Il convient de noter que les figures 7 et 8 ont été obtenues sans lissage ni moyennage. L'incertitude sur la position d'impact peut être évaluée à  $\pm 3^0$  environ, ce qui est relativement important. De plus, la direction de l'impact n'est jamais exactement perpendiculaire à la surface de la poutre de sorte que l'amplitude mesurée de la force exercée ne correspond qu'approximativement à l'intensité réelle de l'excitation.



**Fig. 7:** Séparation des modes jumeaux à 240 Hz



**Fig. 8:** Séparation des modes jumeaux à 650 Hz

## Séparation vibration - mouvement de corps rigide

Pour les besoins d'une autre étude, nous nous sommes intéressés au mouvement de corps rigide d'une touche de

piano soumise à une force de type échelon. La touche (figure 9) peut être considérée comme une poutre de section rectangulaire en rotation autour d'un point fixe.

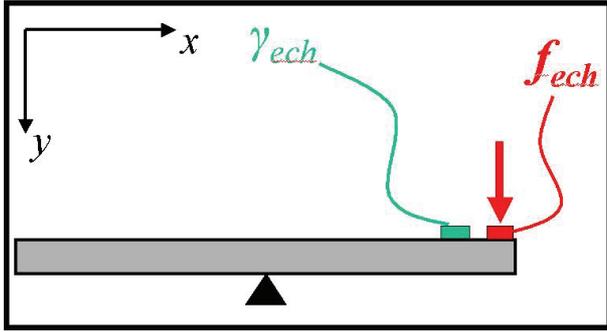


Fig. 9: Touche de piano

L'amplitude de la vibration est du même ordre de grandeur que celle du mouvement de corps rigide et les domaines spectraux du mouvement de corps rigide et de la vibration en basse fréquence se recouvrent (figures 10 et 11).

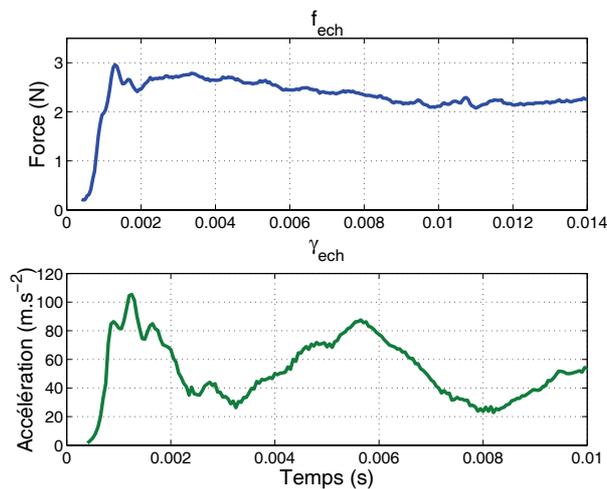


Fig. 10: Force exercée sur la touche (haut) et accélération de l'extrémité de la touche (bas).

Afin d'extraire le mouvement de corps rigide de la mesure globale, nous avons donc dû effectuer une décomposition modale au point de mesure. La réponse impulsionnelle vibratoire (et  $v_{imp}(0)$ ) est mesurée et estimée comme dans l'exemple précédent, puis décomposée par l'algorithme ESPRIT. On peut alors estimer l'accélération vibratoire  $\gamma_{vib}$  en réponse à l'excitation  $f_{ech}$  d'orgine :

$$\gamma_{vib}(t) = \left( \sum_k A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) e^{-\alpha_k t} \right) * f_{ech}(t) - v_{imp}(0) \cdot f_{ech}(t) \quad (7)$$

L'accélération de corps rigide  $\gamma_{rig}$  est extraite par soustraction de  $\gamma_{vib}$  à l'accélération mesurée  $\gamma_{ech}$  (figure 12) :

$$\gamma_{rig} = \gamma_{ech} - \gamma_{vib} \quad (8)$$

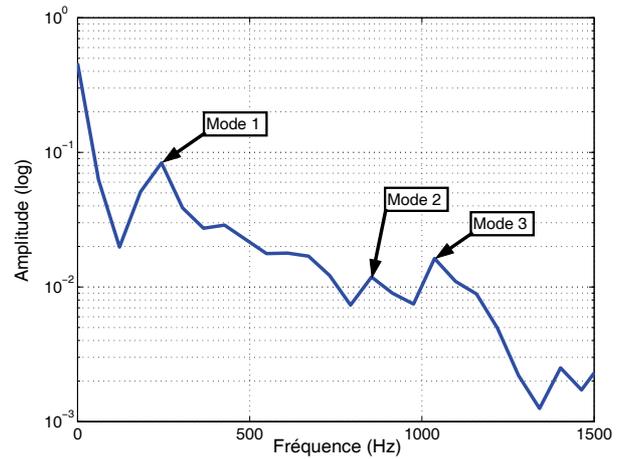


Fig. 11: Spectre du mouvement de la touche.

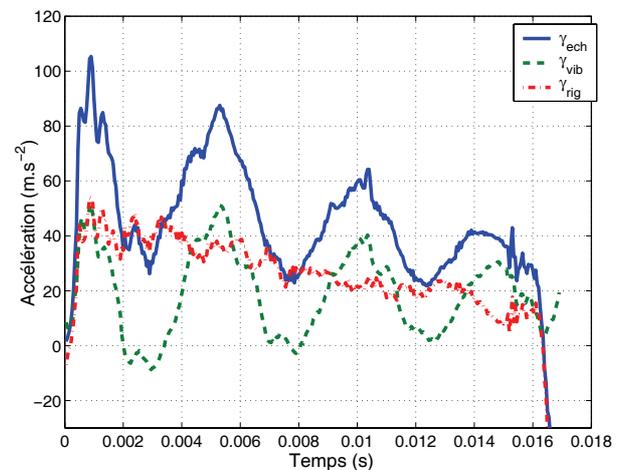


Fig. 12: Mouvement global mesuré, mouvement vibratoire estimé et mouvement de corps rigide reconstitué à l'extrémité de la touche.

## Conclusion

L'utilisation d'une méthode d'analyse haute résolution, adaptée à la forme de la réponse libre d'une structure vibrante, jointe à une estimation de la réponse impulsionnelle ont permis de résoudre des cas où la transformée de Fourier s'avère difficile à utiliser (premier cas présenté) ou inopérante (deuxième cas).

## Références

- [1] Roy R., Kailath T., "ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques," IEEE Trans. on Acous., Speech, and Sig. Proc., **37** (7), p. 984-995 (1989).
- [2] Roy R., Paulraj A., Kailath T., "ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise", IEEE Trans. on Acous., Speech, and Sig. Proc., **34** (5), p. 1340-1342 (1986).
- [3] Badeau R., "Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusôides modulées - Application aux signaux de musique.", thèse de doctorat de l'ENST, Paris (2005).