



HAL
open science

Développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures

Frédéric Bertrand, Myriam Maumy

► **To cite this version:**

Frédéric Bertrand, Myriam Maumy. Développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures. 2007. hal-00166573

HAL Id: hal-00166573

<https://hal.science/hal-00166573>

Preprint submitted on 7 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures

Prépublication de l'IRMA

Frédéric Bertrand¹, Myriam Maumy¹
fbertran@math.u-strasbg.fr, mmaumy@math.u-strasbg.fr

¹ Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Résumé

Dans ce preprint, nous établissons des développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures π . Le premier est construit à partir de la méthode du maximum de vraisemblance et le second à l'aide des estimateurs sans biais et de variance minimale. Ces résultats sont motivés par leurs applications dans les laboratoires de contrôle ou dans l'industrie chimique, pharmaceutique, agroalimentaire, etc.

Abstract

Edgeworth expansions for two point estimators of the proportion of measures

In this paper, we establish Edgeworth expansions for two point estimators of a proportion of experimental results π . The first one is based on the maximum likelihood method and the second one is the minimum variance unbiased estimator. These results are motivated by their counterparts in the official quality laboratories and in the industries of various sectors, namely: chemistry, pharmacy, food processing, etc.

1. Motivation

Un des problèmes des laboratoires de contrôle ou de l'industrie chimique, pharmaceutique, agroalimentaire, etc, est l'estimation de la proportion d'une population de mesures se situant entre deux limites. La littérature est relativement abondante sur ce sujet : citons par exemple [1] et [9] pour de plus amples détails. Supposons qu'une série de mesures suive une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues et que la proportion des mesures appartenant à l'intervalle $[L, U]$, L pour Lower et U pour Upper, notée π , est le paramètre d'intérêt. Par exemple, dans les laboratoires de contrôle, $[L, U]$ représente l'étendue des valeurs produites acceptables et π est alors la proportion d'unités conformes. Nous proposons deux estimateurs possibles pour la proportion π et établissons des développements d'Edgeworth qui permettent de construire des intervalles de confiance qui seront étudiés par ailleurs. Le recours à ces développements se justifie par la faible taille des séries de mesures utilisées, souvent comprise entre 5 et 20, et par conséquent, par le fait que les approximations asymptotiques ne sont plus valides dans ce cas.

2. Notations et résultats préliminaires

Soit $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ une série de mesures qui suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Désignons par $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique et $s_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ la variance empirique corrigée. Introduisons la proportion π qui se définit par :

$$\pi := \pi(\mu, \sigma^2) = \mathbb{P}[L \leq X \leq U] = \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right), \quad (2.1)$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, U et L , avec $L < U$, sont les « limites d'acceptation », dont les valeurs dépendent de la norme utilisée.

À partir de (2.1), deux estimateurs de π sont proposés : le premier, noté $\hat{\pi}$, est basé sur la méthode du maximum de vraisemblance (MV) et le second, noté $\tilde{\pi}$, est sans biais et de variance minimale (SBVM). La propriété de l'invariance du maximum de vraisemblance permet de définir l'estimateur $\hat{\pi}$ ainsi :

$$\hat{\pi} := \hat{\pi} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) = \Phi \left(k \frac{U - \bar{X}}{s_c} \right) - \Phi \left(k \frac{L - \bar{X}}{s_c} \right) = g_{MV} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) \quad \text{où} \quad k^2 = \frac{n}{n-1}. \quad (2.2)$$

Théorème 2.1. $\hat{\pi} - \pi$ renormalisé par \sqrt{n} est asymptotiquement gaussien de variance σ_{MV}^2 (cf [2]).

L'expression de l'estimateur $\tilde{\pi}$ (cf [7]) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} := \tilde{\pi} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) &= (\tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_2) \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) \\ &= g_{SBVM} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) \end{aligned} \quad \text{où} \quad \tilde{\pi}_i \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_i \leq 0 \\ 1 & \text{si } b_i \geq 1 \\ B_{b_i} \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2} \right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.3)$$

où $B_{b_i} \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2} \right) = \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int_0^{b_i} u^{\frac{n-4}{2}} (1-u)^{\frac{n-4}{2}} du$, $b_1 = \frac{1}{2} \left(1 + k \frac{\bar{X}-L}{s_c \sqrt{n-1}} \right)$ et $b_2 = \frac{1}{2} \left(1 + k \frac{\bar{X}-U}{s_c \sqrt{n-1}} \right)$.

Théorème 2.2. $\tilde{\pi} - \pi$ renormalisé par \sqrt{n} est asymptotiquement gaussien de variance $\sigma_{SBVM}^2 = \sigma_{MV}^2$.

Démonstration du Théorème 2.2 :

On commence par quelques définitions en reprenant les notations de [2] :

Définition 2.1. *Estimateur asymptotiquement gaussien (EAG)*

Un estimateur δ_n de g sur le modèle $\mathcal{M}^{\otimes n}$ (où $\mathcal{M}^{\otimes n} = (\mathbf{H}^n, \mathcal{B}(\mathbf{H}^n), \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}; \theta \in \Theta\})$, où \mathbf{H} désigne un espace de Hilbert, Θ est un ouvert de \mathbb{R}^r et \otimes désigne le produit tensoriel) est dit être un estimateur asymptotiquement gaussien de g si pour tout paramètre θ de l'ensemble des paramètres noté Θ , il existe une matrice $V(\theta)$ positive telle que l'on ait :

$$\sqrt{n} (\delta_n - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}_\theta^n} \mathcal{N}(0, V(\theta)),$$

où \mathcal{L}_θ^n désigne la convergence en loi.

Définition 2.2. *ϕ -équivalence*

Soit ϕ une fonction définie sur \mathbb{N}^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Les vecteurs aléatoires \mathbf{X}_n et \mathbf{Y}_n sont dits ϕ -équivalents asymptotiquement si

$$\phi(n)(\mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

et l'on notera $\mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\phi(n)} \right)$.

On va utiliser la Propriété 6.15 page 182 de [2] que l'on rappelle ici :

Proposition 2.1.

Si δ_n est un EAG alors tout estimateur \sqrt{n} -équivalent à δ_n , est un EAG.

On pose :

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} &= g_{SBMV} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) \\
&= \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\frac{1}{2}\left(1+k\frac{\bar{X}-L}{s_c\sqrt{n-1}}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1+k\frac{\bar{X}-U}{s_c\sqrt{n-1}}\right)} u^{\frac{n-4}{2}} (1-u)^{\frac{n-4}{2}} \mathbf{1}_{[0,1]}(u) du, \\
&= \frac{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) (n-1)s_c} \int_L^U \left[1 - \left(\frac{y-\bar{X}}{s_c} \right)^2 \frac{n}{(n-1)^2} \right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy,
\end{aligned}$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler et $\Psi(y) = \mathbf{1}_{[k\bar{X}-s_c\sqrt{n-1}, k\bar{X}+s_c\sqrt{n-1}]}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$. Les diverses formulations de g_{SBMV} sont présentées dans [8].

Proposition 2.2.

$\hat{\pi}$ est un estimateur asymptotiquement gaussien de variance asymptotique σ_{MV}^2 .

Démonstration 2.1.

C'est une application de la méthode delta, puisque $(\bar{X}, s_c^2/k^2)$ est un estimateur asymptotiquement gaussien et g_{MV} est une application de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On renvoie à [2] pour plus de détails.

Proposition 2.3.

$\hat{\pi}$ et $\tilde{\pi}$ sont \sqrt{n} -équivalents.

Démonstration 2.2.

On commence par chercher un développement de $\tilde{\pi}$. Pour ce faire on préfère utiliser l'expression intégrale donnée par la fonction h_{SBMV} :

$$h_{SBMV} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) = \frac{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) (n-1)s_c} \int_L^U \left[1 - \left(\frac{y-\bar{X}}{s_c} \right)^2 \frac{n}{(n-1)^2} \right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy.$$

On a :

$$h_{SBMV} \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \sqrt{n-1}} \frac{k}{s_c} \int_L^U \left[1 - \left(\frac{k(y-\bar{X})}{s_c} \right)^2 \frac{1}{n-1} \right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy.$$

On pose

$$\alpha_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \sqrt{n-1}}$$

et

$$\beta_n \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) = \frac{k}{s_c} \int_L^U \left[1 - \left(\frac{k(y-\bar{X})}{s_c} \right)^2 \frac{1}{n-1} \right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy.$$

On calcule alors le développement asymptotique de α_n et de $\beta_n \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right)$.

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \left(\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)}{e}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n-2}{2}\right)}} \left(\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)}{e}\right)^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{3}{4\sqrt{2\pi n}} + O(n^{-2}), \\
\beta_n \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) &= \frac{k}{s_c} \int_L^U \left[1 - \left(\frac{k(y - \bar{X})}{s_c} \right)^2 \frac{1}{n-1} \right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy \\
&= \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} \left[1 - \frac{z^2}{n-1} \right]^{\frac{n-4}{2}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\
&= \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\
&\quad + \frac{1}{n} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\alpha_n \times \beta_n \left(\bar{X}, \frac{s_c}{k} \right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{3}{4\sqrt{2\pi n}} + O(n^{-2}) \right) \times \left(\int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \left(\mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) - 1 \right) dz \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (-3 + 6z^2 - z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}).
\end{aligned}$$

On reconnaît le premier terme du développement :

$$\begin{aligned}
h_{SBMV} \left(\bar{X}, s_c^2/k^2 \right) &= \alpha_n \times \beta_n \left(\bar{X}, \frac{s_c^2}{k^2} \right) \\
&= \hat{\pi} \left(\bar{X}, s_c^2/k^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} \left(\mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) - 1 \right) dz \\
&\quad + \frac{1}{n} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (-3 + 6z^2 - z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\
&\quad + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}).
\end{aligned}$$

On peut alors déterminer la limite de $\sqrt{n}|h_{SBMV}(\bar{X}, s_c^2/k^2) - \hat{\pi}(\bar{X}, s_c^2/k^2)|$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}|(h_{SBMV} - \hat{\pi})(\bar{X}, s_c^2/k^2)| &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (\mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) - 1) dz \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (-3 + 6z^2 - z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \right| \\
&+ O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} (1 - \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z)) dz \\
&\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (3 + 6z^2 + z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\
&+ O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{n-1}} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{n-1}}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \\
&+ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} (3 + 6z^2 + z^4) dz + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\
&\leq \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n}} + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\
&\leq \frac{3}{\sqrt{n}} + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la \sqrt{n} -équivalence de $\hat{\pi}$ et $\tilde{\pi}$. On a utilisé le développement asymptotique, valable lorsque x tend vers $+\infty$, suivant :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} + O(x^{-5}).$$

On a montré au passage que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (\mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) - 1) dz$$

est un $O_{\mathbb{P}}(n^{-2})$. Ainsi on a en fait le développement plus simple :

$$\begin{aligned}
h_{SBMV}(\bar{X}, s_c^2/k^2) &= \hat{\pi}(\bar{X}, s_c^2/k^2) + \frac{1}{n} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-z^2/2} (-3 + 6z^2 - z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\
&+ O_{\mathbb{P}}(n^{-2})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dont on se servira par la suite.

Corollaire 2.1.

$\tilde{\pi}$ est une estimateur asymptotiquement gaussien de variance asymptotique σ_{SBMV}^2 et l'on a de plus $\sigma_{SBMV}^2 = \sigma_{MV}^2$.

3. Développement d'Edgeworth pour $\widehat{\pi}$

Afin d'obtenir un développement d'Edgeworth pour $\widehat{\pi}$, nous utilisons les résultats et les notations de [6]. Soient $\{X, X_1, \dots, X_n\}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Introduisons $\mathbf{X} = (X, X^2)$ et $\mathbf{X}_s = (X, X^2, X^3, X^4)$. L'expression (2.2) indique que $\widehat{\pi}$ dépend de \overline{X} et de s_c/k . Ainsi nous pouvons aussi dire que $\widehat{\pi}$ est une fonction de l'échantillon $\{(X_i, X_i^2) : 1 \leq i \leq n\}$. Maintenant définissons la fonction $F_{0,MV}$ (resp. la fonction studentisée $F_{s,MV}$) de la façon suivante :

$$F_{0,MV} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \widetilde{g}_{MV}(x, y)/\sigma_{MV} \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$F_{s,MV} : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \widetilde{g}_{MV}(x, y) / \sqrt{\widehat{\sigma}_{MV}^2(x, y, z, t)} \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

où $\widehat{\sigma}_{MV}^2(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\partial \widetilde{g}_{MV} / \partial x_i \cdot \partial \widetilde{g}_{MV} / \partial x_j)(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j))$, avec $\phi(k)$ la k -ème composante du vecteur (x, y, z, t) et $\widetilde{g}_{MV}(x, y) = g_{MV}(x, y - x^2) - \pi(\mu, \sigma^2)$.

Théorème 3.1. Nous avons le développement d'Edgeworth à l'ordre deux suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sqrt{n}F_{\bullet,MV}(\overline{X}, s_c^2/k^2) \leq x] &= \Phi(x) + n^{-1/2}p_{1,\bullet,MV}(x)\phi(x) + n^{-1}p_{2,\bullet,MV}(x)\phi(x) \\ &\quad + O\left(n^{-3/2}\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}$ et où $p_{1,\bullet,MV}, p_{2,\bullet,MV}$ sont définis par les équations (2.24) et (2.25) page 48 dans [6]. Les coefficients $k_{1,2,MV}, k_{2,2,MV}, k_{3,1,MV}$ et $k_{4,1,MV}$ diffèrent d'une statistique à l'autre puisque :

$$\begin{aligned} k_{1,2,MV} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \mu_{ij}, & k_{3,1,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ik} \mu_{jl}, \\ k_{2,2,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_k \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ij} \mu_{kl}, \\ k_{4,1,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{il} \mu_{jkm} \\ &\quad + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 16\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\ &\quad + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m (4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}), \end{aligned}$$

où a est égal à $F_{0,MV}$ (resp. à $F_{s,MV}$), en désignant par $^{(i)}$ la i -ème composante d'un vecteur et avec

$$a_{i_1 \dots i_j} = \left(\partial^j / \partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_j)} \right) a(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbb{E}[\mathbf{X}]} \quad \text{et} \quad \mu_{i_1 \dots i_j} = \mathbb{E} \left[(\mathbf{X} - \mu)^{(i_1)} \dots (\mathbf{X} - \mu)^{(i_j)} \right].$$

Démonstration du Théorème 3.1 :

Remarque : Sans perte de généralité, on suppose que :

$$\mathbb{E}[X] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = 1.$$

Le Théorème 3.1 s'inspire du Théorème 2.2, page 56 que l'on trouve dans le livre de Hall. Le seul résultat à démontrer ici est le calcul des coefficients $k_{1,2,MV}, k_{3,1,MV}, k_{2,2,MV}$ et $k_{4,1,MV}$. Le lecteur pourra également se reporter à [5] et à [10] où sont développés des calculs similaires.

Calcul de $k_{1,2,MV}$: Ce résultat n'a pas besoin d'être démontré puisqu'il est déjà établi dans le livre de Hall, page 55, équation (2.32). Il suffit juste de lire quelques lignes en dessous et de s'apercevoir que

$$k_{1,2,MV} = A_1 \sigma^{-1}.$$

Dans notre cas on a $\sigma = 1$, puisque l'on a construit notre estimateur de telle façon que la variance soit égale à 1. Ce qui implique que

$$k_{1,2,MV} = A_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \mu_{ij},$$

où

$$a_{i_1 \dots i_j} = \left(\frac{\partial^j}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_j)}} \right) a(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbb{E}[\mathbf{X}]} \quad \text{et } a \text{ est égal à } F_{0,MV} \text{ (resp. à } F_{s,MV}).$$

Calcul de $k_{3,1,MV}$: Comme précédemment, ce résultat ne serait pas à démontrer puisqu'il est déjà établi dans le livre de Hall, page 55, équation (2.33). On le redémontrera quand même par la suite. Hall écrit

$$k_{3,1,MV} = A_2 \sigma^{-3}.$$

De la même manière, on a dans le cas étudié ici :

$$k_{3,1,MV} = A_2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl}.$$

Calcul de $k_{2,2,MV}$: Pour calculer ce coefficient, il faut calculer d'abord $\kappa_{2,n}$. D'après le livre de Hall, page 55, on a

$$\kappa_{2,n} = \mathbb{E} [S_n^2] - \mathbb{E}^2 [S_n],$$

où $S_n = n^{1/2} A_{\bullet}(\bar{\mathbf{X}})$.

Dans notre cas, on a soit :

- $\mathbf{X} = (X, X^2)$ et $A(\mathbf{x}) = \widetilde{g}_{MV}(\mathbf{x}) / \sigma_{MV}(\boldsymbol{\mu})$ qui est bien défini au voisinage du point de coordonnées $(0, 1)$.
- $\mathbf{X} = (X, X^2, X^3, X^4)$ et $A_s(\mathbf{x}) = \widetilde{g}_{MV}(\mathbf{x}) / \sqrt{\widehat{\sigma}_{MV}^2(\mathbf{x})}$ qui est bien défini au voisinage du point de coordonnées $(0, 1, 0, 3)$.

On explique que la différence provient de l'expression des dénominateurs :

- $\sigma_{MV}^2(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{g}_{MV}}{\partial x_i}(0, 1) \cdot \frac{\partial \widetilde{g}_{MV}}{\partial x_i}(0, 1) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j))$, où $\phi(k)$ est la k -ème composante du vecteur $\boldsymbol{\mu} = (0, 1, 0, 3)$.
- $\widehat{\sigma}_{MV}^2(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{g}_{MV}}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{g}_{MV}}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j))$, où $\phi(k)$ est la k -ème composante du vecteur (x, y, z, t) .

Ainsi dans la suite on aura soit $d = 2$ si l'on considère la version non studentisée A de la statistique soit $d = 4$ si l'on considère la version studentisée A_s de la statistique. Pour le calcul du développement on

peut donc adopter une démarche unifiée.

D'autre part, Hall écrit, page 53, équation (2.28) :

$$S_n = S_{nr} + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-r/2}\right), \quad r \geq 1,$$

où

$$S_{nr} = \sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1 i_2} Z^{(i_1)} Z^{(i_2)} + \dots + n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d a_{i_1 \dots i_r} Z^{(i_1)} \dots Z^{(i_r)},$$

où $\mathbf{Z} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})$.

Dans la situation présente, un développement de Taylor à l'ordre r , avec r égal à 3, suffira pour ne négliger aucun terme dans les calculs. Par conséquent, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-3/2}\right).$$

Calculons alors les moments de S_n jusqu'à l'ordre 4 :

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^d a_i \mathbb{E}[Z^{(i)}] + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)}] + n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ijk} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] + O\left(n^{-3/2}\right).$$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^{(i)}] &= \mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)^{(i)}\right] = \sqrt{n}\mu_i = 0, \\ \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)}] &= \mu_{ij}, \quad \text{cf Hall, page 54,} \\ \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] &= n^{-1/2} \mu_{ijk}, \quad \text{cf Hall, page 54.} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[S_n] = n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \mu_{ij} + O\left(n^{-3/2}\right).$$

Maintenant calculons S_n^2 en ne gardant que les termes au plus en n^{-1} :

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)}\right)^2 + n^{-1} \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)}\right)^2 + n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)}\right) \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)}\right) \\ &\quad + n^{-1} \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)}\right) \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}\right) + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-3/2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \\ &\quad + n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + n^{-1} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \\ &\quad + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-3/2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)}] + n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] \\
&+ n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] + n^{-1} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] \\
&+ O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

Maintenant calculons la quantité $\mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}]$ afin d'achever le calcul de $\mathbb{E}[S_n^2]$.

$$\mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] = n^{-2} \sum_{1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n} \mathbb{E}[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\beta - \mu)^{(j)} (X_\gamma - \mu)^{(k)} (X_\delta - \mu)^{(l)}].$$

Si les indices α et β sont différents alors $(X_\alpha - \mu)^{(i)}$ et $(X_\beta - \mu)^{(j)}$ sont indépendantes pour $1 \leq i, j \leq d$. On sépare donc la somme en cinq parties :

1. celle pour laquelle tous les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont égaux entre eux, représentée par (4) :

$$n^{-2} \sum_{1 \leq \alpha \leq n} \mathbb{E}[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\alpha - \mu)^{(j)} (X_\alpha - \mu)^{(k)} (X_\alpha - \mu)^{(l)}] = n^{-2} n \mu_{ijkl} = n^{-1} \mu_{ijkl}.$$

2. celle pour laquelle trois des indices sont égaux entre eux. L'espérance des quatre variables centrées est alors le produit de l'espérance des trois variables centrées pour lesquelles les trois indices sont égaux par l'espérance de la variable centrée dont l'indice est différent du premier. Par conséquent cette somme est nulle puisque l'espérance de la variable centrée est nulle. On représente cette somme par (3, 1).
3. celle pour laquelle deux des indices sont égaux entre eux et les deux autres sont différents entre eux ainsi qu'avec le premier. Pour des raisons analogues à celles du 2., cette somme est nulle. On représente cette somme par (2, 1, 1).
4. celle, notée *MM*, pour laquelle deux des indices sont égaux entre eux et les deux autres sont égaux entre eux mais différents du premier. On représente cette somme par (2, 2).

$$\begin{aligned}
n^{-2} \sum_{\substack{1 \leq \alpha, \beta \leq n \\ \alpha \neq \beta}} \mathbb{E}[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\alpha - \mu)^{(j)} (X_\beta - \mu)^{(k)} (X_\beta - \mu)^{(l)}] \\
&= n^{-2} n(n-1) \mu_{ij} \mu_{kl} \\
&= \mu_{ij} \mu_{kl} - n^{-1} \mu_{ij} \mu_{kl}.
\end{aligned}$$

Ici on a arbitrairement choisi que les deux couples d'indices égaux étaient les deux premiers et les deux derniers, ce que l'on représente par $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. Il reste les cas où $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$. On obtient ainsi au final :

$$(\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) - n^{-1} (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}).$$

5. celle pour laquelle tous les indices sont différents les uns des autres. On représente cette somme par (1, 1, 1, 1). Pour des raisons analogues à celles du 2., cette somme est nulle.

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] = (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) + n^{-1} (\mu_{ij} \mu_{kl} - \mu_{ij} \mu_{kl} - \mu_{ik} \mu_{jl} - \mu_{il} \mu_{jk}) := E_4(i, j, k, l).$$

On peut enfin achever le calcul de $\mathbb{E} [S_n^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n^2] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} \mu_{ijk} \\ &+ n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{a_{ij} a_{kl}}{4} + \frac{a_i a_{jkl}}{3} \right) (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \kappa_{2,n} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} \mu_{ijk} \\ &+ n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{a_{ij} a_{kl}}{4} + \frac{a_i a_{jkl}}{3} \right) (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \\ &- n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} \mu_{ij} \mu_{kl} \\ &+ O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par identification :

$$\begin{aligned} k_{2,1,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij}. \\ k_{2,2,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} \mu_{ijk} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} (\mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}). \end{aligned}$$

Or on remarque :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ij} a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{lk} \mu_{il} \mu_{jk} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} \mu_{il} \mu_{jk}. \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ij} \mu_{kl} &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ij} \mu_{kl} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{kjl} \mu_{ik} \mu_{jl} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ik} \mu_{jl}, \\
\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ij} \mu_{kl} &= \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ij} \mu_{kl} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{klj} \mu_{il} \mu_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{il} \mu_{jk}.
\end{aligned}$$

Et de ce fait on en déduit que :

$$k_{2,2,MV} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_{jk} \mu_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_{ij} a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_{jkl} \mu_{ij} \mu_{kl}.$$

Calcul de $k_{3,1,MV}$: Pour calculer $k_{3,1,MV}$, il faut calculer le cumuland $\kappa_{3,n}$ défini page 55 dans le livre de Hall. Dans l'expression de ce dernier, on voit apparaître la quantité S_n^3 .

Calcul de S_n^3 :

$$\begin{aligned}
S_n^3 &= \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^3 + 3 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^2 \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right) \\
&+ 3 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right) \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right)^2 \\
&+ 3 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^2 \left(n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + \frac{3}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right) \\
&+ \frac{3}{4} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_{jk} a_{lm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_{klm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \right) + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right).
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^3] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] + \frac{3}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] \right) \\ &\quad + \frac{3}{4} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}] \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}] \right) + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

On calcule $E_5(i, j, k, l, m) := \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}]$:

$$E_5(i, j, k, l, m) = n^{-5/2} \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\delta=1}^n \sum_{\epsilon=1}^n (X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\beta - \mu)^{(j)} (X_\gamma - \mu)^{(k)} (X_\delta - \mu)^{(l)} (X_\epsilon - \mu)^{(m)} \right].$$

On doit se concentrer sur les termes de cette somme pour lesquels aucun des indices est sans répétition. En effet si l'un des indices est différent de tous les autres alors la variable aléatoire qui lui est associée est indépendante des autres variables qui forment le produit. L'espérance du produit des variables centrées se scinde en le produit de deux espérances, l'une associée à la variable centrée dont l'indice n'est pas répété et donc nulle, l'autre associée aux variables centrées restantes. L'espérance du produit est de ce fait nulle.

On décide de représenter le nombre de répétitions d'indices dans les sommes étudiées par un vecteur dont les composantes indiquent le nombre d'indices égaux dans une somme. Par exemple $(1, 1, 1, 1, 1)$ est associée à la somme où tous les cinq indices sont distincts et (5) à celle où les cinq indices sont tous égaux. Les cas $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(4, 1)$ ont été traités au paragraphe ci-dessus et sont associés à des sommes d'espérance nulle. Reste alors les possibilités de répétitions suivantes : (5) , $(2, 3)$.

Dans le cas de (5) , on a :

$$\begin{aligned}&n^{-5/2} \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha=1}^n (X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\alpha - \mu)^{(j)} (X_\alpha - \mu)^{(k)} (X_\alpha - \mu)^{(l)} (X_\alpha - \mu)^{(m)} \right] \\ &= nn^{-5/2} \mu_{ijklm} = O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

Dans le cas de $(2, 3)$, on a par exemple :

$$\begin{aligned}&n^{-5/2} \sum_{\substack{1 \leq \alpha, \beta \leq n \\ \alpha \neq \beta}} \mathbb{E} \left[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\alpha - \mu)^{(j)} (X_\beta - \mu)^{(k)} (X_\beta - \mu)^{(l)} (X_\beta - \mu)^{(m)} \right] \\ &= n(n-1)n^{-5/2} \mu_{ij\mu_{klm}} = n^{-1/2} \mu_{ij\mu_{klm}} + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

En considérant toutes les possibilités de sommes de type $(2, 3)$ on obtient :

$$n(n-1)n^{-5/2} (\mu_{ij\mu_{klm}} + \mu_{ik\mu_{jlm}} + \mu_{il\mu_{kjm}} + \mu_{im\mu_{klj}} + \mu_{kj\mu_{ilm}} + \mu_{lj\mu_{kim}} + \mu_{mj\mu_{kli}} + \mu_{kl\mu_{ijm}} + \mu_{km\mu_{ijl}} + \mu_{lm\mu_{ijk}}).$$

Ce terme est égal au terme ci-dessous si l'on néglige la partie qui est en $O(n^{-3/2})$:

$$E_5(i, j, k, l, m) = n^{-1/2} (\mu_{ij\mu_{klm}} + \mu_{ik\mu_{jlm}} + \mu_{il\mu_{kjm}} + \mu_{im\mu_{klj}} + \mu_{kj\mu_{ilm}} + \mu_{lj\mu_{kim}} + \mu_{mj\mu_{kli}} + \mu_{kl\mu_{ijm}} + \mu_{km\mu_{ijl}} + \mu_{lm\mu_{ijk}}).$$

Ainsi les deux derniers termes dans le développement de $\mathbb{E}[S_n^3]$ sont au plus de l'ordre de $O(n^{-3/2})$. On obtient alors le développement suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^3] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] + \frac{3}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] \right) \\ &\quad + O(n^{-3/2}) \\ &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right) \\ &\quad + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer le cumulatif $\kappa_{3,n}$. On peut bien sûr utiliser la relation ci-dessous, que l'on trouve à la page 55 dans le livre de Hall :

$$\begin{aligned}\kappa_{3,n} &= \mathbb{E}[S_n^3] - 3\mathbb{E}[S_n^2] \mathbb{E}[S_n] + 2\mathbb{E}[S_n]^3 \\ &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right) \\ &\quad - 3\mathbb{E}[S_n^2] \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right) + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}[S_n^2] = k_{2,1,MV} + n^{-1} k_{2,2,MV} + O(n^{-3/2})$, alors seul le premier terme du développement est à reporter dans le développement de $\kappa_{3,n}$. En supprimant également le terme provenant de $\mathbb{E}[S_n]^3$, qui est un $O(n^{-3/2})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\kappa_{3,n} &= \mathbb{E}[S_n^3] - 3\mathbb{E}[S_n^2] \mathbb{E}[S_n] + 2\mathbb{E}[S_n]^3 \\ &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right) \\ &\quad - 3n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right) + O(n^{-3/2}) \\ &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right) \\ &\quad - n^{-1/2} \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j a_k l \mu_{ij} \mu_{kl} \right) + O(n^{-3/2}) \\ &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right) + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

Or on remarque que :

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{il} \mu_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{il} \mu_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_{lk} \mu_{il} \mu_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} \\
&= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\kappa_{3,n} = n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} \right) + O(n^{-3/2}).$$

On a ainsi déterminé $k_{3,1,MV}$.

$$k_{3,1,MV} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl}.$$

En comparant avec le résultat page 55 du livre de Hall, on remarque que l'on obtient bien la même expression.

Calcul de $k_{4,1,MV}$: Finalement, on calcule :

$$\begin{aligned}
S_n^4 &= \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^4 + 4 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^3 n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \\
&+ 6 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^2 \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right)^2 \\
&+ 4 \left(\sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} \right)^3 n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \\
&+ 2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l m Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \\
&+ 3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_{kl} a_{mo} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \\
&+ \frac{2}{3} n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'espérance de S_n^4

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^4] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right] \\ &+ 2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \right] \\ &+ 3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \right] \\ &+ \frac{2}{3} n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \right] + O\left(n^{-3/2}\right).\end{aligned}$$

On doit évaluer $E_6(i, j, k, l, m, o) = \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \right]$, plus précisément on doit obtenir un développement avec une précision en $O\left(n^{-1/2}\right)$ de E_6 :

$$E_6(i, j, k, l, m, o) = n^{-3} \sum_{1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \leq n} \mathbb{E} \left[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\beta - \mu)^{(j)} (X_\gamma - \mu)^{(k)} (X_\delta - \mu)^{(l)} (X_\epsilon - \mu)^{(m)} (X_\zeta - \mu)^{(o)} \right].$$

On adopte la même démarche que ci-dessus. On cherche les différentes manières d'écrire 6 comme une somme d'entiers tous strictement plus grands que 2. On trouve comme solutions possibles :

$$(2, 2, 2); \quad (2, 4); \quad (3, 3); \quad (6).$$

Les nombres de termes associés à ces types de sommes sont :

$$n(n-1)(n-2); \quad n(n-1); \quad n(n-1); \quad n,$$

ce qui correspond à un ordre de grandeur dans E_6 :

$$1 + O\left(n^{-1}\right); \quad O\left(n^{-1}\right); \quad O\left(n^{-1}\right); \quad O\left(n^{-2}\right).$$

On a ainsi uniquement à étudier la somme de type (2, 2, 2) qui se décompose en plusieurs sommes, qui correspondent aux différents choix possibles pour les indices que l'on choisit comme égaux, et dont l'une s'écrit de la manière suivante :

$$\sum_{\substack{1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n \\ \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma}} \mathbb{E} \left[(X_\alpha - \mu)^{(i)} (X_\alpha - \mu)^{(j)} (X_\beta - \mu)^{(k)} (X_\beta - \mu)^{(l)} (X_\gamma - \mu)^{(m)} (X_\gamma - \mu)^{(o)} \right].$$

Cette somme est égale à :

$$n^3 \mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + O(n^2).$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}E_6(i, j, k, l, m, o) &= \mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + \mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + \mu_{ij} \mu_{ko} \mu_{ml} \\ &+ \mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + \mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo} + \mu_{ik} \mu_{jo} \mu_{ml} \\ &+ \mu_{il} \mu_{kj} \mu_{mo} + \mu_{il} \mu_{km} \mu_{jo} + \mu_{il} \mu_{jo} \mu_{mk} \\ &+ \mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + \mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo} + \mu_{im} \mu_{ko} \mu_{jl} \\ &+ \mu_{io} \mu_{kl} \mu_{mj} + \mu_{io} \mu_{km} \mu_{lj} + \mu_{io} \mu_{kj} \mu_{ml} + O(n^{-1}).\end{aligned}$$

On doit donc étudier :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [S_n^4] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l E_4(i, j, k, l) \\
&+ 2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m E_5(i, j, k, l, m) \\
&+ 3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{p=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_p E_6(i, j, k, l, m, o) \\
&+ \frac{2}{3} n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o E_6(i, j, k, l, m, o) + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Schwarz, valable puisque A est C^5 sur \mathbb{R} , et la symétrie de la définition des moments on obtient :

$$\begin{aligned}
&\bullet \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_l a_k a_m a_o E_6(i, j, k, l, m, o) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 8\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}), \\
&\bullet \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o E_6(i, j, k, l, m, o) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m a_o (9\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}), \\
&\bullet \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m E_5(i, j, k, l, m) \\
&= n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m (3\mu_{ij} \mu_{klm} + 6\mu_{il} \mu_{jkm} + \mu_{lm} \mu_{ijk}), \\
&\bullet \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l E_4(i, j, k, l) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (3\mu_{ij} \mu_{kl} + n^{-1} (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl})) \\
&= 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{kl} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [S_n^4] &= 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{kl} + n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m (3\mu_{ij} \mu_{klm} + 6\mu_{il} \mu_{jkm} + \mu_{lm} \mu_{ijk}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 8\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\
& + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o (9\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}) \Big] + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

La formule exprimant le quatrième cumulant $\kappa_{4,n}$ en fonction des moments centrés de S_n est :

$$\kappa_{4,n} = \mathbb{E}[S_n^4] - 4\mathbb{E}[S_n^3] \mathbb{E}[S_n] - 3\mathbb{E}[S_n^2]^2 + 12\mathbb{E}[S_n^2] \mathbb{E}[S_n]^2 - 6\mathbb{E}[S_n]^4.$$

Puisque l'on ne s'intéresse qu'à obtenir une précision en $O(n^{-3/2})$ on doit évaluer :

$$\begin{aligned}
\kappa_{4,n} &= 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{kl} + n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) \right. \\
& + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l m (3\mu_{ij} \mu_{klm} + 6\mu_{il} \mu_{jkm} + \mu_{lm} \mu_{ijk}) \\
& + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 8\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\
& \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o (9\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}) \right] \\
& - 4n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j a_k \mu_{ijk} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k l (\mu_{ij} \mu_{kl} + 2\mu_{ik} \mu_{jl}) \right) \\
& \times \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right) - 3 \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_i a_j k \mu_{ijk} \right. \\
& \left. + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{a_i a_j a_k l}{4} + \frac{a_i a_j k l}{3} \right) (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \right)^2 \\
& + 12 \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right) \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i a_j \mu_{ij} \right)^2 + O(n^{-3/2}). \\
\kappa_{4,n} &= 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{kl} + n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) \right. \\
& + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l m (3\mu_{ij} \mu_{klm} + 6\mu_{il} \mu_{jkm} + \mu_{lm} \mu_{ijk}) \\
& + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 8\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\
& \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l m o (9\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ijk} \mu_{lm} \\
& -3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo}) \\
& -3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{kl} - 6n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{ij} \mu_{klm} \\
& -6n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j \left(\frac{a_{kl} a_{mo}}{4} + \frac{a_k a_{lmo}}{3} \right) \mu_{ij} (\mu_{kl} \mu_{mo} + \mu_{km} \mu_{lo} + \mu_{ko} \mu_{lm}) \\
& + 3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o \mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{4,n} &= n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{il} \mu_{jkm} \right. \\
& + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 16\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\
& \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}) \right] + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
k_{4,1,MV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i a_j a_k a_l (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij} \mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d a_i a_j a_k a_l \mu_{il} \mu_{jkm} \\
& + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (\mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + 2\mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + 4\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + 16\mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo}) \\
& + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d a_i a_j a_k a_l a_m o (4\mu_{im} \mu_{kl} \mu_{jo} + 2\mu_{im} \mu_{kj} \mu_{lo}).
\end{aligned}$$

4. Développement d'Edgeworth pour $\tilde{\pi}$

Afin d'obtenir un développement d'Edgeworth pour $\tilde{\pi}$, nous utilisons les résultats et les notations de [6] et nous procédons de façon similaire à la manière dont nous avons procédé avec $\hat{\pi}$. Soient $\{X, X_1, \dots, X_n\}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Introduisons $\mathbf{X} = (X, X^2)$ et $\mathbf{X}_s = (X, X^2, X^3, X^4)$. L'expression (2.3) permet d'affirmer que $\tilde{\pi}$ dépend également de \bar{X} et de s_c/k . Mais nous pouvons aussi dire que $\tilde{\pi}$ sont des fonctions de l'échantillon $\{(X_i, X_i^2) : 1 \leq i \leq n\}$.

Nous introduisons la fonction $F_{0,SBVM}$ (ou la version studentisée de cette statistique $F_{s,SBVM}$) définie simplement en remplaçant g_{MV} par g_{SBVM} dans les expressions (3.1) et (6). Toutefois un raffinement supplémentaire est nécessaire puisque $g_{SBVM}(x, y)$ et donc $F_{0,SBVM}(x, y)$ et $F_{s,SBVM}(x, y, z, t)$ dépendent de n (voir [6] page 58 pour plus de détails sur la manière de traiter cette difficulté).

Théorème 4.1. Nous avons le développement d'Edgeworth à l'ordre deux suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sqrt{n}F_{\bullet,SBVM}(\bar{X}, s_c^2/k^2) \leq x] &= \Phi(x) + n^{-1/2}p_{1,\bullet,SBVM}(x)\phi(x) + n^{-1}p_{2,\bullet,SBVM}(x)\phi(x) \\ &\quad + O\left(n^{-3/2}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}$ et où $p_{1,\bullet,SBVM}$ et $p_{2,\bullet,SBVM}$ ont été définis au théorème 3.1 et où $k_{1,2,SBVM}$, $k_{3,1,SBVM}$, $k_{2,2,SBVM}$ et $k_{4,1,SBVM}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_{1,2,SBVM} &= k_{1,2,MV}, \quad k_{3,1,SBVM} = k_{3,1,MV}, \quad k_{2,2,SBVM} = k_{2,2,MV} + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i}b_{2,j}\mu_{ij}, \\ k_{4,1,SBVM} &= k_{4,1,MV}, \end{aligned}$$

et avec les $b_{0,i}$, $1 \leq i \leq d$, et les $b_{2,j}$, $1 \leq j \leq d$, définis par l'équation (2.38) page 58 dans [6].

Démonstration du Théorème 4.1

Contrairement à la situation présente dans le Théorème 3.1, la fonction g_{SBMV} permettant de définir π_{SBMV} à l'aide de \bar{X} et s_c dépend de n . Pour tenir compte de cette dépendance, on exprime A_n de la manière suivante :

$$A_n = B_0 + \frac{1}{n^{1/2}}B_1 + \frac{1}{n}B_2 + \frac{1}{n^{3/2}}B_3 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où B_0 , B_1 , B_2 et B_3 sont définis ci-après et dépendent du fait que l'on considère une version studentisée ou non de π_{SBMV} . On note cette dépendance par l'absence d'exposant ou la présence de s .

$$\widetilde{\pi}_{SBMV}(x, y) = g_{SBMV}(x, y - x^2) - \pi(\lambda_M, \sigma_M^2).$$

$$h_{SBMV}(\bar{X}, s_c^2/k^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{k}{\sqrt{n-1}} s_c \int_L^U \left[1 - \left(\frac{k(y-\bar{X})}{s_c}\right)^2 \frac{1}{n-1}\right]^{\frac{n-4}{2}} \Psi(y) dy.$$

On pose alors $\widetilde{h}_{SBMV}(x, y - x^2) = h_{SBMV}(x, y) - h_{SBMV}(\mu, \sigma^2)$, et on introduit :

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= \frac{\widetilde{h}_{SBMV}(x, y - x^2)}{\sigma_{SBMV}(\boldsymbol{\mu})} \\ A_n^s(x, y) &= \frac{\widetilde{h}_{SBMV}(x, y - x^2)}{\sqrt{\sigma_{SBMV}^2(x, y, z, t)}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} -\sigma_{SBMV}^2(\boldsymbol{\mu}) &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{h}_{SBMV}}{\partial x_i}(0, 1) \cdot \frac{\partial \widetilde{h}_{SBMV}}{\partial x_i}(0, 1) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)), \text{ où } \phi(k) \text{ est la } k\text{-ème} \\ &\text{composante du vecteur } \boldsymbol{\mu} = (0, 1, 0, 3). \\ -\widetilde{\sigma}_{SBMV}^2(x, y, z, t) &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{h}_{SBMV}}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{h}_{SBMV}}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)), \text{ où } \phi(k) \text{ est la } k\text{-ème} \\ &\text{composante du vecteur } (x, y, z, t). \end{aligned}$$

On remarque qu'alors le dénominateur va également dépendre de n . Il faut en tenir compte pour établir le développement de A_n recherché ci-dessus. On rappelle également la relation 2.4, obtenue page 4, entre les deux estimateurs que l'on étudie :

$$\begin{aligned} h_{SBMV}(\bar{X}, s_c^2/k^2) &= \widehat{\pi}_{MV}(\bar{X}, s_c^2/k^2) + \frac{1}{n} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k(L-\bar{X})}{s_c}}^{\frac{k(U-\bar{X})}{s_c}} e^{-1/2z^2} (-3 + 6z^2 - z^4) \mathbf{1}_{[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]}(z) dz \\ &\quad + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}) \\ &:= N_0(\bar{X}, s_c^2/k^2) + \frac{N_2(\bar{X}, s_c^2/k^2)}{n} + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}). \end{aligned}$$

En désignant par $\widetilde{f}(x, y) = f(x, y - x^2) - f(0, 1)$, le numérateur de A_n vaut :

$$\widetilde{h_{SBMV}}(x, y) = \widetilde{N}_0(x, y) + \frac{\widetilde{N}_2(x, y)}{n} + O_{\mathbb{P}}(n^{-2})$$

où N_0 et N_2 ne dépendent pas de n .

Le dénominateur vaut quant à lui :

$$\begin{aligned} -\sigma_{SBMV}(\boldsymbol{\mu}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(0, 1) \cdot \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(0, 1) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j))}, \text{ où } \phi(k) \text{ est la } k\text{-ème} \\ &\quad \text{composante du vecteur } \boldsymbol{\mu} = (0, 1, 0, 3). \\ -\sqrt{\widehat{\sigma_{SBMV}^2}(x, y, z, t)} &= \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j))}, \text{ où } \phi(k) \text{ est la} \\ &\quad k\text{-ème composante du vecteur } (x, y, z, t). \end{aligned}$$

On va maintenant obtenir un développement de ce terme :

$$\frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(x, y) = \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) + \frac{1}{n} \frac{\partial \widetilde{N}_2}{\partial x_i}(x, y) + O_{\mathbb{P}}(n^{-2}) \quad (4.2)$$

ce qui permettra d'écrire que :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{SBMV}^2}^{-1/2}(x, y, z, t) &= \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{h_{SBMV}}}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)) \right)^{-1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{N}_2}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)) + O(n^{-2}) \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

où l'on pose :

$$D_0(x, y, z, t) = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)) \right)^{-1/2} = \widehat{\sigma_{MV}^2}^{-1/2}(x, y, z, t).$$

On pose également :

$$D_2(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}(x, y) \cdot \frac{\partial \widetilde{N}_2}{\partial x_i}(x, y) (\phi(i+j) - \phi(i)\phi(j)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{SBMV}^2}^{-1/2}(x, y, z, t) &= D_0(x, y, z, t) \times \left(1 + \frac{2}{n} D_2(x, y, z, t) D_0^2(x, y, z, t) \right)^{-1/2} \\ &= D_0(x, y, z, t) \times \left(1 - \frac{1}{n} D_2(x, y, z, t) D_0^2(x, y, z, t) + O(n^{-2}) \right) \\ &= D_0(x, y, z, t) - \frac{1}{n} D_2(x, y, z, t) D_0^3(x, y, z, t) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A_n(x, y, z, t) &= \left(N_0 + \frac{N_2}{n} + O(n^{-2}) \right) (x, y) \left(D_0 - \frac{1}{n} D_2 D_0^3 + O(n^{-2}) \right) (x, y, z, t) \\ &= N_0(x, y) D_0(x, y, z, t) + \frac{1}{n} (N_2(x, y) D_0(x, y, z, t) - N_0(x, y) (D_2 D_0^3)(x, y, z, t)) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Pour vérifier que le développement obtenu en (4.2) est licite, on montre que le reste est un $O(n^{-2})$, on peut par exemple s'intéresser au calcul du coefficient du terme en n^{-2} dans le développement. À l'aide de l'inégalité de Markov, on peut montrer qu'il y a bien convergence en loi. Voir l'indication page 77 dans Hall.

On remarque que pour obtenir le développement de $\sigma_{SBMV}(\boldsymbol{\mu})$ il suffit d'évaluer le développement ci-dessus en $(0, 1, 0, 3)$.

Finalement dans le cas de la statistique non studentisée on a :

$$\begin{aligned} B_0(x, y) &= A_{MV}(x, y), \\ B_1(x, y) &= 0, \\ B_2(x, y) &= N_2(x, y) D_0(0, 1, 0, 3) - N_0(x, y) D_2(0, 1, 0, 3) D_0(0, 1, 0, 3)^3, \\ B_3(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

et dans le cas de la statistique studentisée :

$$\begin{aligned} B_0(x, y, z, t) &= A_{s, MV}(x, y, z, t), \\ B_1(x, y, z, t) &= 0, \\ B_2(x, y, z, t) &= N_2(x, y) D_0(x, y, z, t) - N_0(x, y) D_2(x, y, z, t) D_0^3(x, y, z, t), \\ B_3(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

On remarque qu'aucun des B_α ne dépend de n , qu'ils sont tous tels que $B_\alpha(\boldsymbol{\mu}) = 0$ et que $B_0 = A_{MV}$.

Puis on développe chaque B_α , $0 \leq \alpha \leq 3$, à l'aide d'une formule de Taylor au point $(\boldsymbol{\mu})$:

$$S_{\alpha,n,r} = \sum_{i=1}^d b_{\alpha,i} Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d b_{\alpha,i_1 i_2} Z^{(i_1)} Z^{(i_2)} + \dots + n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d b_{\alpha,i_1 \dots i_r} Z^{(i_1)} \dots Z^{(i_r)},$$

où $\mathbf{Z} = \sqrt{n} (\bar{\mathbf{X}} - \mu)$.

Dans le cas étudié ici, un développement de Taylor à l'ordre r , avec r égal à 3, suffira pour ne négliger aucun terme dans les calculs. Par conséquent $S_{\alpha,n,r}$ devient :

$$S_{\alpha,n,3} = \sum_{i=1}^d b_{\alpha,i} Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{\alpha,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{\alpha,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}.$$

Par conséquent, on a :

$$S_{\alpha,n} = \sum_{i=1}^d b_{\alpha,i} Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{\alpha,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{\alpha,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} + n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d b_{1,i} Z^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right) \\ &\quad + n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} Z^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{1,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}) \\ &= \sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} Z^{(i)} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) \\ &\quad + O_{\mathbb{P}}(n^{-3/2}), \end{aligned}$$

car comme $B_1(x, y, z, t) = 0$, cela implique que pour tout $i = 1, \dots, d$, on a $b_{1,i} = 0$.

Calculons alors les moments de S_n jusqu'à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= \sum_{i=1}^d b_{0,i} \mathbb{E}[Z^{(i)}] + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)}] \\ &\quad + n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} \mathbb{E}[Z^{(i)}] + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] \right) + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^{(i)}] &= \sqrt{n} \mu_i = 0, \\ \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)}] &= \mu_{ij} \\ \mathbb{E}[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] &= n^{-1/2} \mu_{ijk}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[S_n] = n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} \mu_{ij} + O(n^{-3/2}).$$

On en déduit la valeur de $k_{1,2,SBMV}$:

$$k_{1,2,SBMV} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} \mu_{ij}.$$

On constate qu'il s'agit de la même expression que pour $\hat{\pi}_{MV}$.

Maintenant calculons S_n^2 en ne gardant que les termes au plus en n^{-1} :

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^2 + n^{-1} \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right)^2 + n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right) \\ &\quad + 2n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} Z^{(i)} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{0,j} Z^{(i)} Z^{(j)} + n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,ij} b_{0,kl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \\ &\quad + n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + n^{-1} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,jkl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \\ &\quad + 2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{2,j} Z^{(i)} Z^{(j)} + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right). \\ \mathbb{E} [S_n^2] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{0,j} \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} \right] + n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,ij} b_{0,kl} \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right] \\ &\quad + n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right] + n^{-1} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,jkl} \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right] \\ &\quad + 2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{2,j} \mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} \right] + O \left(n^{-3/2} \right). \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\mathbb{E} \left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right] = (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) + n^{-1} (\mu_{ijkl} - \mu_{ij} \mu_{kl} - \mu_{ik} \mu_{jl} - \mu_{il} \mu_{jk}) = E_4(i, j, k, l).$$

On peut enfin achever le calcul de $\mathbb{E} [S_n^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n^2] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{0,j} \mu_{ij} + 2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{2,j} \mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} \mu_{ijk} \\ &\quad + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{b_{0,ij} b_{0,kl}}{4} + \frac{b_{0,i} b_{0,jkl}}{3} \right) (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) + O \left(n^{-3/2} \right). \end{aligned}$$

La correction apportée par le terme B_2/n n'apparaît que dans le terme en $1/n$.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\kappa_{2,n} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{0,j} \mu_{ij} + 2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{2,j} \mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} \mu_{ijk} \\
&+ n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{b_{0,ij} b_{0,kl}}{4} + \frac{b_{0,i} b_{0,jkl}}{3} \right) (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \\
&- n^{-1} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,ij} b_{0,kl} \mu_{ij} \mu_{kl} \\
&+ O\left(n^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par identification :

$$\begin{aligned}
k_{2,1,SBMV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{0,j} \mu_{ij}. \\
k_{2,2,SBMV} &= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i} b_{2,j} \mu_{ij} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} \mu_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,ij} b_{0,kl} \mu_{ik} \mu_{jl} \\
&+ \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,jkl} \mu_{ij} \mu_{kl}.
\end{aligned}$$

On remarque que $k_{2,1,SBMV} = k_{2,1,MV}$ ce qui était un résultat attendu puisque les deux estimateurs sont \sqrt{n} -équivalents et que $k_{2,1}$ est la variance de l'estimateur dont on fait le développement.

Calcul de $k_{3,1,SBMV}$:

Calcul de S_n^3 :

$$\begin{aligned}
S_n^3 &= \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^3 + 3 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^2 \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right) \\
&+ 3 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right) \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right)^2 \\
&+ 3 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^2 n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} Z^{(i)} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-3/2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} + \frac{3}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \right) \\
&+ \frac{3}{4} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} b_{0,lm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \right) \\
&+ 3n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{2,k} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,klm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \right) + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n^3] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} \mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] + \frac{3}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} \mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}] \right) \\ &+ \frac{3}{4} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,jk} b_{0,lm} \mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}] \right) \\ &+ 3n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{2,k} \mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] \right) \\ &+ \frac{1}{2} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,klm} \mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}] \right) + O \left(n^{-3/2} \right). \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}] = n^{-1/2} \mu_{ijk}$ et $\mathbb{E} [Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}] = O \left(n^{-1/2} \right)$, l'expression de $\mathbb{E} [S_n^3]$ reste donc inchangée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n^3] &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} \mu_{ijk} + \frac{3}{2} n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \\ &+ O \left(n^{-3/2} \right). \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer le cumulants $\kappa_{3,n}$. Or on remarque que, dans la formule donnant $\kappa_{3,n}$, seul $\mathbb{E} [S_n^2]$ est touché par l'ajout du terme B_2/n . Cette modification n'affecte que $k_{2,2,SBMV}$, $k_{2,1,SBMV}$ quant à lui restant identique à la valeur $k_{2,1,MV}$ que l'on a calculée précédemment. Si on consulte les calculs réalisés pour déterminer la valeur de $\kappa_{3,n}$, on s'aperçoit que seul $k_{2,1,SBMV}$ est utilisé au cours du calcul. Ainsi la formule donnant $\kappa_{3,n}$ reste inchangée et par conséquent il en va de même pour la valeur de $k_{3,1,SBMV}$:

$$k_{3,1,SBMV} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} \mu_{ijk} + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} \mu_{ik} \mu_{jl}.$$

Ainsi $k_{3,1,SBMV} = k_{3,1,MV}$.

Calcul de $k_{4,1,SBMV}$: Finalement, on calcule :

$$\begin{aligned} S_n^4 &= \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^4 + 4 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^3 n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \\ &+ 6 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^2 \left(n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,ij} Z^{(i)} Z^{(j)} \right)^2 \\ &+ 4 \left(\sum_{i=1}^d b_{0,i} Z^{(i)} \right)^3 n^{-1} \left(\sum_{i=1}^d b_{2,i} Z^{(i)} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,ijk} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} \right) + O_{\mathbb{P}} \left(n^{-3/2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} \\
& +3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} b_{0,mo} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \\
& +\frac{2}{3}n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)} \\
& +4n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{2,l} Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} + O_{\mathbb{P}}\left(n^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'espérance de S_n^4

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^4] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}\right] \\
& +2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)}\right] \\
& +3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} b_{0,mo} \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)}\right] \\
& +\frac{2}{3}n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)}\right] \\
& +4n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{2,l} \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}\right] + O\left(n^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

On doit donc étudier :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^4] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} E_4(i, j, k, l) \\
& +2n^{-1/2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} E_5(i, j, k, l, m) \\
& +3n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,kl} b_{0,mo} E_6(i, j, k, l, m, o) \\
& +\frac{2}{3}n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,lm} E_6(i, j, k, l, m, o) \\
& +4n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{2,l} E_4(i, j, k, l) + O\left(n^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

On rappelle la valeur de $E_6 = \mathbb{E}\left[Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)} Z^{(m)} Z^{(o)}\right]$:

$$\begin{aligned}
E_6(i, j, k, l, m, o) &= \mu_{ij} \mu_{kl} \mu_{mo} + \mu_{ij} \mu_{km} \mu_{lo} + \mu_{ij} \mu_{ko} \mu_{ml} \\
& +\mu_{ik} \mu_{jl} \mu_{mo} + \mu_{ik} \mu_{jm} \mu_{lo} + \mu_{ik} \mu_{jo} \mu_{ml}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_{il}\mu_{kj}\mu_{mo} + \mu_{il}\mu_{km}\mu_{jo} + \mu_{il}\mu_{jo}\mu_{mk} \\
& +\mu_{im}\mu_{kl}\mu_{jo} + \mu_{im}\mu_{kj}\mu_{lo} + \mu_{im}\mu_{ko}\mu_{jl} \\
& +\mu_{io}\mu_{kl}\mu_{mj} + \mu_{io}\mu_{km}\mu_{lj} + \mu_{io}\mu_{kj}\mu_{ml} + O(n^{-1})
\end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le théorème de Schwarz, valable puisque B_0 et B_2 sont C^5 au voisinage de $(0, 1, 0, 3)$, et la symétrie de la définition des moments :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^4] &= 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{0,l}\mu_{ij}\mu_{kl} + n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{0,l}(\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij}\mu_{kl}) \right. \\
& + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{0,l}b_{0,m}(3\mu_{ij}\mu_{klm} + 6\mu_{il}\mu_{jkm} + \mu_{lm}\mu_{ijk}) \\
& + 3 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{0,l}b_{0,m}b_{0,o}(\mu_{ij}\mu_{kl}\mu_{mo} + 2\mu_{ij}\mu_{km}\mu_{lo} + 4\mu_{ik}\mu_{jl}\mu_{mo} + 8\mu_{ik}\mu_{jm}\mu_{lo}) \\
& \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{0,l}b_{0,m}b_{0,o}(9\mu_{ij}\mu_{kl}\mu_{mo} + 4\mu_{im}\mu_{kl}\mu_{jo} + 2\mu_{im}\mu_{kj}\mu_{lo}) \right] \\
& + 12n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{2,l}\mu_{ij}\mu_{kl} + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

La formule exprimant le quatrième cumulant $\kappa_{4,n}$ en fonction des moments centrés de S_n est :

$$\kappa_{4,n} = \underbrace{\mathbb{E}[S_n^4]}_{\text{Modifié}} - 4\underbrace{\mathbb{E}[S_n^3]\mathbb{E}[S_n]}_{\text{Inchangé}} - 3\underbrace{\mathbb{E}[S_n^2]^2}_{\text{Modifié}} + 12\underbrace{\mathbb{E}[S_n^2]\mathbb{E}[S_n]^2}_{\text{Inchangé}} - 6\underbrace{\mathbb{E}[S_n]^4}_{\text{Inchangé}},$$

où l'on a repéré les termes modifiés par la présence du terme B_2/n si l'on ne s'intéresse qu'à obtenir une précision en $O(n^{-3/2})$.

On doit donc seulement réévaluer $-3\mathbb{E}[S_n^2]^2$:

$$\begin{aligned}
& -3 \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i}b_{0,j}\mu_{ij} + n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}\mu_{ijk} + 2n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{0,i}b_{2,j}\mu_{ij} \right. \\
& \left. n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \left(\frac{b_{0,ij}b_{0,kl}}{4} + \frac{b_{0,i}b_{0,jkl}}{3} \right) (\mu_{ij}\mu_{kl} + \mu_{ik}\mu_{jl} + \mu_{il}\mu_{jk}) \right)^2 + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

On constate qu'à la précision recherchée en $O(n^{-3/2})$ il n'y a que le terme correctif suivant :

$$-12n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i}b_{0,j}b_{0,k}b_{2,l}\mu_{ij}\mu_{kl}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\kappa_{4,n} &= n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij}\mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mu_{il} \mu_{jk} \mu_{km} \right. \\
&\quad + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (\mu_{ij}\mu_{kl}\mu_{mo} + 2\mu_{ij}\mu_{km}\mu_{lo} + 4\mu_{ik}\mu_{jl}\mu_{mo} + 16\mu_{ik}\mu_{jm}\mu_{lo}) \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (4\mu_{im}\mu_{kl}\mu_{jo} + 2\mu_{im}\mu_{kj}\mu_{lo}) \right] \\
&\quad - 12n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mu_{ij}\mu_{kl} + 12n^{-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mu_{ij}\mu_{kl} + O(n^{-3/2}) \\
&= n^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij}\mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mu_{il} \mu_{jk} \mu_{km} \right. \\
&\quad + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (\mu_{ij}\mu_{kl}\mu_{mo} + 2\mu_{ij}\mu_{km}\mu_{lo} + 4\mu_{ik}\mu_{jl}\mu_{mo} + 16\mu_{ik}\mu_{jm}\mu_{lo}) \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (4\mu_{im}\mu_{kl}\mu_{jo} + 2\mu_{im}\mu_{kj}\mu_{lo}) \right].
\end{aligned}$$

Le quatrième cumulant est donc laissé inchangé par l'ajout du terme en B_2/n .

On obtient finalement $k_{4,1,SBMV}$:

$$\begin{aligned}
k_{4,1,SBMV} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} (\mu_{ijkl} - 3\mu_{ij}\mu_{kl}) + 12 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} \mu_{il} \mu_{jk} \mu_{km} \\
&\quad + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (\mu_{ij}\mu_{kl}\mu_{mo} + 2\mu_{ij}\mu_{km}\mu_{lo} + 4\mu_{ik}\mu_{jl}\mu_{mo} + 16\mu_{ik}\mu_{jm}\mu_{lo}) \\
&\quad + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{o=1}^d b_{0,i} b_{0,j} b_{0,k} b_{0,l} b_{0,m} b_{0,o} (4\mu_{im}\mu_{kl}\mu_{jo} + 2\mu_{im}\mu_{kj}\mu_{lo}),
\end{aligned}$$

qui est identique à $k_{4,1,MV}$.

5. Développements de Cornish-Fisher

Nous souhaitons obtenir les deux quantiles de niveau α pour les deux estimateurs dont nous avons obtenu un développement d'Edgeworth qui sont déterminés par :

$$w_{\alpha}^{\bullet,\bullet} = \inf \{x : \mathbb{P}[\sqrt{n}F_{\bullet,\bullet}(\bar{X}, s_c^2/k^2) \leq x] \geq \alpha\}.$$

Notons z_{α} le quantile de niveau α d'une loi normale centrée réduite. Les équations (3.3) et (4.1) permettent d'obtenir un développement de w_{α} dans les quatre cas qui nous intéressent en fonction de z_{α} :

$$w_{\alpha}^{\bullet,\bullet} = z_{\alpha} - n^{-1/2}p_{1,\bullet,\bullet}(z_{\alpha}) + n^{-1}p_{1,\bullet,\bullet}(z_{\alpha})p'_{1,\bullet,\bullet}(z_{\alpha}) - \frac{1}{2}z_{\alpha}p_{1,\bullet,\bullet}^2(z_{\alpha}) - p_{2,\bullet,\bullet}(z_{\alpha}) + O(n^{-3/2}) \quad (5.1)$$

avec $p_{1,\bullet,\bullet}$ et $p_{2,\bullet,\bullet}$ comme définis ci-dessus au théorème 3.1 ou au théorème 4.1.

6. Conclusion et perspectives

Nous avons établi les développements d'Edgeworth de deux estimateurs d'une proportion de mesures. Ces développements doivent maintenant être testés sur des données réelles. De tels résultats seront présentés ultérieurement, en particulier le recours à des techniques bootstrap justifié par le fait que les paramètres μ et σ^2 sont inconnus. Pour plus de détails à ce sujet nous renvoyons à [3] et [4].

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Bruno BOULANGER et Walthère DEWÉ, E. LILLY, Mont-Saint-Guibert (Belgique), pour leur avoir proposé un sujet si intéressant à explorer.

Références

- [1] T.L. Boullion, G.C. Cascio, and J.P. Keating. Comparison of estimators of the fraction defective in the normal distribution. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 14(7) :1511–1529, 1985.
- [2] R. Iasnogorodski et H. Lhétitier. *Théorie de l'estimation ponctuelle paramétrique*. EDP Sciences, 2003.
- [3] A. Guillou. Efficient weighted bootstraps for the mean. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 77 :11–35, 1999.
- [4] A. Guillou. Weighted bootstraps for the variance. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 81 :113–120, 1999.
- [5] P. Hall. Inverting an Edgeworth Expansion. *The Annals of Statistics*, 11(2) :569–576, 1983.
- [6] P. Hall. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer, New-York, 1992.
- [7] A.N. Kolmogorov. Unbiased estimates. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 14(303), 1950.
- [8] G.J. Lieberman and G.J. Resnikoff. Sampling plans for inspection by variables. *American Statistical Association Journal*, pages 457–516, 1955.
- [9] R.W. Mee. Estimation of the percentage of a normal distribution lying outside a specified interval. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 17 :1465–1479, 1988.
- [10] C.S. Withers. Expansions for the distribution and quantiles of a regular functional of the empirical distribution with applications to nonparametric confidence intervals. *Annals of Statistics*, 11(2) :577–587, 1983.