



# Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 4

Gérald Tenenbaum, Jie Wu

## ► To cite this version:

Gérald Tenenbaum, Jie Wu. Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 4. 2007. [⟨hal-00166300⟩](#)

**HAL Id: hal-00166300**

**<https://hal.science/hal-00166300v1>**

Preprint submitted on 2 Aug 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 4

Gérald Tenenbaum & Jie Wu

## 1. Introduction

Désignons par  $P(n)$  le plus grand facteur premier d'un entier  $n$  avec la convention  $P(1) := 1$ . Pour  $x \geq 1, y \geq 1$ , notons

$$S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers  $y$ -friables n'excédant pas  $x$  et  $\Psi(x, y)$  son cardinal. Dans les trois premiers volets de cette étude [9], [3], [10], nous avons donné, sous diverses hypothèses, des évaluations asymptotiques pour les sommes

$$(1.1) \quad \Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n), \quad \psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} \frac{f(n)}{n},$$

lorsque  $f$  est une fonction arithmétique multiplicative positive ou nulle, ou proche, en un sens convenable, d'une telle fonction.

Dans tous les énoncés correspondants, les nombres  $f(p)$  sont supposés, en moyenne, proches d'un nombre positif fixé  $\kappa$ . Notons systématiquement

$$u := (\log x) / \log y.$$

Les formules ou les inégalités asymptotiques obtenues font intervenir deux types d'approximation : d'une part, les termes principaux explicites, qui sont essentiellement des produits du type  $x^\sigma (\log y)^\tau q(u)$  où  $\sigma, \tau$  sont des constantes, et  $q$  est solution continue d'une équation différentielle aux différences, d'autre part, les termes principaux abstraits, qui s'expriment comme des intégrales de Stieltjes relatives à des mesures de nature arithmétique.

L'expression introduite par de Bruijn dans [1]

$$\Lambda(x, y) := x \int_{\mathbb{R}} \varrho(u - v) d\left(\frac{[y^v]}{y^v}\right),$$

où  $\varrho$  désigne la fonction de Dickman et  $[\cdot]$  désigne la partie entière, constitue le prototype des termes principaux abstraits. Posons

$$L_\beta(y) := e^{(\log y)^\beta} \quad (y \geq 1),$$

et introduisons la condition

$$(H_\beta) \quad x \geq 3, \quad \exp \{ (\log_2 x)^{1/\beta} \} \leq y \leq x.$$

La dichotomie précédente est illustrée, par la validité, dans le même domaine  $(H_\beta)$ , de l'approximation de Hildebrand [4]

$$(1.2) \quad \Psi(x, y) = x \varrho(u) \left\{ 1 + O \left( \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right\},$$

et de celle de Saias [5]

$$(1.3) \quad \Psi(x, y) = \Lambda(x, y) \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{L_\beta(y)} \right) \right\},$$

pour tout  $\beta \in ]0, 3/5[$ .

L'approximation  $\Lambda(x, y) \approx x \varrho(u)$ , qui découle de (1.2) et (1.3) dans le domaine  $H_\beta$ , peut facilement être obtenue par intégration par parties dans une région significativement plus étendue (voir par exemple [7], lemme III.5.9.2). On peut même donner ainsi, lorsque  $u$  n'est pas trop proche d'un entier fixé par valeurs supérieures, un développement asymptotique de  $\Lambda(x, y)$ , qui fournit à son tour une approximation explicite plus précise de  $\Psi(x, y)$  — voir [5], [2]. Ces formules peuvent être étendues au cas général considéré dans [3], mais sont notablement plus délicates à établir lorsque  $\kappa \notin \mathbb{N}$ .

Nous nous proposons ici de revenir brièvement sur la flexibilité offerte par les termes principaux abstraits, notamment en matière de sommation d'Abel. À cette fin, nous développons deux applications, représentatives de nos résultats récents.

La première consiste à montrer comment les estimations de [3] concernant  $\Psi_f(x, y)$  peuvent être employées pour affiner, sous des hypothèses adéquates, les formules asymptotiques obtenues dans [10] pour  $\psi_f(x, y)$ .

Quelques notations sont nécessaires pour énoncer le résultat. Nous avons défini dans [3] plusieurs classes de fonctions arithmétiques, dont les séries de Dirichlet associées sont de la forme

$$(1.4) \quad \mathcal{F}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{1 \leq j \leq r} \zeta_{\mathbb{K}_j}(s)^{\kappa_j} G(s)$$

où les  $\mathbb{K}_j$  sont des corps de nombres arbitraires,  $\zeta_{\mathbb{K}}$  désigne génériquement la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres  $\mathbb{K}$ , les  $\kappa_j$  sont des nombres réels non nuls tels que

$$\kappa := \sum_{1 \leq j \leq r} \kappa_j > 0$$

et  $G$  est une série de Dirichlet possédant de « bonnes » propriétés de prolongement analytique. Renvoyant à [3] pour les définitions précises, nous nous contentons

d'indiquer ici que, pour tous nombres réels positifs  $\beta, c, \delta, \kappa$ , tels que  $\beta + \delta < 3/5$ , la classe  $\mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$  comprend les fonctions  $f$  positives ou nulles satisfaisant à (1.4) pour  $\sigma := \Re s > 1$  et pour lesquelles que la série  $G(s) := \sum_{n \geq 1} g(n)/n^s$  est prolongeable holomorphiquement au domaine

$$\sigma > 1 - c/\{1 + \log^+ |\tau|\}^{(1-\beta-\delta)/(\beta+\delta)} \quad (s = \sigma + i\tau),$$

où elle vérifie les conditions<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} G(1) &\neq 0, \quad G(s) \ll \{1 + |\tau|\}^{1-\delta}, \\ G(s) - \sum_{P(n) \leq y} \frac{g(n)}{n^s} &\ll \frac{1}{L_{\beta+\delta}(y)} \left( y \geq 2, \sigma > 1 - \frac{c}{(\log y)^{1-\beta-\delta}}, |\tau| \leq L_{\beta+\delta}(y) \right). \end{aligned}$$

La classe  $\mathcal{H}_+^*(\kappa; \beta, c, \delta)$  correspond à la condition supplémentaire que tous les  $\kappa_j$  sont des entiers positifs et que  $G$  est prolongeable holomorphiquement au demi-plan  $\sigma \geq 1 - \delta$ , où elle vérifie la majoration précédente.

Lorsque  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ , la fonction  $s^\kappa \mathcal{F}(s+1)/(s+1)$  est holomorphe au voisinage de l'origine. Nous introduisons explicitement son développement de Taylor

$$(1.5) \quad \frac{s^\kappa \mathcal{F}(s+1)}{s+1} = \sum_{j \geq 0} a_j(f) s^j$$

et notons que nous avons alors

$$(1.6) \quad F(y) := \psi_f(\infty, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\beta(y)}\right) \right\} a_0(f) e^{\gamma \kappa} (\log y)^\kappa,$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

Nous obtenons le résultat suivant dans l'énoncé duquel nous posons

$$\psi_f^*(x, y) := F(y) - \psi_f(x, y) = \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leq y}} \frac{f(n)}{n}, \quad s_f(x) := \psi_f(x, x).$$

Comme dans [9], nous notons  $z_\kappa(u)$  la solution continue sur  $]0, \infty[$  de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases} z_\kappa(u) = 0 & \text{si } u < 0, \\ z_\kappa(u) = 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ uz'_\kappa(u) = -\kappa z_\kappa(u-1) & \text{si } u > 1, \end{cases}$$

et nous désignons par  $\varrho_\kappa$  la puissance de convolution d'ordre  $\kappa$  de la fonction de Dickman  $\varrho = \varrho_1$ , prolongée, ainsi de toutes ses dérivées, par continuité à droite sur  $\mathbb{R}$ .

---

1. Nous avons en fait décrit dans [3] des conditions plus générales concernant les tronques de la série  $G$  que nous n'exploiterons pas dans le présent travail.

**Théorème 1.1.** Soient  $\beta, c, \delta, \kappa$ , des nombres réels positifs tels que  $\beta + \delta < 3/5$ , et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ . On a

$$(1.7) \quad \psi_f(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\beta(y)}\right) \right\} \int_{\mathbb{R}} z_\kappa(u - v) \, ds_f(y^v)$$

uniformément sous la condition

$$(G_\beta) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log x)^{1-\beta}\} \leq y \leq x,$$

et, plus précisément,

$$(1.8) \quad \psi_f^*(x, y) = a_0(f) e^{\gamma_\kappa} (\log y)^\kappa - \int_{\mathbb{R}} z_\kappa(u - v) \, ds_f(y^v) + O\left(\frac{\varrho_\kappa(u) \psi_f(x, y)}{L_\beta(y)}\right).$$

En particulier, posant

$$\varrho_\kappa^{(-1)}(u) := - \int_u^\infty \varrho_\kappa(v) \, dv, \quad a_{-1}(f) = 0, \quad b_j(f) := a_{j-1}(f) + a_j(f) \quad (j \geq 0),$$

pour chaque entier naturel  $J$  et sous la condition supplémentaire

$$(1.9) \quad 0 < u < J + 2 - \kappa \Rightarrow \langle u \rangle > \varepsilon_{J,y} := \frac{\{(J+1) \log_2 y\}^{1/\beta}}{\log y},$$

nous avons

$$(1.10) \quad \psi_f^*(x, y) = - \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{b_j(f) \varrho_\kappa^{(j-1)}(u)}{(\log y)^{j-\kappa}} + O\left(\frac{\varrho_\kappa(u) \{\log(u+1)\}^{J+1}}{(\log y)^{J+1-\kappa}}\right),$$

De plus, si  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ , les estimations précédentes ont lieu uniformément pour  $(x, y) \in (H_\beta)$  avec  $\varepsilon_{J,y} := B(J+1)(\log_2 y)/\log_2 y$ , où  $B$  est une constante assez grande.

La formule (1.10) appliquée avec  $J = 0$  précise, sous des hypothèses plus fortes, l'évaluation du théorème 3.2 de [10].

Soient  $F$  un polynôme à coefficients entiers et  $\varrho_F$  la fonction arithmétique qui associe à chaque entier  $n$  le nombre des racines de  $F$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Lorsque la décomposition canonique de  $F$  en produit de polynômes irréductibles de  $\mathbb{Z}[X]$  est sans facteur carré, on a  $\varrho_F \in \mathcal{H}_+(\deg F; \beta, c, \delta)$  pour tout  $\beta < 3/5$  et pour des constantes  $c, \delta$  convenables.

Scourfield [6] a récemment considéré le cas particulier  $f = \varrho_F$  de (1.1). Alors que le théorème 2 de [6] est, comme indiqué dans ce travail, une reformulation du cas  $f = \varrho_F$  des théorèmes 1.1 et 1.2 de [3], le théorème 3 de [6] est établi directement, en appliquant à somme pondérée  $\psi_f(x, y)$  la méthode employée dans [3] pour traiter la fonction sommatoire  $\Psi_f(x, y)$ . Cela a conduit, en fait, à une certaine perte de précision, ainsi que l'atteste, par exemple, la comparaison des termes d'erreur de (1.10) et de la formule (17) de [6].

Il est vraisemblable qu'un raffinement de l'approche directe par intégration complexe permette de retrouver exactement les estimations du Théorème 1.1. Cependant, nous nous sommes attachés à fournir ici les détails du traitement par intégration par parties : il est plus naturel, moins lourd dans sa mise en œuvre, et illustre une technique spécifique d'exploitation des termes principaux abstraits inhérents à la théorie.

Le Théorème 1.1 constitue un exemple d'intégration par parties du terme principal  $\Lambda_f(x, y)$  relatif à la variable  $x$ . Notre second résultat concerne le cas de la variable  $y$ . Nous posons

$$(1.11) \quad m := [\kappa], \quad \vartheta := \langle \kappa \rangle := \kappa - [\kappa]$$

et notons, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\gamma_j(\kappa, r) := \frac{\Gamma(\vartheta + r)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\kappa + r - j)} - \frac{r\Gamma(\vartheta + r)}{\Gamma(\kappa + r - j)} \int_1^\infty \frac{\varrho_\kappa^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv.$$

**Théorème 1.2.** Soient  $\beta, c, \delta, \kappa, r$ , des nombres réels positifs tels que  $\beta + \delta < 3/5$ , et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ . Il existe une constante positive  $c_1$  telle que l'on ait, uniformément pour  $x \geq 2$ ,  $J \in \mathbb{N}$ ,

$$(1.12) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \{\log P(n)\}^r = x(\log x)^{\kappa+r-1} \left\{ \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{a_j(f) \gamma_j(\kappa, r)}{(\log x)^j} + O(\mathcal{R}_J^*(x)) \right\},$$

où l'on a posé

$$(1.13) \quad \mathcal{R}_J^*(x) := \frac{1}{L_{\beta/(\beta+1)}(x)} + \frac{(c_1 J + 1)^{(J+1)/\beta}}{(\log x)^{J+1}}.$$

On notera en particulier que, si  $\kappa$  est entier, les coefficients  $\gamma_j(\kappa, r)$  sont nuls pour  $j \geq \kappa + r$ . Cette situation est particulièrement favorable pour tirer partie de l'uniformité en  $J$  de la formule (1.12), en choisissant  $J \asymp (\log x)^\beta$ . On retrouve ainsi, par exemple, le résultat de l'exercice corrigé III.5.3 de [8], relatif au cas  $f = \mathbf{1}$ ,  $r = 1$ .

## 2. Preuve du Théorème 1.1

Soient  $\beta, c, \delta, \kappa$ , des nombres réels positifs tels que  $\beta + \delta < 3/5$  et  $f$  une fonction arithmétique de  $\mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ . La méthode de Selberg–Delange décrite aux chapitres II.5 et II.6 de [7] permet d'évaluer la fonction sommatoire de  $f$ . On obtient ainsi, pour tout entier naturel  $J$ ,

$$(2.1) \quad S_f(x) := \Psi_f(x, x) = x(\log x)^{\kappa-1} \left\{ \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{a_j(f)}{\Gamma(\kappa - j)(\log x)^j} + O(\mathcal{R}_J(x)) \right\},$$

où l'on a posé, pour des constantes convenables  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,

$$(2.2) \quad \mathcal{R}_J(x) := \frac{1}{L_{\beta+\delta}(x)^a} + \left( \frac{bJ + 1}{\log x} \right)^{J+1}$$

et où la constante implicite est indépendante de  $J$ .

Notre approximation pour  $\Psi_f(x, y)$  est l'expression intégrale de Stieltjes

$$(2.3) \quad \Lambda_f(x, y) := x \int_{\mathbb{R}} z_{\kappa}(u - v) d\left(\frac{S_f(y^v)}{y^v}\right).$$

D'après le théorème 1.2 de [3], les formules asymptotiques

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Psi_f(x, y) &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_{\beta}(y)}\right)\right\} \Lambda_f(x, y) \\ &= a_0(f)x\varrho_{\kappa}(u)(\log y)^{\kappa-1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{(\log y)^{\kappa}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} \end{aligned}$$

ont lieu, sous les hypothèses effectuées, uniformément dans le domaine  $(G_{\beta})$ . Si, de plus,  $\kappa$  est entier et  $f$  appartient à  $\mathcal{H}_{+}^{*}(\kappa; \beta, c, \delta)$ , la formule (2.4) vaut uniformément dans le domaine  $(H_{\beta})$ .

Posant  $\lambda_y(u) := \Lambda_f(x, y)/x$ , nous avons donc, dans les hypothèses de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \psi_f(x, y) &= \int_1^x \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt + \frac{\Psi_f(x, y)}{x} \\ &= \int_1^y \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt + \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_{\beta}(y)}\right)\right\} \left\{\int_y^x \frac{\Lambda_f(t, y)}{t^2} dt + \lambda_y(u)\right\} \\ &= (\log y) \left\{\int_0^1 \frac{S_f(y^v)}{y^v} dv + \int_1^u \frac{\Lambda_f(y^v, y)}{y^v} dv\right\} + \lambda_y(u) + O\left(\frac{\psi_f(x, y)}{L_{\beta}(y)}\right). \end{aligned}$$

Transformons la dernière intégrale en appliquant le théorème de Fubini et en effectuant une intégration par parties. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_1^u \frac{\Lambda_f(y^v, y)}{y^v} dv &= \int_1^u dw \int_{\mathbb{R}} z_{\kappa}(w - v) d\left(\frac{S_f(y^v)}{y^v}\right) \\ &= \int_0^u \frac{S_f(y^v)}{y^v} \{z_{\kappa}(u - v) - z_{\kappa}(1 - v)\} dv = \mu_y(u) - \int_0^1 \frac{S_f(y^v)}{y^v} dv \end{aligned}$$

avec

$$\mu_y(u) := \int_0^u \frac{S_f(y^v)}{y^v} z_{\kappa}(u - v) dv.$$

En reportant, il vient

$$(2.5) \quad \psi_f(x, y) = \mu_f(u) \log y + \lambda_y(u) + O\left(\frac{\psi_f(x, y)}{L_{\beta}(y)}\right).$$

Or, nous avons

$$s_f(y^v) = \int_{0-}^v y^{-w} dS_f(y^w) = y^{-v} S_f(y^v) + (\log y) \int_0^v S_f(y^w) y^{-w} dw,$$

et donc

$$(2.6) \quad ds_f(y^v) = d\left(\frac{S_f(y^v)}{y^v}\right) + (\log y) \frac{S_f(y^v)}{y^v} dv.$$

Cela nous permet de récrire (2.5) sous la forme

$$\begin{aligned} \psi_f(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} z_{\kappa}(u - v) ds_f(y^v) + O\left(\frac{\psi_f(x, y)}{L_{\beta}(y)}\right) \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_{\beta}(y)}\right)\right\} \int_{\mathbb{R}} z_{\kappa}(u - v) ds_f(y^v). \end{aligned}$$

Cela établit bien la formule (1.7), qui étend le th. 3(i) de [6].

Pour établir (1.10), nous notons d'abord que, d'après le théorème 1.1 de [3], nous avons

$$(2.7) \quad \lambda_y(u) = (\log y)^{\kappa-1} \left\{ \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{a_j(f) \varrho_{\kappa}^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(\frac{\varrho_{\kappa}(u) \{\log(u+1)\}^{J+1}}{(\log y)^{J+1}}\right) \right\}$$

sous les conditions de l'énoncé. Puis, nous rappelons la définition suivante, donnée au lemme 3.2 de [3],

$$\nu_{\kappa}(v) := \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \int_0^{v^+} \frac{S_f(e^w)}{e^w (v-w)^{\vartheta}} dw \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Nous avons alors, d'après cet énoncé,

$$(2.8) \quad \lambda_y(u) = (\log y)^{\vartheta-1} \int_{0-}^u \varrho_{\kappa}^{(m)}(u-v) d\nu_{\kappa}(v \log y)$$

où, lorsque  $\vartheta = 0$ , la dérivée  $\varrho_{\kappa}^{(m)}$  est comprise au sens des distributions.

Posant  $Z_{\kappa}(u) := \int_0^u z_{\kappa}(v) dv$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mu_y(u) &= \int_{0-}^u Z_{\kappa}(u-v) d(S_f(y^v)/y^v) = \int_0^u \lambda_y(v) dv \\ &= (\log y)^{\vartheta-1} \int_{0-}^u \int_0^{\max(u-v, 0)} \varrho_{\kappa}^{(m)}(w) dw d\nu_{\kappa}(v \log y) \\ &= (\log y)^{\vartheta-1} \int_{0-}^u \varrho_{\kappa}^{(m-1)}(u-v) d\nu_{\kappa}(v \log y). \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale peut être estimée en reproduisant, *mutatis mutandis* les calculs effectués dans [3] pour obtenir (2.7) à partir de (2.8). Nous obtenons, toujours sous les conditions de l'énoncé,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\mu_y(u)}{(\log y)^{\kappa-1}} &= a_0(f) \int_0^u \varrho_{\kappa}(v) dv + \sum_{1 \leq j \leq J} \frac{a_j(f) \varrho_{\kappa}^{(j-1)}(u)}{(\log y)^j} \\ &\quad + O\left(\frac{\varrho_{\kappa}(u) \{\log(u+1)\}^{J+1}}{(\log y)^{J+1}}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons, dans les domaines considérés,

$$\begin{aligned}\psi_f^*(x, y) &= \int_x^\infty \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt - \frac{\Psi_f(x, y)}{x} \\ &= \int_x^\infty \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt - \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\beta(y)}\right) \right\} \lambda_y(u).\end{aligned}$$

Soit

$$U := \begin{cases} (\log y)^{\beta/(1-\beta)} & \text{si } f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta), \\ \exp\{(\log y)^\beta\} & \text{si } \kappa \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{H}_+^*(\kappa; \beta, c, \delta). \end{cases}$$

Posons  $X := y^U$ . En raisonnant comme précédemment, nous obtenons

$$\begin{aligned}(2.10) \quad \int_x^X \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\beta(y)^2}\right) \right\} \{\mu_y(U) - \mu_y(u)\} \log y \\ &= \{\mu_y(U) - \mu_y(u)\} \log y + O\left(\frac{\varrho_\kappa(u)(\log y)^\kappa}{L_\beta(y)}\right).\end{aligned}$$

Nous traitons l'intégrale complémentaire comme un terme d'erreur, que nous majorons par la méthode de Rankin. Posant

$$\mathcal{F}(s, y) := \sum_{P(n) \leq y} \frac{f(n)}{n^s},$$

nous avons en effet  $\Psi_f(x, y) \leq x^\sigma \mathcal{F}(\sigma, y)$  pour tous  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  et, en vertu du lemme 4.2 de [3],

$$X^\alpha \mathcal{F}(\alpha, y) \ll X \varrho_\kappa(U) \sqrt{U} (\log y)^{\kappa-1}$$

pour  $\alpha := 1 - \xi_\kappa(U)/\log y$ , où  $\xi_\kappa(u) := \max\{1, \xi(u/\kappa)\}$ , lorsque  $\xi(v)$  désigne, pour  $v > 0$ , l'unique solution positive de l'équation  $e^\xi = 1 + v\xi$ , avec la convention  $\xi(1) = 0$ . Il s'ensuit que, lorsque  $1 \leq u \leq \frac{1}{2}U$ , nous avons

$$\begin{aligned}\int_X^\infty \frac{\Psi_f(t, y)}{t^2} dt &= \frac{\Psi_f(X, y)}{X} + \sum_{n > X, P(n) \leq y} \frac{f(n)}{n} \leq X^{\alpha-1} \mathcal{F}(\alpha; y) \\ &\ll \varrho_\kappa(U) \sqrt{U} (\log y)^\kappa \ll \varrho_\kappa(u)/L_\beta(y).\end{aligned}$$

Comme il découle de (2.9) que

$$\mu_y(U) = a_0(f) e^{\gamma\kappa} (\log y)^{\kappa-1} + O\left(\frac{\varrho_\kappa(u)}{L_\beta(y)}\right) \quad (1 \leq u \leq \tfrac{1}{2}U),$$

nous obtenons la validité de (1.8) dans les domaines requis. La formule (1.10) découle alors d'une nouvelle application de (2.9).  $\square$

### 3. Preuve du Théorème 1.2

#### 3.1. Lemmes

Conservons les notations (1.11). Ainsi qu'il a été établi au lemme 3.5 de [3], pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{H}_+(\kappa; \beta; c, \delta)$ , on a

$$(3.1) \quad R_\kappa(v) := \nu_\kappa(v) - \sum_{0 \leq j \leq m} a_{m-j}(f) \frac{v^j}{j!} \ll \frac{1}{L_\beta(v)} \quad (v \geq 0)$$

où  $\{a_j(f)\}_{j=0}^\infty$  est la suite définie en (1.5). De plus, si  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ , on peut remplacer le majorant de (3.1) par  $e^{-c_0 v}$  où  $c_0$  est une constante positive convenable.

**Lemme 3.1.** Soient  $\beta, c, \delta, \kappa$ , des nombres réels positifs tels que  $\beta + \delta < 3/5$ , et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ . On a

$$(3.2) \quad \Lambda_f(x, y) \ll x \left\{ (\log y)^{\kappa-1} \varrho_\kappa(u) + \frac{1}{L_{\beta+\delta/2}(x)} \right\}$$

uniformément pour  $x \geq y \geq 2$ .

De plus, si  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ , cette estimation est valable en remplaçant  $1/L_{\beta+\delta/2}(x)$  par  $x^{-c_2}$  dans le membre de droite, pour une constante convenable  $c_2 > 0$ .

*Démonstration.* Nous supposons  $\kappa \notin \mathbb{N}$ , le cas complémentaire se traitant de manière semblable, et en fait plus simple.

D'après (2.4), nous avons certainement, sous la condition  $(G_\beta)$ ,

$$\Lambda_f(x, y) \ll x (\log y)^{\kappa-1} \varrho_\kappa(u).$$

Nous pouvons donc supposer dans ce qui suit que  $u \geq (\log x)^\beta$ .

D'après la formule (3.23) de [3], nous avons

$$(3.3) \quad \Lambda_f(x, y) = x (\log y)^{\kappa-1} \left\{ \sum_{0 \leq j < m} \frac{a_j(f) \varrho_\kappa^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(\frac{V_1 + V_2}{(\log y)^m}\right) \right\},$$

avec

$$V_1 := \int_{0-}^{u-1/2} \varrho_\kappa^{(m)}(u-v) dR_\kappa(v \log y),$$

$$V_2 := \int_{u-1/2}^u \varrho_\kappa^{(m)}(u-v) dR_\kappa(v \log y).$$

Nous évaluons  $V_1$  par intégration par parties, en utilisant (3.1) et l'estimation

$$\varrho_\kappa^{(j)}(u-v) \ll \varrho_\kappa(u) (Cu)^v (\log 2u)^{j+v} \quad (0 \leq v \leq u - \frac{1}{2}, j = m \text{ ou } m+1),$$

qui découle aisément, pour une constante convenable  $C$ , de la formule (3.22) de [3]. Nous obtenons ainsi, par un calcul de routine,

$$V_1 \ll L_{\beta+\delta/2}(x)^{-1},$$

où l'on peut remplacer le majorant par  $x^{-c_2}$  si  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{H}_+^*(\kappa; \beta, c, \delta)$ .

La même majoration vaut pour  $V_2$ ; le calcul a été effectué au paragraphe 3.2 de [3], sous forme de la majoration de l'intégrale  $J_3$  de [3], dont la définition coïncide avec celle de  $V_2$ .  $\square$

**Lemme 3.2.** *Soient  $\beta, c, \delta, \kappa$ , des nombres réels strictement positifs tels que  $\beta + \delta < 3/5$ , et  $f \in \mathcal{H}_+(\kappa; \beta, c, \delta)$ . Posons  $\vartheta := \langle \kappa \rangle$ ,  $m := [\kappa]$ . Soit  $s \geq 0$  tel que  $s + \vartheta > 0$ . Il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que l'on ait, uniformément pour  $x \geq 2$ ,  $J \geq 0$ ,*

$$\int_{1-}^x \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^{s+\vartheta-1} d\nu_\kappa(\log t) = \sum_{0 \leq j \leq J+m} \frac{a_j(f) \Gamma(s+\vartheta) (\log x)^{m-j}}{\Gamma(s+\vartheta+m-j)} + O(E_J(x)),$$

où l'on a posé

$$(3.4) \quad E_J(x) := \frac{1}{L_\beta(x)} + \frac{(c_3 J + 1)^{(J+1)/\beta}}{(\log x)^{J+1}}.$$

*Démonstration.* Avec la notation (3.1), nous pouvons écrire

$$(3.5) \quad \int_{1-}^x \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^{s+\vartheta-1} d\nu_\kappa(\log t) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{a_{m-j}(f)}{(j-1)!} Q_j(x) + \Delta(x),$$

où l'on a posé

$$(3.6) \quad Q_j(x) := \int_1^x \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^{s+\vartheta-1} (\log t)^{j-1} \frac{dt}{t} = (\log x)^j \frac{\Gamma(s+\vartheta)(j-1)!}{\Gamma(s+\vartheta+j)},$$

$$(3.7) \quad \Delta(x) := \int_{1-}^x \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^{s+\vartheta-1} dR_\kappa(\log t).$$

Introduisons la quantité  $N_x^*(w) := R_\kappa(w) - R_\kappa(\log x)$ . D'après (3.1), nous avons

$$(3.8) \quad N_x^*(w) \ll L_{\beta+\delta/2}(x)^{-1} \quad \left( \frac{1}{2} \log x \leq w \leq \log x \right).$$

De plus, le lemme 3.4 de [3] fournit

$$(3.9) \quad N_x^*(\log x - h) \ll h^{1-\vartheta} L_{\beta+\delta/2}(x/h)^{-\vartheta} + h(\log x)^\kappa \quad (0 < h \leq \tfrac{1}{2}).$$

Posons

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x)$$

où  $\Delta_1(x)$  désigne la contribution à l'intégrale de (3.7) de l'intervalle  $[1-, \frac{1}{2} \log x]$  et  $\Delta_2(x)$  celle de l'intervalle complémentaire. Nous avons d'abord, en vertu de (3.8),

$$\begin{aligned} \Delta_2(x) &= \int_{1/2}^1 (1-v)^{s+\vartheta-1} dN_x^*(v \log x) \\ &\ll L_{\beta+\delta/2}(x)^{-1} + \int_0^{(1/2) \log x} |N_x^*(\log x - h)| \frac{h^{s+\vartheta-2}}{(\log x)^{s+\vartheta-1}} dh. \end{aligned}$$

Scindons la dernière intégrale à  $h = \eta$ , où  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}]$  est un paramètre à optimiser. Il résulte alors de (3.8) et (3.9) que

$$\Delta_2(x) \ll \frac{\eta^s}{L_{\beta+\delta/3}(x)^\vartheta} + \eta^{s+\vartheta} (\log x)^{\kappa+1} + \frac{1 + \eta^{s+\vartheta-1}}{L_{\beta+\delta/3}(x)}.$$

Choisissant  $\eta := 1/L_{\beta+\delta+3}(x)$ , nous obtenons, compte tenu de l'inégalité  $s + \vartheta > 0$ ,

$$(3.10) \quad \Delta_2(x) \ll L_\beta(x)^{-1}.$$

Il reste à estimer  $\Delta_1(x)$ . À cette fin, nous écrivons

$$(1-v)^{s+\vartheta-1} = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{s+\vartheta-1}{j} v^j \quad (0 \leq v \leq \tfrac{1}{2}),$$

où la série est uniformément convergente. Il suit

$$\begin{aligned} (3.11) \quad \Delta_1(x) &= \int_{0-}^{1/2} (1-v)^{s+\vartheta-1} dR_\kappa(v \log x) \\ &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{s+\vartheta-1}{j} \int_{0-}^{1/2} v^j dR_\kappa(v \log x). \end{aligned}$$

À ce stade, nous observons que la représentation

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-sv} d\nu_\kappa(v) = \frac{s^\vartheta \mathcal{F}(s+1)}{s+1},$$

établie dans [3], et la majoration (3.1) impliquent, grâce à une intégration par parties,

$$\frac{(-1)^j}{j!} \int_{0-}^z v^j dR_\kappa(v) = a_{j+m}(f) + O\left(\frac{z^j + (c_4 j + 1)^{j/\beta}}{j! L_{\beta+\delta/3}(e^z)}\right)$$

uniformément pour  $j \geq 0$ ,  $z \geq 1$ , où  $c_4$  est une constante positive convenable. De plus, par une manipulation analogue, nous obtenons, uniformément pour  $J \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j>J} \left| \binom{s+\vartheta-1}{j} \int_{0-}^{1/2} v^j dR_\kappa(v \log x) \right| \\
& \ll \sum_{j>J} \frac{1}{j^{s+\vartheta}} \left\{ \frac{1}{2^j L_{\beta+\delta/3}(x)^{c_0/4}} + j \int_0^{(1/2) \log x} e^{-c_0 v^\beta} \left( \frac{v}{\log x} \right)^j dv \right\} \\
& \ll \frac{1}{L_\beta(x)} + \frac{1}{(\log x)^{J+1}} \int_0^{(1/2) \log x} v^{J+1} e^{-c_0 v^\beta} dv \\
& \ll \frac{1}{L_\beta(x)} + \frac{(c_3 J + 1)^{(J+1)/\beta}}{(\log x)^{J+1}}.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$j! \binom{s+\vartheta-1}{j} = \frac{\Gamma(s+\vartheta)}{\Gamma(s+\vartheta-j)} \quad (j \geq 0),$$

il suit

$$(3.12) \quad \Delta_1(x) = \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{\Gamma(s+\vartheta) a_{j+m}(f)}{\Gamma(s+\vartheta-j) (\log x)^j} + O(E_J(x))$$

où la constante implicite est indépendante de  $J$  et où  $E_J(x)$  est défini comme indiqué en (3.4).

Le résultat annoncé découle de la conjonction de (3.5), (3.6), (3.7), (3.10) et (3.12)

□

### 3.2. Complétion de l'argument

Nous avons

$$(3.13) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \{\log P(n)\}^r = S_f(x) (\log x)^r - r \int_1^x \frac{\Psi_f(x, y)}{y} (\log y)^{r-1} dy.$$

Scindons l'intégrale à  $Y = Y(x) := L_{1-\beta}(x)$  et appliquons (2.4) pour  $y \geq Y$ . Nous obtenons

$$\int_1^x \Psi_f(x, y) (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y} = \int_1^x \Lambda_f(x, y) (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y} + O(W_1 + W_2 + W_3),$$

avec

$$\begin{aligned}
W_1 &:= \int_1^Y \Psi_f(x, y) (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y}, & W_2 &:= \int_1^Y \Lambda_f(x, y) (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y}, \\
W_3 &:= \int_Y^x \frac{\Psi_f(x, y)}{L_\beta(y)} (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

D'après (2.4), nous avons

$$W_1 \ll \Psi_f(x, Y)(\log Y)^r \ll x/L_\beta(x).$$

Semblablement, nous déduisons de (3.2) que

$$W_2 \ll x \int_1^Y \left\{ (\log y)^{\kappa-1} \varrho_\kappa\left(\frac{\log x}{\log y}\right) + \frac{1}{L_{\beta+\delta/2}(x)} \right\} (\log y)^{r-1} \frac{dy}{y} \ll \frac{x}{L_\beta(x)}.$$

Pour estimer  $W_3$ , nous faisons à nouveau appel à la majoration contenue dans (2.4), en observant que

$$\min_{Y \leq y \leq x} \left\{ \frac{\log x}{\log y} + (\log y)^\beta \right\} \geq (1 + \beta)(\log x)^{\beta/(\beta+1)}.$$

Comme  $\varrho_\kappa(u) \ll e^{-u}$  sur  $\mathbb{R}$ , il suit

$$W_3 \ll \frac{x}{L_{\beta/(\beta+1)}(x)^{1+\beta}} \int_Y^x (\log y)^{r+\kappa-2} \frac{dy}{y} \ll \frac{x}{L_{\beta/(\beta+1)}(x)}.$$

Reportons dans (3.13). Nous obtenons

$$(3.14) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \{\log P(n)\}^r = S_f(x)(\log x)^r - r \mathcal{J}(x) + O\left(\frac{x}{L_{\beta/(\beta+1)}(x)}\right),$$

avec

$$\mathcal{J}(x) := \int_1^x \frac{\Lambda_f(x, y)}{y} (\log y)^{r-1} dy.$$

D'après (2.8), nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) &= x \int_{1-}^x d\nu_\kappa(\log t) \int_1^x \varrho_\kappa^{(m)}\left(\frac{\log(x/t)}{\log y}\right) \frac{(\log y)^{\vartheta+r-2}}{y} dy \\ &= x \int_{1-}^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\vartheta+r-1} d\nu_\kappa(\log t) \int_{1-(\log t)/\log x}^\infty \frac{\varrho_\kappa^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv. \end{aligned}$$

Posons

$$\Upsilon(\kappa) := \frac{1}{r\Gamma(\vartheta)} - \int_1^\infty \frac{\varrho_\kappa^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv,$$

de sorte que, pour  $1 \leq t < x$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{1-(\log t)/\log x}^\infty \frac{\varrho_\kappa^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv &= \int_1^\infty \frac{\varrho_\kappa^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_{1-(\log t)/\log x}^1 \frac{dv}{v^{r+1}} \\ &= \frac{1}{r\Gamma(\vartheta)} \left\{ \frac{\log x}{\log(x/t)} \right\}^r - \Upsilon(\kappa). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{J}(x) = x(\log x)^{r+\vartheta-1} \int_{1-}^x \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^{\vartheta-1} \left( \frac{1}{r\Gamma(\vartheta)} - \Upsilon(\kappa) \left\{ \frac{\log(x/t)}{\log x} \right\}^r \right) d\nu_{\kappa}(\log t).$$

En appliquant le Lemme 3.2 avec  $s = 0$  (le terme correspondant n'étant présent que si  $\vartheta > 0$ ) et  $s = r$ , et en remplaçant  $J$  par  $J - m$ , nous obtenons, avec la notation (1.13),

$$(3.15) \quad \mathcal{J}(x) = x(\log x)^{\kappa+r-1} \left\{ \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{a_j(f) \delta_j(\kappa, r)}{(\log x)^j} + O(E_J(x)) \right\}$$

où l'on a posé, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\delta_j(\kappa, r) := \frac{1}{r\Gamma(\kappa-j)} - \frac{\Gamma(\vartheta+r)}{r\Gamma(\vartheta)\Gamma(\kappa+r-j)} + \frac{\Gamma(\vartheta+r)}{\Gamma(\kappa+r-j)} \int_1^{\infty} \frac{\varrho_{\kappa}^{(m)}(v)}{v^{\vartheta+r}} dv.$$

Le résultat annoncé découle alors de (3.14) et (2.1).  $\square$

## Bibliographie

- [1] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ , *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54** (1951), 50–60.
- [2] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
- [3] G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2, *Proc. London Math. Soc.*, à paraître.
- [4] A. Hildebrand, On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ , *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
- [5] E. Saias, Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, *J. Number Theory* **32** (1989), 78–99.
- [6] E.J. Scourfield, Smooth divisors of polynomials, prépublication, décembre 2006.
- [7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.
- [8] G. Tenenbaum, en collaboration avec J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 2, Société Mathématique de France (1996), xiv + 251 pp.
- [9] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.* **564** (2003), 119–166.
- [10] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 3, *Compositio Math.*, à paraître.

Institut Élie Cartan, UMR 7502  
 Université Henri Poincaré–Nancy 1  
 BP 239  
 54506 Vandœuvre-lès-Nancy  
 France

gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr  
 wujie@iecn.u-nancy.fr