



HAL
open science

Clôture intégrale d'idéaux et la propriété (Z_k).

Charef Beddani

► **To cite this version:**

| Charef Beddani. Clôture intégrale d'idéaux et la propriété (Z_k).. 2007. hal-00165882v2

HAL Id: hal-00165882

<https://hal.science/hal-00165882v2>

Preprint submitted on 13 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLÔTURE INTÉGRALE D'IDÉAUX ET LA PROPRIÉTÉ (Z_k)

C. BEDDANI

RÉSUMÉ. Dans cet article nous donnons quelques applications du théorème de valuations de Rees à l'étude de la clôture intégrale des idéaux. En particulier, nous étudions la question de Hübl et Swanson (Cf. [2], Question 2.9). Ensuite, nous introduisons une nouvelle propriété des idéaux, que nous l'appelons (Z_k) . Cette propriété nous permette de majorer le nombre de valuations de Rees associées à un idéal I .

INTRODUCTION.

En appliquant le théorème de valuations de Rees (Cf. Théorème 1.1) à l'étude de la clôture intégrale des idéaux, nous allons montrer le critère suivant :

Critère 1. Soit I un idéal d'un anneau noëthérien R , tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a : $x^{2^n} \in I^{2^n} \Rightarrow x \in I$. Alors I est normal.

Et nous montrons que la réciproque est vraie (Cf. Proposition 2.4) dans le cas où pour toute valuation de Rees ν associée à I , on a : $\nu(I) = 1$. De manière semblable et toujours dans le cas où pour toute valuation de Rees ν associée à I , on a : $\nu(I) = 1$, nous allons montrer un autre critère pour savoir si l'idéal I est intégralement clos ou non. Ce critère s'annonce comme suit :

Critère 2. Soit I un idéal d'un anneau noëthérien R , tel que pour toute valuation de Rees ν associée à I , on a : $\nu(I) = 1$. Alors I est intégralement clos si, et seulement si, pour tout $x \in R$, on a : $x^2 \in I \Rightarrow x \in I$.

Par ailleurs, nous allons présenter des divers résultats concernant la question de Hübl et Swanson (Cf. [2], Question 2.9). Autrement dit, nous allons étudier la question suivante :

Question 1. Soient R un anneau noëthérien analytiquement irréductible (Cf. Définition 1.3) et I un idéal \mathfrak{m} -primaire de R . Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tous x et y de R , on a : $xy \in I^{2n} \implies x \in I^n$ ou $y \in I^n$ (en particulier, pour tout x de R , on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$). L'idéal I est-il normal ?

Ensuite, nous allons donner un cas particulier de certains idéaux dans lesquels cette question a une réponse affirmative. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 1. Soient I un idéal de R tel que pour toute valuation de Rees v_i associée à I , on a : $v_i(I) = 1$. Alors I est normal si, et seulement si, pour tout $x \in R$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

- (a) $v_I(x) \in \mathbb{Z} \implies v_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.
- (b) $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$.

Enfin, nous allons démontrer le résultat principal de cet article (Cf. Théorème 4.7) qui sert majorer le nombre de valuations de Rees associées à un idéal, qui possède la propriété (Z_k) (Cf. Définition 1). Nous définissons la propriété (Z_k) comme suit :

Définition 1. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien R et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit que I possède la propriété (Z_k) , s'il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

Le résultat principal s'annonce comme suit :

Théorème 1. Soient (R, \mathfrak{m}) un anneau noëthérien, k un entier naturel supérieur ou égal à 2, et I un idéal de R qui possède la propriété (Z_k) . Alors I a au plus $(k - 1)$ valuations de Rees associées.

A l'aide de ce théorème, nous déduisons une généralisation du critère "One-fiberedness" (Cf. [2], Propositions 2.8). Plus précisément, nous allons montrer le critère suivant :

Critère 3. Soient R un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal de R . Alors I possède la propriété (Z_2) si, et seulement si, I a exactement une seule valuation de Rees associée.

Les résultats de cet article font partie d'un chapitre de ma thèse, au sein Laboratoire Eimile Picard, sous la direction de M. SPIVAKOVSKY.

Remerciement : je remercie M. SPIVAKOVSKY, pour les remarques et les conseils qui m'ont permis d'apporter certaines précisions et de rendre plus claire plusieurs parties de cet article.

1. PRÉLIMINAIRES

Soient R un anneau noëthérien, I un idéal de R , x un élément non nul dans R et n un entier naturel. Nous rappelons que :

- l'ordre de x dans I est le plus grand entier naturel r qui vérifie $x \in I^r$, on le note par $v_I(x)$.
- L'ordre réduit de x dans I est le nombre $\bar{v}_I(x)$ défini par :

$$\bar{v}_I(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_I(x^n)}{n}.$$

Cette limite existe toujours (Cf. [4], Lemme 1.2).

- Nous notons \bar{I} la clôture intégrale de I , c'est-à-dire les éléments x dans R qui vérifient une équation de la forme :

$$x^s = a_1 x^{s-1} + \dots + a_s,$$

où $a_k \in I^k$ pour tout $1 \leq k \leq s$.

- Nous notons $\mu_I(x)$ le plus grand entier naturel r qui vérifie $x \in \bar{I}^r$.
- En fin, nous notons :

$$\bar{\mu}_I(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_I(x^n)}{n}.$$

Rappelons ici, le théorème de valuations de Rees :

Théorème 1.1 (Théorème de valuations de Rees, Cf. [5]). Soient R un anneau noëthérien et I un idéal de R . Il existe un nombre fini de valuations discrètes $\{v_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de R telles que pour tout $x \in R - \{0\}$, on a :

$$\bar{v}_I(x) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{v_i(x)}{e_i},$$

où $e_i = \min\{v_i(x) \mid x \in I\}$.

Remarque 1.2. Les valuations v_1, \dots, v_s qui apparaissent dans le théorème précédent sont appelées les valuations de Rees associées à I . Et nous avons les propriétés suivantes (Cf. [4, 5, 7]) :

- 1) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I^n = \{x \in R \mid v_I(x) \geq n\}$.
- 2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\bar{I}^n = \{x \in R \mid \bar{v}_I(x) \geq n\}$.

3) Pour tout $x \in R$, s'il existe une valuation de Rees v_i associée à I tel que $v_i(x)$ est fini, alors $\bar{v}_I(x)$ est un nombre rationnel.

4) Pour tout $x \in R$, on a : $\bar{v}_I(x) = \bar{\mu}_I(x)$.

5) Pour tout $x \in R$, on a : $[\bar{v}_I(x)] = \mu_I(x)$, où $[\bar{v}_I(x)]$ est la partie entière de $\bar{v}_I(x)$.

Définition 1.3. Soit (R, \mathfrak{m}) un anneau local intègre. On dit que R est un anneau analytiquement non-ramifié (resp. analytiquement irréductible) si le complété \mathfrak{m} -adique de R est réduit (resp. intègre).

2. CLÔTURE INTÉGRALE DES IDÉAUX

Nous nous intéressons dans cette section à l'étude de la clôture intégrale des idéaux I d'un anneau noëthérien, qui vérifient $v(I) = 1$ pour toute valuation de Rees associé à I .

Définition 2.1. Un idéal I d'un anneau R est dit normal, si pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\bar{I}^n = I^n$.

Proposition 2.2. Soient R un anneau noëthérien et I un idéal de R . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour tous entiers naturels $k \geq 1$, $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a :

$$x^k \in I^{kn+1} \implies x \in I^{n+1}.$$

2) Il existe un entier naturel $k \geq 1$, tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a :

$$x^k \in I^{kn+1} \implies x \in I^{n+1}.$$

3) Pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a :

$$x^2 \in I^{2n+1} \implies x \in I^{n+1}.$$

Démonstration. 1) \implies 2) : est trivial.

2) \implies 3) : soient x un élément de R et $v_I(x) = n$, alors $x \in I^n - I^{n+1}$. D'après la condition 2), il est clair que $x^k \in I^{kn} - I^{kn+1}$ et ceci implique que $v_I(x^k) = kn$. Donc pour tout $x \in R$, on a : $v_I(x^k) = kv_I(x)$. Pour montrer que $\forall x \in R, \forall n \in \mathbb{N}$, on a : $x^2 \in I^{2n+1} \implies x \in I^{n+1}$, il suffit de montrer que pour tout élément $x \in R$, on a : $v_I(x^2) = 2v_I(x)$. En utilisant l'égalité $v_I(x^k) = kv_I(x)$, on peut montrer par récurrence que $v_I(x^{k^n}) = k^n v_I(x)$. Donc

$$\forall x \in R : \frac{v_I(x^{k^n})}{k^n} = v_I(x)$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall x \in R : \bar{v}_I(x) = v_I(x).$$

Donc $v_I(x^2) = \bar{v}_I(x^2)$, et comme la pseudo-valuation \bar{v}_I est homogène, il résulte que $v_I(x^2) = 2v_I(x)$ pour tout $x \in R$.

3) \implies 1) : supposons que pour tout $x \in R$, on a : $v_I(x^2) = 2v_I(x)$. Soit k un entier naturel non nul. Prenons s un entier naturel tel que $k < 2^s$. La condition 3) donne $v(x^{2^s}) = 2^s v(x)$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} v_I(x^{2^s}) &= v_I(x^{2^s-k} x^k) \\ &\geq v_I(x^{2^s-k}) + v_I(x^k) \\ &\geq (2^s - k)v_I(x) + v_I(x^k). \end{aligned}$$

Ce qui donne $v_I(x^k) \leq kv_I(x) + v_I(x^{2^s}) - 2^s v_I(x) = kv_I(x)$. Donc pour tout $x \in R$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $v_I(x^k) = kv_I(x)$. Or, si $x^k \in I^{kn+1}$, alors $kv_I(x) = v_I(x^k) \geq kn + 1$, par suite $v_I(x) \geq n + \frac{1}{k}$. Donc $x \in I^{n+1}$. \square

Proposition 2.3. *Si I vérifie l'une des conditions de la proposition précédentes, alors I est normal.*

Démonstration. Il est clair que si l'idéal I vérifie l'une des conditions de la proposition précédente, alors pour tout $x \in R$, on a : $\bar{v}_I(x) = v_I(x)$. Le fait que pour tout entier naturel n , on a : $I^n = \{x \in R \text{ tel que } v_I(x) \geq n\}$ et $\bar{I}^n = \{x \in R \text{ tel que } \bar{v}_I(x) \geq n\}$ entraîne immédiatement $\bar{I}^n = I^n$. \square

Proposition 2.4. *Si pour toute valuation v_i de Rees associée à I , on a : $v_i(I) = 1$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) I est normal.
- 2) Pour tous $x \in R$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x^2 \in I^{2n+1} \implies x \in I^{n+1}.$$

Démonstration. 2) \implies 1) : voir la proposition précédente

1) \implies 2) : supposons que I est normal, et soient $x \in R$ et n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} x^2 \in I^{2n+1} &\implies x^2 \in \overline{I^{2n+1}} \\ &\implies \bar{v}_I(x^2) \geq 2n + 1 \\ &\implies \min_{1 \leq i \leq s} \{v_i(x^2)\} \geq 2n + 1 \\ &\implies \forall i = 1, \dots, s \text{ on a : } v_i(x) \geq n + 1 \\ &\implies \bar{v}_I(x) \geq n + 1 \\ &\implies x \in \overline{I^{n+1}} = I^{n+1}. \end{aligned}$$

\square

Proposition 2.5. *Si pour toute valuation v_i de Rees associée à I , on a : $v_i(I) = 1$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Pour tout $x \in R$, on a : $x^2 \in I \implies x \in I$.*
- 2) *I est intégralement clos.*

Démonstration. 1) \implies 2) : supposons que pour tout $x \in R$, on a : $x^2 \in I \implies x \in I$. Soit $x \notin I$, alors pour tout entier naturel $k \geq 0$, on a : $x^{2^k} \notin I$ et ceci donne $v_I(x^{2^k}) = 0$, par suite $\bar{v}_I(x) = 0$. Donc $x \notin \bar{I}$.

2) \implies 1) : supposons que $\bar{I} = I$. On a :

$$\begin{aligned}
 x^2 \in I &\implies x^2 \in \bar{I} \\
 &\implies \bar{v}_I(x^2) \geq 1 \\
 &\implies \min_{1 \leq i \leq s} \{v_i(x^2)\} \geq 1 \\
 &\implies \forall i = 1, \dots, s \text{ on a : } v_i(x) \geq 1 \\
 &\implies \bar{v}_I(x) \geq 1 \\
 &\implies x \in \bar{I} = I.
 \end{aligned}$$

□

3. LA QUESTION DE HÜBL ET SWANSON

Soient R un anneau noëthérien analytiquement irréductible et I un idéal \mathfrak{m} -primaire de R . Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tous x et y de R , on a : $xy \in I^{2n} \implies x \in I^n$ ou $y \in I^n$ (en particulier, pour tout x de R , on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$). L'idéal I est-il normal ?

Cette question a été posé par R. Hübl et I. Swanson dans un article intitulé "Discrete valuations centered on local domains" (Cf. [2], Question 2.9). Il est clair que si l'idéal I est normal, alors pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout x de R , on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$, car :

$$\begin{aligned}
 x^2 \in I^{2n} &\implies x^2 \in \overline{I^{2n}} \\
 &\implies \bar{v}(x^2) \geq 2n \\
 &\implies \bar{v}(x) \geq n \\
 &\implies x \in \bar{I^n} = I^n.
 \end{aligned}$$

On remarque que si l'idéal I vérifie la propriété : pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$, alors pour tout entier naturel $s \geq 1$ l'idéal I^s vérifie aussi cette propriété. Donc il suffit de donner une réponse à la question suivante :

Question 3.1. Soient R un anneau noëthérien analytiquement irréductible et I un idéal m -primaire de R . Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, et pour tout x de R , on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$. I est-il intégralement clos ?

Lemme 3.2. Soient R un anneau noëthérien et I un idéal de R . Si pour tout entier naturel $n \geq 1$, et pour tout x de R , on a : $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$, alors pour tout $n \geq 0$, on a : $\overline{I^{n+1}} \subset I^n$.

Démonstration. Soient $x \in R$ et $v_I(x) = s$, alors $x \in I^s - I^{s+1}$. Par récurrence on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x^{s2^k} \in I^{s2^k}$ et $x^{s2^k} \notin I^{(s+1)2^k}$, ce qui donne $s2^k \leq v_I(x^{2^k}) \leq (s+1)2^k - 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $s \leq v_I(x^{2^k})/2^k \leq (s+1) - (1/2^k)$. En passant à la limite quand k tend vers $(+\infty)$, on obtient :

$$v_I(x) \leq \bar{v}_I(x) \leq v_I(x) + 1.$$

L'inégalité $\bar{v}_I \leq v_I + 1$ entraîne que pour tout $n \geq 0$, l'inclusion : $\overline{I^{n+1}} \subset I^n$. \square

La proposition suivante donne une réponse affirmative à la question de Hübl et Swanson, dans le cas où, toute valuation de Rees v_i associée à I , vérifie $v_i(I) = 1$, et pour tout $x \in R$, on a : $v_i(x) \in \mathbb{Z} \implies v_i(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.

Proposition 3.3. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien R , tel que pour toute valuation de Rees v_i associée à I , on a : $v_i(I) = 1$. Alors I est normal si, et seulement si, pour tout $x \in R$, et pour tout entier naturel $n \geq 0$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) $v_I(x) \in \mathbb{Z} \implies v_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.
- (b) $x^2 \in I^{2n} \implies x \in I^n$.

Démonstration. Supposons que I est normal. Soit x un élément de R . On a déjà vu que : I normal implique la condition (b). Le fait que I est normal et que pour tout $1 \leq i \leq s$, on a : $v_i(I) = 1$ implique que $v_I(x) = \bar{v}_I(x)$. Ce qui montre que $v_I(x^2) = \bar{v}_I(x^2) = 2\bar{v}_I(x) \in 2\mathbb{Z}$. Supposons maintenant que I vérifie les conditions (a) et (b). Soient x un élément de R et $n \geq 1$ un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^n} &\implies \bar{v}_I(x) \geq n \\ &\implies \bar{v}_I(x^2) \geq 2n \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 3.2, on sait que $v_I(x) + 1 \geq \bar{v}_I(x)$. Par conséquent $v_I(x^2) + 1 \geq 2n$, donc $x^2 \in I^{2n}$, car $v_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$. La condition (b) implique que $x \in I^n$. Donc $\overline{I^n} = I^n$. \square

Définition 3.4. Soient R un anneau noëthérien et k un entier naturel. On dit que R possède la propriété S_k si pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R , on a :

$$\text{depth } R_{\mathfrak{p}} \geq \inf\{k, \text{ht } \mathfrak{p}\}.$$

Définition 3.5. Soient R un anneau noëthérien et k un entier naturel. On dit que R possède la propriété R_k , si pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R de hauteur inférieure ou égale à k , l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est régulier.

Notation 3.6. Si $A = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A_i$ est un anneau gradué et \mathfrak{p} un idéal premier de A , on note : $A_{(\mathfrak{p})} = \{x \in A_{\mathfrak{p}} \text{ tel que } \deg x = 0\}$.

Proposition 3.7. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) L'anneau $\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]}$ possède la propriété (R_0) .
- 2) Pour toute valuation de Rees ν associée à I on a $\nu(I) = 1$.

Démonstration. 1) \implies 2) : soit ν un valuation de Rees associée à I . Alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \overline{R[IT]}$ de hauteur 1, minimal sur $\overline{IR[IT]}$ tel que $R_{\nu} = \overline{R[IT]}_{(\mathfrak{p})}$. Posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/\overline{IR[IT]}$, alors $\text{ht } \mathfrak{q} = 0$. Si l'anneau $\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]}$ possède la propriété (R_0) , alors l'anneau

$$(3.1) \quad (\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]})_{(\mathfrak{q})} = R_{\nu}/IR_{\nu}$$

est intègre, donc $IR_{\nu} \subset \mathfrak{m}_{\nu}$ est un idéal premier de R_{ν} de hauteur supérieure ou égale à 1, car $(0) \subsetneq I$. Comme la hauteur de \mathfrak{m} est 1, il en résulte $IR_{\nu} = \mathfrak{m}_{\nu}$. Donc $\nu(I) = 1$.

2) \implies 1) : supposons maintenant que pour toute valuation de Rees ν associée à I , on a : $\nu(I) = 1$. Soit \mathfrak{q} un idéal premier de $\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]}$ de hauteur zéro. Soit \mathfrak{p} la pré-image de \mathfrak{q} dans $\overline{R[IT]}$. Donc \mathfrak{p} est un idéal premier de $\overline{R[IT]}$ de hauteur 1 tel que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/\overline{IR[IT]}$. Soit ν la valuation de Rees associée à I tel que $R_{\nu} = \overline{R[IT]}_{(\mathfrak{p})}$. Donc $IR_{\nu} = \mathfrak{m}_{\nu}$ car $\nu(I) = 1$. D'après l'égalité (3.1), il est clair que $(\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]})_{(\mathfrak{q})}$ est intègre. Donc $\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]}$ possède la propriété (R_0) . \square

Remarque 3.8. Dire que l'anneau $(\overline{R[IT]}/\overline{IR[IT]})$ possède la propriété (R_0) , c'est la même chose de dire qu'il est réduit, car cet anneau possède la propriété (S_1) .

4. LA PROPRIÉTÉ (Z_k)

Nous introduisons dans cette section, une nouvelle propriété des idéaux, qu'on l'appelle (Z_k) , et nous présentons des divers résultats liés à cette propriété.

Définition 4.1. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien R et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit que I possède la propriété (Z_k) , s'il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(4.1) \quad \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

Proposition 4.2. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien R et k, s deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On a :

- 1) Si I possède les propriétés (Z_k) , alors I^s possède la propriété (Z_k) pour tout $s \in \{2, \dots, k\}$.
- 2) Si I possède les propriétés (Z_k) et (Z_s) , alors I^s et I^k possèdent la propriété (Z_{sk}) .
- 3) Si I possède la propriété (Z_{k^2}) , alors I possède la propriété (Z_k) . En générale, s'il existe un entier naturel $r \geq 0$, tel que I possède la propriété $(Z_{k^{2^r}})$, alors I possède la propriété (Z_k) .

Démonstration. 1) Supposons que I possède la propriété (Z_k) . Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(4.2) \quad \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

Soit $s \in \{2, \dots, k\}$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^s x_i \in I^{s(kn+b)} &\implies \prod_{i=1}^s x_i \in I^{k(sn)+sb} \subseteq I^{k(sn)+b} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, s\} : x_i \in I^{sn}, \text{ (Cf. (4.2)).} \end{aligned}$$

Donc I^s possède la propriété (Z_k) .

2) Supposons que I possède les propriétés (Z_k) et (Z_s) . Alors par définition, il existe deux entiers naturels $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$, tels que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_s$ de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(4.3) \quad \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b_1} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

et

$$(4.4) \quad \prod_{j=1}^s y_j \in I^{sn+b_2} \implies \exists j \in \{1, \dots, s\} : y_j \in I^n.$$

Pour montrer que I^s possède la propriété (Z_{sk}) , il suffit de montrer qu'il existe un entier naturel $c \geq 0$, tel que pour tous $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{sk}$ de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq k}} x_{ij} \in I^{ks^2n+cs} \implies \exists \alpha \in \{1, \dots, s\}, \exists \beta \in \{1, \dots, k\} : x_{\alpha\beta} \in I^{sn}.$$

Prenons c un entier naturel qui vérifie $cs \geq kb_2 + b_1$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq k}} x_{ij} \in I^{ks^2n+cs} &\implies \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^s x_{ij} \in I^{k(s^2n+b_2)+b_1} \\ &\implies \exists \beta \in \{1, \dots, k\} : \prod_{i=1}^s x_{i\beta} \in I^{(s^2n+b_2)}, \text{ (Cf. (4.3))} \\ &\implies \exists \alpha \in \{1, \dots, s\}, \exists \beta \in \{1, \dots, k\} : x_{\alpha\beta} \in I^{s^n}, \text{ (Cf. (4.3)).} \end{aligned}$$

Donc I^s possède la propriété (Z_{sk}) . De manière similaire, nous pouvons montrer que I^k possède la propriété (Z_{sk}) .

3) Supposons que I possède la propriété (Z_{k^2}) . Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk}$ de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(4.5) \quad \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} x_{ij} \in I^{k^2n+b} \implies \exists i, j \in \{1, \dots, k\} : x_{ij} \in I^n.$$

Montrons maintenant que I possède la propriété (Z_k) . Soient $x_1, x_2, \dots, x_k \in R$, et $n \geq 1$ un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} &\implies \prod_{i=1}^k x_i^k \in I^{k^2n+bk} \subseteq I^{k^2n+b} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n, \text{ (Cf. (4.5)).} \end{aligned}$$

S'il un entier naturel $r \geq 0$ tel que I possède la propriété $(Z_{k^{2^r}})$, alors d'après ce qu'on vient de montrer, nous en déduisons par récurrence que I possède les propriétés $(Z_{k^{2^{r-1}}}), (Z_{k^{2^{r-2}}}), \dots, (Z_{k^2}), (Z_k)$. \square

Proposition 4.3. *Soit I un idéal d'un anneau noëthérien R . Les conditions suivantes équivalentes :*

- 1) I possède la propriété (Z_2) .
- 2) Il existe un entier naturel $s \geq 0$, tel que I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$.
- 3) Pour tout entier naturel $s \geq 0$, I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$.

Démonstration. 3) \implies 2) : est trivial.

2) \implies 1) : est une conséquence immédiate de la proposition 4.2. Il suffit de remplacer k par 2 dans 3).

1) \implies 3) : nous allons utiliser la démonstration par récurrence sur s pour montrer que : I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$.

Si $s = 0$: il n'y a rien à montrer.

La récurrence : supposons que I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$. Alors il existe un entier naturel $b_s \geq 0$, tel que $x_1, \dots, x_{(2^{2^s})} \in R$, et pour tout entier naturel

$n \geq 1$, on a :

$$(4.6) \quad \prod_{i=1}^{2^{2^s}} x_i \in I^{2^{2^s} n + b_s} \implies \exists i \in \{1, \dots, 2^{2^s}\} : x_i \in I^n.$$

Montrons maintenant que I possède la propriété $(Z_{2^{2^s+1}})$. Posons $b_{s+1} = (2^{2^s} + 1)b_s$. Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $(y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2^{2^s} \\ 1 \leq j \leq 2^{2^s}}}$ 2^{2^s+1} -éléments de R .

On a :

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq i \leq 2^{2^s} \\ 1 \leq j \leq 2^{2^s}}} y_{ij} \in I^{2^{2^s+1} n + b_{s+1}} &\implies \prod_{1 \leq i \leq 2^{2^s}} \prod_{1 \leq j \leq 2^{2^s}} y_{ij} \in I^{2^{2^s} (2^{2^s} n + b_s) + b_s} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, 2^{2^s}\} : \prod_{1 \leq j \leq 2^{2^s}} y_{ij} \in I^{2^{2^s} n + b_s}, \text{ (Cf. (4.6))} \\ &\implies \exists i, j \in \{1, \dots, 2^{2^s}\}, : y_{ij} \in I^n, \text{ (Cf. (4.6)).} \end{aligned}$$

Donc I possède la propriété $(Z_{2^{2^s+1}})$. □

Lemme 4.4. *Si I possède la propriété (Z_k) , alors il existe un entier naturel $l \geq 1$, tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $\overline{I^{n+l}} \subseteq I^n$.*

Démonstration. Soient x un élément non nul de R et $s = v_I(x)$. Donc $x \notin I^{s+1}$. Comme I possède la propriété (Z_k) (Cf. (4.1)), $v_I(x^k) < k(s+1) + b$. Par récurrence, on peut montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$v_I(x^{k^n}) < k^n(s+1) + (k^{n-1} + \dots + k + 1)b = k^n(s+1) + \frac{(k^n - 1)b}{k - 1}.$$

Donc

$$\frac{v_I(x^{k^n})}{k^n} < (s+1) + \frac{(1 - 1/k^n)b}{k - 1}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ on obtient :

$$(4.7) \quad \bar{v}_I(x) \leq v_I(x) + \frac{b + k - 1}{k - 1}.$$

En prenant $l = \left\lceil \frac{b+k-1}{k-1} \right\rceil + 1$, on peut montrer d'après l'équation (4.7) que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $\overline{I^{n+l}} \subseteq I^n$. □

Proposition 4.5. *Soient R un anneau noëthérien, I un idéal de R , et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si I possède la propriété (Z_k) , alors \bar{I} possède la propriété (Z_k) . En plus, si l'anneau R est analytiquement non-ramifié, alors la réciproque est vraie.*

Démonstration. Supposons que I possède la propriété (Z_k) . Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

D'après le lemme précédent, il existe un entier naturel $l \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$(4.8) \quad \overline{I^{n+l}} \subset I^n.$$

Posons $d = b + l$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k x_i \in (\bar{I})^{kn+d} &\implies \prod_{i=1}^k x_i \in \overline{I^{kn+d}} \\ &\implies \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b}, \text{ (Cf. (4.8))} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n \subseteq (\bar{I})^n. \end{aligned}$$

Donc \bar{I} possède la propriété (Z_k) . Réciproquement, supposons que l'idéal \bar{I} possède la propriété (Z_k) . Alors il existe un entier naturel $s \geq 0$, tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(4.9) \quad \prod_{i=1}^k x_i \in (\bar{I})^{kn+s} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in (\bar{I})^n.$$

Si l'anneau R est analytiquement non-ramifié, alors d'après Rees (Cf. [6]), il existe un entier naturel $r \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$(4.10) \quad \overline{I^{n+r}} \subset I^n.$$

Posons $c = s + kr$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+c} &\implies \prod_{i=1}^k x_i \in (\bar{I})^{k(n+r)+s} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in (\bar{I})^{n+r} \subseteq \overline{I^{n+r}}, \text{ (Cf. (4.9))} \\ &\implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n, \text{ (Cf. (4.10)).} \end{aligned}$$

Donc I possède la propriété (Z_k) . □

Nous allons montrer le résultat principal de cet article (Cf. Théorème 4.7), qui nous permette de borner le nombre de valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau R noethérien, qui possède la propriété (Z_k) . Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.6. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien R et v_1, v_2, \dots, v_s ses valuations de Rees associées. Alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il existe un élément $x_i \in R$ tel que pour tout $j \neq i$, on a :

$$v_i(x_i)/e_i < v_j(x_i)/e_j,$$

où $e_i = v_i(I)$.

Démonstration. Soient pour tout $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, \mathfrak{p}_i l'idéal premier homogène de $S = \overline{R[IT, U]}/(UT-1)$ associé à (U) tel que $R_{v_i} = S_{(\mathfrak{p}_i)}$. Notons \tilde{v}_i l'extension de v_i à $S_{\mathfrak{p}_i}$. Comme les idéaux $(\mathfrak{p}_i)_i$ sont distincts, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il existe un élément $h_i \notin \mathfrak{p}_i$ et $h_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Par conséquent $\tilde{v}_i(h_i) = 0$ et $\tilde{v}_j(h_i) \geq 1$ pour tout $j \neq i$. Comme les idéaux $(\mathfrak{p}_i)_i$ sont homogènes, on peut considérer que l'élément h_i est homogène (ie. $h_i = aT^n$, avec $a \in \overline{I}^n$). Nous distinguons trois cas :

Si $n = 0$. On peut prendre $x_i = a$.

Si $n < 0$. On a :

$$h_i = aT^n = aT^{n+1}U \in US \subset \bigcap_{j=1}^s \mathfrak{p}_j,$$

ceci contredit le fait que $h_i \notin \mathfrak{p}_i$.

Si $n > 0$. On a :

$$v_i(a) = \tilde{v}_i(a) = \tilde{v}_i(aT^n U^n) = \tilde{v}_i(aT^n) + n\tilde{v}_i(U) = ne_i.$$

D'autre part, pour tout $j \neq i$, on a :

$$v_j(a) = \tilde{v}_j(a) = \tilde{v}_j(aT^n U^n) = \tilde{v}_j(aT^n) + n\tilde{v}_j(U) > ne_j.$$

Donc, on a bien : $v_i(a)/e_i < v_j(a)/e_j$. □

Théorème 4.7. Soient (R, \mathfrak{m}) un anneau noëthérien, k un entier naturel supérieur ou égal à 2, et I un idéal de R qui possède la propriété (Z_k) . Alors I a au plus $(k-1)$ valuations de Rees associées.

Démonstration. Soient v_1, v_2, \dots, v_r les valuations de Rees associées à I . Supposons que $r \geq k$. Donc d'après le lemme 4.6, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe un élément $a_i \in R$ tel que pour tout $j \neq i$, on a : $\omega_i(a_i) < \omega_j(a_i)$, où $\omega_i = v_i/e_i$. On peut choisir les a_i dans R tels que $v_i(a_i) > 0$. Soit

$$y_i = a_i^{e_i \prod_{j=1, j \neq i}^r e_j \omega_j(a_j)}.$$

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, et pour tout $j \neq i$, on a : $\omega_i(y_i) < \omega_j(y_i)$, et

$$\omega_1(y_1) = \dots = \omega_r(y_r) = \prod_{i=1}^r e_i \omega_i(a_i).$$

Posons $s = \prod_{i=1}^r e_i \omega_i(a_i)$. Soit q un nombre rationnel tel que pour tout $j \neq i$, on a :

$$\omega_i(y_i) + q \leq \omega_j(y_j).$$

Comme l'idéal I possède la propriété (Z_k) , il existe un entier naturel b tel que pour tous x_1, x_2, \dots, x_k de R et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^k x_i \in I^{kn+b} \implies \exists i \in \{1, \dots, k\} : x_i \in I^n.$$

De plus, d'après le lemme 4.4, il existe un entier naturel $l \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$\overline{I^{n+l}} \subset I^n.$$

Prenons m un entier naturel tel que $[m(s(k-1)q)] \geq k+b+l$. On a : pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\begin{aligned} \omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &= m\omega_i(y_i) + m \sum_{j=1, j \neq i}^k \omega_i(y_j) \\ &\geq ms + m \sum_{j=1, j \neq i}^k (s+q) \\ &= ms + m(k-1)(s+q) \\ &= kms + (k-1)mq, \end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{k+1, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} \omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &= m \sum_{j=1}^k \omega_i(y_j) \\ &\geq m \sum_{j=1}^k (s+q) \\ &= m(k-1)(s+q) \\ &= (k-1)ms + (k-1)mq. \end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a :

$$\begin{aligned} \omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &\geq (k-1)ms + (k-1)mq \\ &\geq k(sm+1) + (ms + (k-1)mq - k) \\ &\geq k(sm+1) + b+l. \end{aligned}$$

Ceci montre que $y_1^m y_2^m \cdots y_k^m \in \overline{I^{k(sm+1)+b+l}}$. Donc $y_1^m y_2^m \cdots y_k^m \in I^{k(sm+1)+b}$. Comme I possède la propriété (Z_k) , il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $y_i^m \in I^{(sm+1)}$, ce qui contredit le fait que $\omega_i(y_i^m) = sm$. \square

Corollaire 4.8. Soient R un anneau noëthérien analytiquement non-ramifié et I un idéal de R . I possède la propriété (Z_2) si, et seulement si, I a exactement une seule valuation de Rees associée.

Démonstration. D'après le théorème 4.7, il est clair que si I possède la propriété (Z_2) , alors I a une seule valuation de Rees associée. Réciproquement, si I a une seule valuation de Rees associée, alors la fonction \bar{v}_I définit une valuation à valeurs dans \mathbb{Q} . Posons $b = 2l$ où l est l'entier naturel qui vérifie pour tout $n \geq 0$, l'inclusion $\overline{I^{n+l}} \subset I^n$ (Cf. [6]). Soient x_1, x_2 deux éléments de R tels que $x_1 x_2 \in I^{2n+b}$. Alors $\bar{v}_I(x_1) + \bar{v}_I(x_2) = \bar{v}_I(x_1 x_2) \geq 2n + b \geq 2(n + l)$, par conséquent $\bar{v}_I(x_1) \geq (n + l)$ ou $\bar{v}_I(x_2) \geq (n + l)$, par suite $x_1 \in \overline{I^{n+l}}$ ou $x_2 \in \overline{I^{n+l}}$. Donc $x_1 \in I^n$ ou $x_2 \in I^n$, car $\overline{I^{n+l}} \subset I^n$. Cela montre que I possède la propriété (Z_2) . \square

Remarque 4.9. Ce dernier corollaire est une généralisation du critère "One-fiberedness" introduite dans les travaux de Swanson et Hübl (Cf. [2], Proposition 2.8).

Corollaire 4.10. Soient (R, \mathfrak{m}) un anneau noëthérien analytiquement irréductible et I un idéal de R . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) I possède la propriété (Z_2) .
- 2) \widehat{IR} possède la propriété (Z_2) , où \widehat{R} est le complété \mathfrak{m} -adique de R .

Démonstration. Puisque l'anneau R est analytiquement irréductible, I et \widehat{IR} ont le même nombre de valuations de Rees associées. Donc si I (resp. \widehat{IR}) possède la propriété (Z_2) , alors I (resp. \widehat{IR}) a une seule valuation de Rees associée (Cf. Proposition 4.8). Par suit, \widehat{IR} (resp. I) a aussi une seule valuation de Rees associée. Donc \widehat{IR} (resp. I) possède la propriété (Z_2) (Cf. Proposition 4.8). \square

Définition 4.11. Soient I un idéal d'un anneau noëthérien, et v_1, v_2 deux valuations de Rees associées à I . On dit que la topologie v_1 -adique et la topologie v_2 -adique sont linéairement équivalentes (ou v_1 et v_2 sont linéairement comparables) si, et seulement si, il existe un entier naturel r tel que pour tout $x \in R$ non nul, on a :

$$v_1(x) \leq r v_2(x) \quad \text{et} \quad v_2(x) \leq r v_1(x).$$

Notation 4.12. Soient v une valuation de Rees associée à un idéal I d'un anneau noëthérien R , et n un entier naturel. On note :

- 1) $v(I) = \min\{v(x) \text{ tel que } x \in I\}$.
- 2) $I_n(v) = \{x \in R \text{ tel que } v(x) \geq n\}$.

Proposition 4.13. Soient R un anneau noëthérien et I un idéal de R . Si toutes les valuations de Rees associées à I sont linéairement comparables, alors \sqrt{I} est premier.

Démonstration. Soient v_1, v_2, \dots, v_s les valuations de Rees associées à I . D'après le théorème de valuations de Rees et la remarque 1.2, on sait que :

$$\bar{I} = \bigcap_{i=1}^s I_{e_i}(v_i), \text{ où } e_i = v_i(I).$$

Donc

$$\sqrt{\bar{I}} = \bigcap_{i=1}^s \sqrt{I_{e_i}(v_i)} = \bigcap_{i=1}^s I_1(v_i).$$

Comme toutes les valuations de Rees v_1, v_2, \dots, v_s sont linéairement comparables, on a :

$$I_1(v_1) = I_1(v_2) = \dots = I_1(v_s),$$

donc $\sqrt{\bar{I}} = I_1(v_1)$, ce qui montre que $\sqrt{\bar{I}}$ est premier, donc il est de même pour I , car $\sqrt{\bar{I}} = \sqrt{I}$. \square

Corollaire 4.14. *Soient R un anneau noëthérien et I un idéal de R . Si \sqrt{I} n'est pas premier, alors I a au moins deux valuations de Rees non-linéairement comparables.*

Proposition 4.15. *Soient R un anneau noëthérien analytiquement non-ramifié et I un idéal de R tel que son radical n'est pas premier. Si I possède la propriété (Z_3) , alors I a exactement deux valuations de Rees associées.*

Démonstration. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 4.7 et du corollaire 4.14. \square

RÉFÉRENCES

- [1] D. Delfino and I. Swanson. Integral closure of ideals in excellent local rings. *J. Algebra*, 274(1) :422–428, 2004.
- [2] R. Hübl and I. Swanson. Discrete valuations centered on local domains. *J. Pure Appl. Algebra*, 161(1-2) :145–166, 2001.
- [3] M. Nagata. *Local rings*. Interscience Publishers. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1962.
- [4] D. Rees. Valuations associated with a local ring (I). *J. London Math. Soc.*, 5 :108–128, 1955.
- [5] D. Rees. Valuations associated with ideals. II. *J. London Math. Soc.*, 31 :221–228, 1956.
- [6] D. Rees. A note on analytically unramified local rings. *J. London Math. Soc.*, 36 :24–28, 1961.
- [7] D. Rees. Izumi's theorem. In *Commutative algebra*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 407–416. Springer, New York, 1989.

Charef BEDDANI
Département de Mathématiques
Laboratoire Emile Picard
Université Paul Sabatier
31068 Toulouse - FRANCE
beddani@picard.ups-tlse.fr