



HAL
open science

Neutralité dans les paysages de fitness. Évolution artificielle et neutralité

Sébastien Verel, Philippe Collard, Manuel Clergue

► **To cite this version:**

Sébastien Verel, Philippe Collard, Manuel Clergue. Neutralité dans les paysages de fitness. Évolution artificielle et neutralité. *Revue des Sciences et Technologies de l'Information - Série TSI: Technique et Science Informatiques*, 2006, 25 (8 - 9), pp.1023-1048. 10.3166/tsi.25.1023-1048 . hal-00164699

HAL Id: hal-00164699

<https://hal.science/hal-00164699>

Submitted on 18 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Neutralité dans les paysages de fitness

Évolution artificielle et neutralité

Sébastien Verel — Philippe Collard — Manuel Clergue

Laboratoire I3S (UNSA - CNRS)
Les Algorithmes - Bât Euclide B
2000 route des Lucioles - B.P. 121
06903 Sophia Antipolis Cedex
{verel,collard,clerguem}@i3s.unice.fr

RÉSUMÉ. Les algorithmes évolutionnaires (AE) sont des algorithmes d'optimisation inspirés par la théorie néo-darwinienne de l'évolution. Ces algorithmes manipulent une population de solutions potentielles progressivement guidée vers de meilleures solutions découvertes par variation aléatoire. La théorie neutraliste de l'évolution considère que la plupart des mutations sont sélectivement neutres ou délétères. Nous présentons dans cet article de synthèse les principaux résultats concernant la neutralité dans le contexte des AE, et plus particulièrement comment cette théorie influe sur l'étude des paysages de fitness. Ces paysages représentent l'ensemble des solutions potentielles d'un problème à l'aide d'un espace abstrait muni d'une relation de voisinage et dont les solutions ont une hauteur correspondant à leur performance. Cet article présentera des problèmes académiques et des problèmes réels conduisant à des paysages neutres et la nature spécifique de la dynamique des AE sur ces paysages. Dans le but d'améliorer les performances des AE, nous présentons ensuite des techniques basées sur le choix de codage redondant, ainsi que des AE conçus pour exploiter la neutralité.

ABSTRACT. Evolutionary algorithms (EA) are optimization algorithms inspired by the neo-darwinian theory of evolution. Those algorithms use a population of potential solutions which is gradually guided towards better solutions discovered by random variation. The neutral theory of evolution considers that the majority of mutations are selectively neutral or lethal. In this article we present the main results about neutral theory in the context of EA, and particularly how this theory affects studies of fitness landscapes. Fitness landscapes represent the set of potential solutions of a problem as an abstract space equipped with a neighborhood relation and where the solutions have an height corresponding to their performance. This article will show academic and real problems related to neutral landscapes and the nature of EA dynamics on those landscapes. In order to improve the performances of EA, we then present technics based on the choice of redundant coding, just as the design of EA exploiting neutrality.

MOTS-CLÉS : Evolution artificielle, paysage de fitness, neutralité.

KEYWORDS : Artificial evolution, fitness landscape, neutrality.

2 Technique et science informatiques. Volume 8-9 - n° X/2006

(ne fait pas partie de la 1^{re} page)

1. Introduction

Les algorithmes évolutionnaires sont des algorithmes d'optimisation inspirés de la théorie néo-darwinienne de l'évolution. Cette large classe d'algorithmes consiste à faire évoluer une population de solutions potentielles d'un problème d'optimisation donné. À chaque itération, l'algorithme sélectionne les meilleures solutions, puis les modifie aléatoirement afin de constituer une nouvelle population pour l'itération suivante. L'algorithme se termine suivant un critère lié à la convergence de la population ou au temps de calcul. L'efficacité de l'algorithme réside dans le fait que les légères variations aléatoires sur les solutions permettent de découvrir suffisamment souvent de meilleures solutions qui seront sélectionnées pour la suite. Le processus est progressivement guidé par la découverte de meilleures solutions. Cela rejoint les idées de Darwin et la théorie de l'évolution des espèces naturelles qui postule une constante et progressive adaptation d'une espèce à son environnement.

À la fin des années 60, grâce à l'essor de la biologie moléculaire, Kimura [KIM 83] a mis en évidence expérimentalement que la majorité des mutations sont neutres ou bien léthales ; dans ce dernier cas, elles conduisent l'organisme qui les portent à disparaître avant de se reproduire. Les mutations neutres n'apportent pas d'avantage sélectif à l'organisme ; elles sont uniquement dirigées par le hasard et leur taux d'apparition serait constant au cours de l'évolution. L'existence des mutations neutres permet d'expliquer le polymorphisme, c'est-à-dire l'importante variabilité génétique observée au sein des populations de nombreuses espèces. A la différence du modèle néo-darwinien où de meilleures espèces sont continuellement découverts et où une population s'adapte progressivement à son environnement, le modèle neutre de l'évolution suppose que pendant de longues périodes de temps l'évolution n'est plus guidée par l'adaptation mais seulement par des variations aléatoires. Aujourd'hui encore ce modèle de l'évolution ne cesse d'être discuté ; en particulier, sur la constance du taux de mutation neutre au cours de l'évolution, et sur le rôle de la pression sélective. Selon S. Wright, l'existence des mutations neutres ne serait possible qu'à la condition qu'elle donne à terme un avantage sélectif. Néanmoins, il est tout de même généralement admis que les deux processus, pression sélective d'une part, et variations aléatoires, sont parties intégrantes de l'évolution ; les débats portent plus sur leur importance relative.

L'approche "Évolution Artificielle" en informatique, est fortement influencée, dans les algorithmes qu'elle conçoit et dans l'étude de ces algorithmes, par la vision néo-darwinienne de l'évolution, misant sur le rôle prépondérant de la sélection naturelle et reléguant les mutations à un rôle plus marginal. Le chercheur en informatique évolutionnaire n'a pas à prendre partie dans ce débat sur le rôle respectif de la sélection et du hasard dans l'évolution des espèces naturelles ; il doit plutôt tenter d'exploiter les mécanismes sous-jacents : pression sélective et dérive aléatoire, au mieux de ses objectifs propres, qui sont une meilleure compréhension de la dynamique des algorithmes et l'élaboration d'algorithmes plus performants.

En évolution artificielle, nous devons maintenant nous poser la question suivante : notre perception des phénomènes adaptatifs auxquels sont soumis les populations de

solutions doit-elle être modifiée à la lumière de la théorie neutraliste ? Longtemps, la redondance, c'est-à-dire le fait que plusieurs génotypes codent pour une même solution, a été considérée comme un écueil à éviter lorsque l'on conçoit "le code génétique" pour un problème d'optimisation [RAD 91]. C'est là le signe qu'il existait déjà un préjugé négatif sur la neutralité. Pourtant, la neutralité existe dans les problèmes réels ainsi que dans problèmes académiques conçus pour étudier le comportement des algorithmes (One-Max [SCH 91], Royal-Road [MIT 92], variantes de paysages NK [BAR 98] [NEW 98] [LOB 04], etc). L'origine de cette neutralité peut être multiple : symétries complexes et imbriquées, méconnaissance *a priori* du problème, erreur d'évaluation, etc. Nous verrons que la neutralité n'est pas nécessairement un handicap pour l'évolution artificielle : il peut être avantageux d'en tirer parti, ou même d'en introduire, afin d'améliorer les performances d'un algorithme évolutionnaire.

Cet article de synthèse des principaux travaux concernant la neutralité et les algorithmes évolutionnaires est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous définirons la neutralité dans le cadre général des paysages de fitness et nous présenterons des exemples de problèmes réels où la neutralité existe. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux rapports entre algorithmes évolutionnaires et neutralité. Leur dynamique sera présentée et nous exposerons les travaux qui exploitent la neutralité afin d'améliorer leurs performances.

2. Paysage de Fitness et Neutralité

2.1. Introduction et définition

Le concept de *paysage de fitness* a été introduit par S. Wright dans le domaine de la biologie de l'évolution dans les années 1930 [WRI 32]. Il consiste à représenter l'ensemble de tous les organismes possibles, c'est-à-dire tous les génotypes, à l'aide d'un espace abstrait muni d'une relation de voisinage. Le voisinage définit la possibilité dans le paysage d'un déplacement entre deux génotypes. De plus, à chaque génotype est associé une « hauteur » indiquant sa valeur de fitness *i.e.* son adaptation. Le paysage de fitness est l'un des concepts pertinents pour modéliser l'évolution d'une population d'organismes.

Dans le domaine des algorithmes évolutionnaires (AE), on utilise également le concept de paysage de fitness relatif à un problème d'optimisation. Dans ce cas, l'ensemble des génotypes est l'ensemble des solutions potentielles au problème ; deux solutions sont dites voisines lorsqu'un opérateur local permet de passer de l'une à l'autre ; enfin, la fonction de fitness représente l'objectif à maximiser (ou le coût à minimiser). Formellement, nous utiliserons la définition et les notations usuelles [STA 02] :

Définition: Un *paysage de fitness* est un triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{V}, f)$ tel que :

- \mathcal{S} est un ensemble de solutions potentielles,

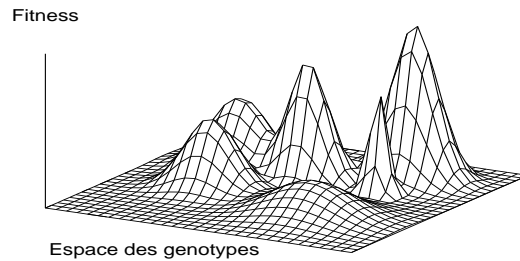


Figure 1. Représentation d'un paysage de fitness de dimension deux.

- $\mathcal{V} : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$ est une fonction¹, appelée voisinage, qui associe à chaque solution $s \in \mathcal{S}$ un ensemble de solutions voisines $\mathcal{V}(s) \subset \mathcal{S}$,
- $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de fitness qui à chaque solution associe un nombre réel.

Un voisinage peut être souvent associé à une distance. Par exemple, dans le contexte des algorithmes génétiques où l'ensemble des solutions serait l'ensemble des chaînes binaires de longueur fixe, l'opérateur qui modifie la valeur d'un bit définit la relation de voisinage. Autrement dit, deux solutions sont voisines lorsque leur distance de Hamming est égale à 1.

Les algorithmes évolutionnaires “voient” un paysage de fitness comme un substrat sur lequel une population évolue. Un tel paysage de fitness est donc étudié selon le point de vue de la dynamique. Les outils mathématiques qui permettent ce type d'analyse sont alors, par exemple, le graphe $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{V})$ induit par le paysage ou les chaînes de Markov qui modélisent la dynamique de l'évolution des fitness d'une population. Aussi, les paysages de fitness peuvent être analysés de façon “géométrique”. On détaille alors les caractéristiques géométriques du paysage : montagne massive, vallée, plateau, pic, crête... dans des espaces de dimension supérieure à trois. Le but est de lier la description géométrique du paysage avec la dynamique des algorithmes. Pour les AE, deux types de dynamiques qui correspondent à deux géométries spécifiques de paysage ont été mis en avant : la marche adaptative inspirée par la théorie néodarwinienne et la dérive aléatoire inspirée par la théorie neutraliste. Ces deux types ne sont évidemment pas exclusifs, une grande variété de dynamiques existe.

Pour conclure, l'image d'un « paysage » est séduisante pour rendre compte de l'évolution. Elle permet de visualiser une population de solutions traversant vallées,

1. $2^{\mathcal{S}}$ est l'ensemble des parties de \mathcal{S}

crêtes et plateaux vers des optima locaux ou globaux. Bien que cette métaphore soit une source féconde pour imaginer de nouveaux algorithmes évolutionnaires ou pour se représenter leurs dynamiques, elle est peut-être trop simple pour rendre compte de la complexité des dynamiques dans des espaces comportant un grand nombre de dimensions. Nous présentons maintenant dans les deux parties sections les géométries relatives aux deux types de dynamiques cités plus haut.

2.2. Paysage multimodal et rugosité

Lorsque S. Wright proposa le concept de paysage de fitness, il envisageait l'évolution comme une marche adaptative d'une population vers les plus hauts sommets c'est-à-dire les grandes valeurs de fitness. Cette image est aussi celle qui a dominé dans la conception des métaheuristiques. Les solutions se déplacent progressivement vers les points du paysage de plus grandes fitness, par exemple au moyen d'un algorithme glouton. La convergence est obtenue lorsque les solutions sont bloquées sur des optima locaux ou globaux. La difficulté du problème est donc liée aux optima locaux : leur nombre, leur densité spatiale, la taille des bassins d'attraction, etc. Nous allons tout d'abord présenter quelques mesures de paysage de fitness relatives à ce critère. Ensuite, nous définirons la rugosité et la corrélation locale et nous verrons le lien entre ces deux notions.

Les optima locaux d'un paysage sont les solutions qui n'ont pas de solutions voisines de meilleure performance. On peut définir formellement cette propriété dans le cas de problème de maximisation :

Définition: Pour tout paysage de fitness $(\mathcal{S}, \mathcal{V}, f)$, une solution s^* est un *optimum local* ssi le prédicat $isOpt(s^*, f, \mathcal{V})$ est vrai où $isOpt$ est défini par $isOpt(s^*, \mathcal{V}, g) = (\forall s \in \mathcal{V}(s^*), g(s) \leq g(s^*))$. De plus, si $\forall s \in \mathcal{S}, g(s) \leq g(s^*)$, l'optimum est global.

Un paysage est dit *multimodal* suivant le nombre d'optima locaux, noté M . Palmer [PAL 91] définit un paysage fortement multimodal lorsque l'ordre de grandeur de M est exponentiellement croissant avec la "dimension" de l'espace de recherche². Cependant cette taille M est le plus souvent accessible sans une énumération exhaustive de l'espace de recherche et peut-être estimé par des méthodes statistiques [GAR 97, GAR 02]. Ces méthodes³ sont toutes basées sur la notion de marche adaptative qui converge nécessairement vers un optimum local. En effet, une *marche adaptative* est une suite de solutions voisines où la solution suivante est la solution voisine de meilleure performance.

Définition: Pour tout paysage de fitness $(\mathcal{S}, \mathcal{V}, f)$, une *marche adaptative* (s_0, s_1, \dots, s_L) est une marche telle que $\forall i \in \{0, \dots, L-1\}, f(s_i) < f(s_{i+1})$

2. par exemple, pour le problème du voyage de commerce, la dimension du problème est le nombre de villes.

3. ces méthodes ne seront pas détailler dans cet article

et $s_{i+1} = \underset{\mathcal{V}(s_i)}{\operatorname{argmax}} f$ et telle que s_L est un optima local. La notation *argmax* est l'argument maximum et représente la valeur de la variable pour laquelle la fonction atteint son maximum. L est alors la longueur de la marche adaptative.

La *rugosité* d'un paysage de fitness est relative à sa structure locale plus ou moins accidentée. Lorsque le paysage est irrégulier, on dit qu'il est rugueux, dans le cas contraire, on le dit peu rugueux, continue ou lisse. La quantification de la rugosité s'effectue en mesurant la corrélation entre les valeurs de performance de solutions voisines. La *fonction d'autocorrélation* et la *longueur de corrélation*, introduit par Weinberger [WEI 91, WEI 90] sont de loin les indicateurs de rugosité les plus accessibles au calcul numérique.

La fonction d'autocorrélation ρ d'une fonction de fitness f est l'autocorrélation d'une série temporelle $(f(s_1), f(s_2), \dots)$ où (s_1, s_2, \dots) est une marche aléatoire sur le graphe $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{V})$ telle que $s_{i+1} \in \mathcal{V}(s_i)$:

$$\rho(n) = \frac{E[(f(s_i) - \bar{f})(f(s_{i+n}) - \bar{f})]}{\operatorname{var}(f(s_i))}$$

où \bar{f} et $\operatorname{var}(f(s_i))$ sont la moyenne et la variance de la série $(f(s_0), f(s_1), \dots)$. Des estimateurs $r(n)$ des coefficients d'autocorrélation $\rho(n)$ peuvent être obtenus à l'aide d'une série temporelle (s_1, s_2, \dots, s_L) de longueur L :

$$r(n) = \frac{(L-1) \sum_{i=1}^{L-n} (f(s_i) - \bar{f})(f(s_{i+n}) - \bar{f})}{(L-n-1) \sum_{i=1}^L (f(s_i) - \bar{f})^2}$$

où $\bar{f} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f(s_i)$, et L suffisamment grand strictement supérieur à $n+1$.

Une marche aléatoire est représentative de l'ensemble du paysage lorsque le paysage est statistiquement isotropique. Dans ce cas, quelque soit le point de départ de la marche aléatoire et le voisin sélectionné durant cette marche, l'estimé de $r(n)$ converge vers la valeur $\rho(n)$. L'erreur d'estimation diminue avec la longueur de la marche.

La longueur de corrélation τ [FON 93, SCH 94] mesure la décroissance de la fonction d'autocorrélation et la rugosité du paysage : $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n)$. Le paysage est d'autant plus lisse que la longueur de corrélation est grande.

Une conjecture [STA 92] permet de relier le nombre d'optima locaux M et la longueur de corrélation :

$$M \approx |\mathcal{S}| / |\mathcal{S}(s_0, \tau)|$$

où $\mathcal{S}(s_0, \tau)$ est l'ensemble des solutions de \mathcal{S} que l'on peut atteindre au cours d'une marche de longueur τ sur le graphe Γ . Cette relation est vérifiée sur les paysages classiques d'optimisation combinatoire tel que le problème du voyageur de commerce.

2.3. Neutralité

La théorie neutraliste a été proposée par Kimura [KIM 83] dans le contexte de l'évolution moléculaire. Selon cette théorie, la plupart des mutations sont neutres (l'effet sur la fitness est négligeable) ou létale. Reidys and Stadler ont montré que cette théorie peut se révéler pertinente dans l'étude des paysages de fitness [REI 01].

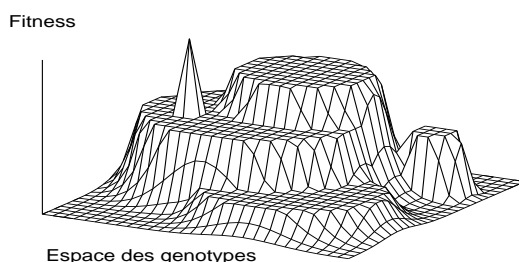


Figure 2. Représentation typique d'un paysage de fitness neutre de dimension deux.

Nous allons définir les concepts liés à la neutralité dans le contexte des paysages de fitness : test de neutralité, voisinage neutre, marche neutre et réseaux de neutralité.

Définition: Un test de neutralité est un prédicat $isNeutral : S \times S \rightarrow \{vrai, faux\}$ qui à chaque $(s_1, s_2) \in S^2$ associe la valeur *vrai* si la différence entre $f(s_1)$ et $f(s_2)$ est négligeable.

Très fréquemment le prédicat $isNeutral(s_1, s_2)$ est *vrai* ssi $f(s_1) = f(s_2)$. Dans ce cas, $isNeutral$ induit une relation d'équivalence. D'autres situations fréquentes en évolution artificielle sont $isNeutral(s_1, s_2)$ est *vrai* ssi $|f(s_1) - f(s_2)| \leq 1/S_{pop}$ avec S_{pop} la taille de la population. Lorsque f est stochastique, par exemple dans des problèmes d'apprentissage, $isNeutral(s_1, s_2)$ est *vrai* ssi $|f(s_1) - f(s_2)|$ est inférieure à l'erreur d'évaluation. Dans ces derniers cas, on parlera plutôt de quasi-neutralité.

La théorie neutraliste repose sur l'existence de mutations neutres, ce qui amène à définir la notion de voisinage neutre dans le cadre des paysages de fitness.

Définition: Pour tout $s \in S$, le voisinage neutre de s est l'ensemble $N_{neut}(s) = \{s' \in \mathcal{V}(s) \mid isNeutral(s, s')\}$ et le degré de neutralité de s , noté $nDeg(s)$ est le nombre de voisins neutres de s , $nDeg(s) = \#(N_{neut}(s) - \{s\})$.

On dit qu'un paysage de fitness est neutre, ou que son degré de neutralité est fort, lorsqu'un grand nombre de solutions ont un haut degré de neutralité. Cette définition est imprécise et il n'existe pas encore d'échelle qui permettrait de classer les

problèmes selon leur degré de neutralité. Les plateaux, appelés aussi *réseaux de neutralité*, s'ajoutent désormais à la description géométrique des paysages de fitness (voir figure 2). Un réseau de neutralité est un graphe connexe de solutions où il n'y a pas de différence de performance significative entre les solutions et où la relation de voisinage neutre permet de définir les arcs. Pour une définition formelle, nous utilisons la notion de *marche neutre* :

Définition: Une *marche neutre* W_{neut} de s à s' est une marche (s_0, s_1, \dots, s_m) de s à s' telle que $s_{i+1} \in \mathcal{V}(s_i)$ et pour tout $(i, j) \in [0, m]^2$, $i \neq j$, $Neutral(s_i, s_j)$ est vrai.

Définition: Un *réseau de neutralité*, noté RN , est un graphe (G, N) où deux sommets de G sont connectés par un arc de N s'ils sont voisins neutres, et l'ensemble G des sommets est l'ensemble des solutions appartenant à \mathcal{S} tels que pour tout s et s' de G , il existe une marche neutre W_{neut} appartenant à G de s à s' .

Décrire la neutralité d'un paysage consiste à décrire ses réseaux de neutralité. Deux points de vue sont alors possibles, selon que l'on s'intéresse en propre à un réseau, ou bien aux relations entre réseaux.

L'étude en propre des RN repose sur la description des graphes des RN. Les mesures classiques des graphes utilisées pour décrire les RN sont alors :

- La *taille* : nombre de sommets du réseau,
- Le *diamètre* : distance (nombre minimal d'arcs d'un chemin reliant deux sommets) maximale entre solutions appartenant au réseau,
- La *distribution des degrés de neutralité* : distribution des degrés des sommets du graphe.

Pour étendre ces mesures à l'ensemble du paysage, on étudie pour la taille, la distribution des tailles des RN du paysage ; pour la distribution des degrés de neutralité, la distribution des degrés de neutralité pour l'ensemble des solutions du paysage.

Pour qualifier le graphe d'un RN , on étudie la corrélation des degrés ce qui permet une comparaison avec un graphe aléatoire. Ainsi, Bastolla [BAS 03] dans le domaine de l'évolution moléculaire, a défini l'autocorrélation des degrés de neutralité au cours d'une marche neutre : A partir des degrés collectés au cours d'une telle marche, on peut calculer l'autocorrélation de la série obtenue. Nous pouvons aussi utiliser cette mesure dans le cadre des paysages de fitness. L'autocorrélation des degrés mesure la structure de corrélation d'un RN (*i.e.* la répartition des degrés de neutralité sur le réseau). Une corrélation significative indique que la variation des degrés est faible ; il se crée alors sur le réseau des zones plus homogènes relativement au degré de neutralité. Aussi dans ce cas, le graphe n'est pas un graphe aléatoire. Toutes ces caractéristiques jouent un rôle important dans la dynamique des algorithmes évolutionnaires lorsque les solutions stagnent sur un réseau de neutralité (cf. partie 3.1).

La relation entre les réseaux de neutralité s'effectue en décrivant les arcs et les solutions qui permettent de passer d'un réseau à un autre. On appelle *porte* une solution

du réseau de neutralité dont un voisin possède une valeur de fitness strictement supérieure à celle du réseau. Dans le domaine de l'évolution moléculaire, afin d'évaluer les capacités de découverte de nouvelles structures lors d'une évolution neutre, Huy-nen [HUY 96] a défini le *taux d'innovation* d'un RN, comme le nombre de nouvelles valeurs de fitness (précédemment non rencontrées) atteignables dans le voisinage des solutions au cours d'une marche aléatoire neutre. Ce taux peut être comparé avec celui obtenu au cours d'une marche aléatoire. En optimisation combinatoire, il est possible de calculer ce taux d'innovation pour mesurer la capacité de découverte par une heuristique de nouvelles valeurs de fitness lors d'une exploration d'un RN. Lorsque ce taux est important en comparaison avec celui obtenu lors d'une marche aléatoire, le RN est alors fortement connecté avec d'autres RN. Dans ce cas, une exploration du RN par une heuristique peut potentiellement fournir un grand nombre de valeurs de fitness dans le voisinage du RN.

Au vu de ces définitions, la figure 3 est une alternative à la représentation classique d'un paysage de fitness neutre.

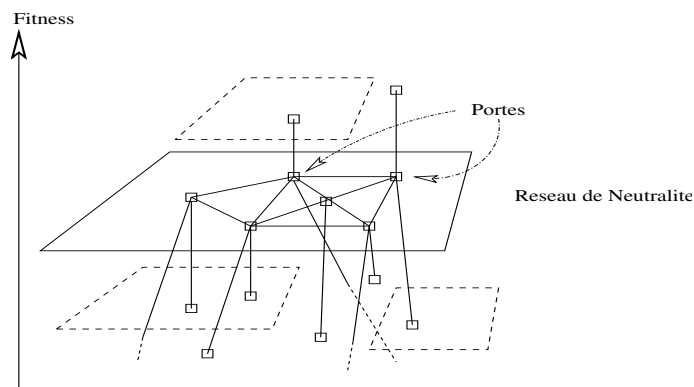


Figure 3. Représentation sous forme de graphe d'un paysage de fitness neutre.

2.4. Neutralité dans les problèmes académiques

En évolution artificielle de nombreux problèmes académiques ont été proposés afin d'étudier les relations entre leurs propriétés caractéristiques et les performances des AE ; parmi ces problèmes tests, certains conduisent à des paysages de fitness neutres.

Les paysages Routes Royales (Royal-Road) [MIT 92] dépendent de deux paramètres : le nombre de blocs n et la taille k d'un bloc constituant un génotype. Ils ont été initialement conçus pour étudier la dynamique des algorithmes génétiques. Ils permettent de décrire comment des parties de la solution optimale, appelés blocs de construction, sont combinés pour produire de meilleures solutions. Toutefois, ces paysages sont fortement neutres et le degré de neutralité peut être ajusté à l'aide du

paramètre k .

Plus formellement, la fonction B_i indique si tous les bits du bloc i valent 1 : $B_i(x) = 1$ si $\forall j \in [ik, (i+1)k - 1], x_j = 1$ et $B_i(x) = 0$ sinon. La fonction de fitness f_{RR} est définie sur les chaînes binaires de longueur nk par : $\forall x \in \{0, 1\}^{nk}, f_{RR}(x) = \sum_{i=0}^{K-1} B_i(x)$. La fitness d'une solution est modifiée soit parce que l'on mute 1 bit dans un bloc contenant déjà k bits positionnés à 1, soit parce que l'on mute l'unique bit 0 dans un bloc. Si bien que plus k est grand, plus le degré de neutralité des solutions est important.

Plusieurs paysages neutres sont des variantes des paysages NK [KAU 93]. Les paysages NK , paramétrés par des entiers N et K , ont été développés pour étudier le lien entre le degré de non-linéarité d'un problème (épistasie) et la rugosité du paysage. L'espace de recherche est l'ensemble $\mathcal{S} = \{0, 1\}^N$ des chaînes binaires de longueur N et le voisinage \mathcal{V} est le voisinage de Hamming de taille 1. Le paramètre K représente le nombre de liens "épistatiques" entre bits. Chaque bit i d'une solution apporte une contribution à la performance globale par une fonction $f_i : \{0, 1\}^{K+1} \rightarrow [0, 1]$. Cette contribution dépend localement du bit i mais aussi des K autres bits épistatiquement liés (K est compris entre 0 et $N - 1$). La fonction de fitness $f_{NK}(s)$ d'une solution $s \in \mathcal{S}$ est la moyenne des valeurs des N fonctions de contribution f_i :

$$f_{NK}(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(s_i; s_{i_1}, \dots, s_{i_K})$$

où $\{i_1, \dots, i_K\} \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}$. Chaque contribution f_i est définie en extension, par un nombre réel $y_{i,(x_i;x_{i_1}, \dots, x_{i_K})}$ de $[0, 1]$ associé à chaque élément $(x_i; x_{i_1}, \dots, x_{i_K})$ de $\{0, 1\}^{K+1}$. Ces nombres sont choisis uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Dans les paysages NK , la non-linéarité est liée à la rugosité. Lorsque $K = 0$, le problème est sans épistasie, le paysage est lisse ; lorsque $K = N - 1$, le problème est très épistatique, le paysage est très rugueux.

À partir de ce modèle, trois méthodes ont été proposées pour introduire de la neutralité : diminuer le nombre de contributions participant à la valeur de fitness, discrétiser les valeurs des contributions ou encore discrétiser les valeurs de fitness.

Les *paysages de fitness NKp* ont été introduit par Barnett [BAR 98] ; ils consistent à particulariser les fonctions de contribution des paysages NK , à l'aide du paramètre $p \in [0, 1]$ ajustant la neutralité du paysage. La valeur d'une contribution est nulle avec une probabilité p , i.e. $P(y_{i,(x_i;x_{i_1}, \dots, x_{i_K})} = 0) = p$. La probabilité que deux solutions voisines aient la même performance augmente avec le paramètre p . On peut trouver les principaux résultats sur les paysages NKp au sixième chapitre de la thèse de L. Barnett [BAR 03]. Cette famille de paysages modélise les paysages où il existe des combinaisons d'interactions qui ne modifient pas la performance.

Les *paysages de fitness NKq* ont été introduit par Newman *et al* [NEW 98]. Comme dans les paysages NKp , les fonctions de contribution sont définies à l'aide d'un paramètre entier q supérieur ou égal à 2. Chaque $y_{i,(x_i;x_{i_1}, \dots, x_{i_K})}$ est l'une des fractions $\frac{k}{q}$ où k un nombre entier choisi uniformément dans l'intervalle $[0, q - 1]$. La neutra-

lité du paysage est maximale lorsque q est égal à 2, et décroît lorsque q augmente. Les auteurs montrent que cette famille de paysages permet de modéliser les propriétés d'évolution neutre d'espèces moléculaires.

Les *paysages technologiques* ont été introduit par Lobo *et al* [LOB 04]. Ils se définissent en discrétisant en M valeurs les performances possibles de la fonction f_{NK} , soit $f_{techn}(x) = \frac{k}{M}$ ssi $k \leq M \cdot f_{NK}(x) < k + 1$. Selon les auteurs, cette famille de paysages modélise l'évolution de firmes technologiques où l'évolution de la performance d'une firme n'est pas graduelle mais s'effectue par "sauts technologiques".

Citons également dans le domaine des problèmes dont les solutions sont de taille variable, le paysage des Routes Épistatiques [Def 03] qui utilisent trois paramètres N , K et b . L'espace de recherche \mathcal{S} est constitué des chaînes de taille variable sur le vocabulaire Σ fini de taille N . A la manière des Routes Royales, B_b indique la présence d'un bloc contigu de taille b de lettre $\alpha \in \Sigma$ dans une chaîne de longueur λ . $B_b(x, s) = 1$ si $\exists i \in [0, \lambda - b] \forall j \in [0, b - 1] x_{i+j} = \alpha$ et $B_b(x, s) = 0$ sinon. Enfin, l'épistasie entre les blocs est générée à l'aide du fonction de fitness NK et de la présence ou de l'absence d'un bloc : $f_{NKb}(g) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(B_b(x, a_i), B_b(x, a_{i_1}), \dots, B_b(x, a_{i_K}))$ Comme dans le problème des Routes Royales, plus la taille des blocs est grande, plus le paysage est neutre.

2.5. Neutralité dans les problèmes réels

Parmi les problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans les applications réelles, certains conduisent à des paysages neutres. Nous en donnons ici quelques exemples.

2.5.1. Erreur d'évaluation et contrôleurs de robot

Husbands [HUS 98] propose d'utiliser un réseau de neurones particulier (GasNet) pour contrôler un robot. L'optimisation du réseau de neurones est réalisée à l'aide d'un algorithme génétique. L'ensemble des neurones est représenté par une chaîne d'entiers de longueur variable où chaque neurone est codé par dix-neuf paramètres contrôlant le poids d'une connexion, l'entrée sensorielle, etc. Les mutations sont de trois types : insertion, délétion de neurone et changement de valeur de paramètre. Smith *et al* [SMI 01a] [SMI 01b] [SMI 02] soulignent l'importance de la neutralité dans ce paysage de fitness. En effet, les robots doivent résoudre des tâches dans des environnements bruités où nécessairement la fitness ne peut plus être calculée précisément. Les auteurs montrent que ce bruit d'évaluation induit de la neutralité dans le paysage. La dynamique d'évolution est alors influencée par la neutralité : la population alterne des phases où la fitness du meilleur individu stagne avec des phases où cette fitness croît rapidement (cette dynamique caractéristique sera présentée en section 3.1). De plus, il est montré que la population se déplace significativement sur les réseaux de neutralité durant la première phase et que la probabilité de découvrir une porte est constante.

D'autres travaux similaires en évolution de réseaux de neurones (CTRNN) contrôlant la marche d'un robot unijambiste mettent en évidence la présence de neutralité [SEY 04]. Seys et Beer observent les deux mêmes phases caractéristiques, une phase d'exploration d'un réseau de neutralité et une phase de découverte de meilleures solutions. Les auteurs mesurent le temps passé sur un réseau de neutralité ainsi que les mouvements de la population entre réseaux. Ils en déduisent que la recherche peut être assimilée à une recherche aléatoire durant la phase d'exploration. Cette étude leur a permis d'adapter l'opérateur de mutation selon la phase de la recherche.

L'erreur d'évaluation dans les problèmes d'apprentissage conduit à une neutralité inhérente au paysage de fitness que les algorithmes évolutionnaires peuvent prendre en compte.

2.5.2. Neutralité et programmation génétique

La programmation génétique (PG) est une approche évolutionnaire adaptée au traitement de solutions exprimées sous la forme de programmes (arbre, pile, ...). Ebner [EBN 99] met en évidence que le nombre de programmes qui codent la même fonction est important (par exemple 0.03% des arbres de profondeur 3 représentant une même expression arithmétique qui codent la fonction identité). L'existence de code mort favorisé par la taille variable des programmes est une source de redondance. La redondance est une condition nécessaire à l'existence de neutralité dans le paysage. Plus la redondance est importante, plus la probabilité que des solutions voisines aient la même performance est grande. Par nature, les paysages en programmation génétique sont neutres.

La programmation génétique cartésienne permet de concevoir des circuits électroniques [MIL 00]. Cette variante de la programmation génétique configure un tableau de portes logiques. Chaque porte possède le même nombre d'entrées, une sortie et une fonction. On peut ainsi coder l'ensemble des portes par une chaîne de taille fixe qui représente le graphe indexé des portes. Pour la conception d'un multiplieur à 3 bits, Vassilev *et al* [VAS 00] mesurent le diamètre des réseaux de neutralité et le nombre de mutations neutres au cours de l'évolution d'un AE. Le diamètre décroît (de 80% à 10% de la longueur des solutions) ainsi que le nombre de mutations neutres lorsque la fitness des solutions augmente. Les auteurs comparent les performances d'un AE avec et sans mutations neutres. Les mutations neutres sont nécessaires puisque le taux de succès est alors de 27% ; sans mutations neutres le taux de succès est nul. Pour la conception d'un circuit réalisant la fonction parité⁴, Yu *et al* [YU 01] [YU 02] mettent en évidence la présence de neutralité et montrent qu'en favorisant les mutations neutres, un AE améliore ses performances. Ces études montrent que les paysages de fitness issus de ces problèmes sont neutres, et l'avantage de l'exploitation de cette géométrie.

Les "Field Programmable Gate Array" (FPGA) sont des circuits électroniques reconfigurables. Ces circuits sont des matrices de portes logiques où chaque porte peut être configurée. Il est possible d'utiliser un AE afin de programmer de tels circuits

4. Parité du nombre de 1 dans une chaîne binaire

[THO 97] [HAR 96]. Thompson et Harvey ont mené une étude sur un algorithme génétique dont la tâche est de programmer un FPGA qui résout le problème de distinction de signaux de fréquences différentes. Sans toutefois en expliquer l'origine, ils ont montré la présence de neutralité dans le paysage de fitness du problème. En effet, bien que la fitness du meilleur individu n'augmente plus, la population se déplace encore dans le paysage démontrant qu'elle n'a pas convergé autour d'un optimum local.

3. Algorithmes Évolutionnaires et Neutralité

3.1. Dynamique des algorithmes évolutionnaires

Dans cette section nous allons commencer par décrire l'évolution de la fitness dans les paysages neutres puis, nous présenterons la dynamique d'une population sur un réseau de neutralité.

En paléontologie, les travaux de Eldge et Gould [ELD 72] ont mis en évidence un type d'évolution appelé *équilibres ponctuels*. L'évolution se déroule selon l'alternance de deux phases. Pendant la première phase, la meilleure fitness n'augmente pas et la fitness moyenne de la population stagne. Dans une seconde phase, la fitness augmente brusquement : on observe un saut qualitatif significatif ; la nouvelle solution trouvée se répand alors rapidement dans la population (voir figure 4). Ce schéma d'évolution d'une espèce dans un paysage multimodal a été explicitement proposé par S. Wright [WRI 82] et modélisé par C. M. Newmann [NEW 85] et R. Lande [LAN 85]. La population forme un nuage localisé autour d'un optimum local : elle reste dans cet état jusqu'à ce qu'un mutant puisse traverser une "vallée" afin d'atteindre un nouvel optimum. Ce type d'évolution peut également trouver une explication dans le contexte des paysages neutres. Dans le domaine de l'optimisation par évolution artificielle, on rencontre les mêmes phases d'évolution qui sont dues à la neutralité du paysage. Pendant la première phase la population se diffuse aléatoirement sur un réseau avec une probabilité faible et constante de trouver une porte ; puis dans la seconde phase, une porte conduisant à un réseau de neutralité de meilleure fitness est empruntée. La question de savoir si un algorithme évolutionnaire effectue une recherche aléatoire pendant la première phase est toujours ouverte. Quelques éléments de réponse ont été apportés par l'étude de la dynamique sur un réseau de neutralité.

Derrida [DER 91] a réalisé une étude détaillée de l'évolution d'une population de taille finie sur un paysage plat sur lequel il n'y a aucune pression sélective. Dans ce cas, et contrairement à l'intuition, la dynamique évolutionnaire demeure très complexe. La population se divise en sous-populations où les individus partagent une même généalogie. Des travaux [BOR 99] [NIM 99b] [NIM 01], à la croisée de la biologie moléculaire et de l'optimisation, ont étudié la convergence d'une population sur un réseau de neutralité. Le modèle prend en compte une population infinie soumise à une sélection proportionnelle à la fitness et à la mutation d'un locus par individu. Wilke [WIL 01] généralise cette étude à un mode de mutation plus général. Dans tous les cas, la distribution limite de la population sur le réseau de neutralité est uniquement déterminée

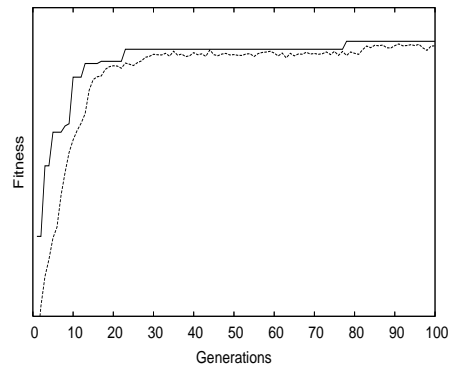


Figure 4. Exemple de fitness maximum et fitness moyenne d'une population lors d'une dynamique d'équilibre ponctué.

par la topologie du réseau. Elle est indépendante de la taille de la population ou du taux de mutation. La distribution de la population converge vers les régions découvertes où les solutions ont les plus grands degrés de neutralité. La robustesse vis-à-vis des mutations est ainsi améliorée.

Dans chacun des cas précédents, seule une sélection proportionnelle à la fitness est considérée. Or le choix du mode de sélection influence la dynamique de la recherche. La sélection par tournoi est la plus couramment utilisée dans les algorithmes évolutionnaires, nous proposons donc de montrer, en adaptant la preuve de Nimwegen [NIM 99b], que les résultats précédents sont également valides pour ce type de sélection :

Proposition :

Pour une sélection par tournoi, la distribution limite de la population sur un Réseau de Neutralité (RN) est uniquement déterminée par la topologie du réseau. Elle est indépendante de la proportion de solutions sur ce réseau ou du taux de mutation. Le degré de neutralité moyen de la population est supérieur au degré de neutralité moyen du RN.

Preuve :

Nous considérons un algorithme évolutionnaire limité à l'itération de sélection par tournoi puis de mutation. L'espace de recherche considéré est l'ensemble des chaînes binaires de longueur L . La mutation altère un seul bit par chaîne avec une probabilité μ^5 . Soit P la proportion de la population (infinie) sur le réseau de neutralité G de fitness σ ; on suppose que le reste de la population a des fitness inférieures. La sélection

5. La preuve se généralise aux chaînes sur un alphabet de taille quelconque ainsi qu'à d'autres modes de mutation

par tournoi de taille t choisit au hasard t individus dans la population et sélectionne le meilleur comme géniteur. La proportion moyenne sur le réseau après le tournoi est de $1 - (1 - P)^t$, soit $P\alpha$ avec $\alpha = \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t}{k+1} (-P)^k$. Après mutation, une proportion $\langle \nu \rangle$ reste sur le réseau et une proportion $1 - \langle \nu \rangle$ voit sa fitness se dégrader. Soit Q la proportion des individus de fitness inférieure qui atteignent le réseau G par mutation, nous avons à l'équilibre $P = \alpha \langle \nu \rangle P + Q$. En général, Q est négligeable devant P ; si bien que nous obtenons un équilibre entre les individus quittant le réseau par mutation et la pression de sélection : $\alpha \langle \nu \rangle = 1$. Maintenant exprimons la relation entre le degré de neutralité d_s d'une solution $s \in G$ et la probabilité ν_s de rester sur s : $\nu_s = 1 - \mu(1 - \frac{d_s}{L})$. Asymptotiquement $\langle \nu \rangle = \sum_{s \in G} \nu_s \frac{P_s}{P}$ et le degré moyen de neutralité $\langle d \rangle$ de la population est égale à $\sum_{s \in G} d_s \frac{P_s}{P}$. Pour une population sur G , nous obtenons la relation entre la neutralité apparente de la population et la proportion d'individus sur le réseau :

$$\langle d \rangle = L \left(1 - \frac{\alpha - 1}{\mu \alpha} \right) \quad (1)$$

Ainsi connaissant la proportion d'individus de même fitness dans la population, on peut estimer le degré de neutralité moyen de la population. En considérant que pour des individus de même fitness, le tournoi sélectionne un individu avec une probabilité uniforme, la proportion P_s d'individus de solution $s \in G$ est le produit de la proportion d'individus sur G et de la probabilité que cet individu soit s , soit $P_s = \frac{P_s}{P} (1 - (1 - P)^t) = \alpha P_s$. La distribution asymptotique vérifie donc $\forall s \in G, P_s = (1 - \mu) \alpha P_s + \frac{\mu}{L} \sum_{t \in \mathcal{V}(s) \cap G} \alpha P_t$. Ainsi en utilisant l'équation 1, nous obtenons

$$\langle d \rangle \vec{P} = \mathbf{G} \vec{P} \quad (2)$$

où \mathbf{G} est la matrice d'adjacence du graphe induit par G et \vec{P} le vecteur de distribution P_s pour tout $s \in G$. À l'aide du théorème de Perron-Frobenius, nous pouvons conclure comme dans [NIM 99b] que la distribution asymptotique \vec{P} est indépendante du taux de mutation et du niveau de fitness et ne dépend que de la topologie du réseau. De même, le degré moyen de la population est plus grand que la moyenne sur le réseau, ce qui signifie que la population converge vers les zones de plus grand degré de neutralité.

Cette preuve repose sur les hypothèses d'équilibre de proportion entre le réseau et les autres niveaux de fitness et aussi en tout point du réseau de neutralité. La preuve se généralise donc à tout mode sélection où le coefficient α ne dépend que de la proportion P et de la fitness du réseau⁶, et où la probabilité de sélection de solutions sur le réseau est uniforme. Notons que la vitesse et le mode de convergence ne sont pas exposés, ni les variations stochastiques autour de la distribution asymptotique qui peuvent être déterminante pour l'efficacité de la recherche.

6. et ne dépend pas du nombre d'itérations ou de la position des solutions sur le réseau

3.2. Exploiter la neutralité ?

De façon générale, un algorithme évolutionnaire ne peut être performant que si l'on choisit avec soin le codage du problème et les opérateurs. Ces choix permettent d'introduire une connaissance spécifique au problème. Des codages et des opérateurs différents engendrent des espaces de recherche de tailles variées et des structures de paysage de fitness plus au moins rugueux ou neutres. Dès lors on peut se demander si un codage qui introduit de la neutralité permet une optimisation plus efficace. Les mesures sur les paysages de fitness permettent de répondre en partie à cette question. Lorsque le taux d'innovation, le nombre de portes, la structure du graphe du réseau sont favorables alors le choix du codage sera pertinent.

Nimwegen et Crutchfield [NIM 99a] ont utilisé la notion de barrière pour éclairer cette question. Nous avons vu qu'il y avait deux interprétations pour la dynamique des équilibres ponctuels. Pour obtenir un gain de fitness, soit la population traverse une "vallée" entre deux optima locaux, on doit alors franchir une *barrière de fitness* et accepter de dégrader temporairement la fitness, soit la population se diffuse sur un réseau jusqu'à trouver une porte, c'est-à-dire franchir une *barrière d'entropie* ; lors de la diffusion la population n'est guidée par aucune information liée à la fitness. La question est donc de savoir s'il est plus facile de franchir une barrière de fitness plutôt qu'une barrière d'entropie. Deux attitudes sont alors possibles. On peut interpréter la neutralité, et en particulier les barrières d'entropie, comme une difficulté supplémentaire pour les algorithmes évolutionnaires ; dans ce cas il faudra adapter la métaheuristique. L'alternative est de considérer que la neutralité permet d'améliorer la recherche en remplaçant une barrière de fitness par une barrière d'entropie ; situation dans laquelle les algorithmes évolutionnaires réalisent une meilleure exploration.

Les travaux d'Izquierdo-Torres [IZQ 04] illustrent cette dualité. Comme dans le cas de l'apprentissage de la marche (section 2.5.1), il s'agit de déterminer les paramètres d'un réseau de neurones dynamique (CTRNN) afin de réaliser des portes logiques. La performance est mesurée par la différence entre les activations finales et attendues⁷. Un paramètre t permet d'ajuster la neutralité du paysage en définissant le prédicat *isNeutral* de la section 2.3. Une mutation est neutre lorsque les fitness des solutions ne diffèrent que de $t\%$. Plus t est grand, plus les réseaux de neutralité sont larges, plus on augmente les barrières d'entropie. Un algorithme évolutionnaire $(1 + 1)$, équivalent au netcrawler (voir la section 3.4.1) est utilisé. A chaque itération, une solution voisine est acceptée si sa fitness est supérieure ou bien la mutation est neutre. Cet algorithme diffère de celui d'un algorithme de recuit simulé, le paramètre t ne permet pas de définir une probabilité d'acceptation d'une solution dégradée et est fixe au cours de l'évolution. L'auteur mesure les performances de l'algorithme pour les valeurs de t égale à 0, 1, 5, 10, 20%. Les meilleures performances sont obtenues pour t^* égal à 5 pour cent. Avant t^* , l'algorithme n'arrive pas à atteindre de bonnes valeurs fitness, après t^* la recherche devient aléatoire et se détériore. Dans ce problème, l'introduction de neutralité permet de "gommer" des barrières de fitness,

7. ces activations sont des nombres réels

puisque l'algorithme converge prématurément. Toutefois, lorsque la barrière d'entropie créée devient trop importante, l'algorithme n'est plus capable de converger vers les bonnes solutions.

Nous allons exposer dans la suite les moyens d'introduire explicitement de la neutralité dans un paysage de fitness.

3.3. Neutralité synthétique

Étant donné un espace de recherche S , une méthode naturelle pour créer de la neutralité est de définir un nouvel espace de recherche S' de taille supérieure à S et une application surjective $\varphi : S' \rightarrow S$. Ainsi le nouvel espace S' est dit redondant puisque plusieurs solutions de S' codent une même solution de S et donc ont la même valeur de fitness. Dans la suite nous allons distinguer la redondance brute, la redondance plate et la redondance encapsulée.

3.3.1. Redondance brute

Dans le cadre des algorithmes génétiques où les espaces de recherche sont les chaînes binaires de longueur N , plusieurs types d'application surjective, appelée mapping ont été proposés [SHA 00] [EBN 01]. Avec le *mapping d'automate cellulaire*, S' est définie par l'adjonction de N tables de règles à chaque chaîne de longueur N afin de définir un automate cellulaire non-uniforme. Les éléments S sont déterminés par l'itération de l'automate cellulaire. Le *random boolean mapping* diffère du précédent par le voisinage des cellules de l'automate cellulaire. Au lieu d'être classiquement celui de cellules contiguës, le voisinage est aléatoire parmi l'ensemble des cellules. Les auteurs argumentent en faveur de ces codages en montrant qu'ils augmentent la connectivité entre les valeurs de fitness, ainsi que le nombre de génotypes S rencontrés au cours d'une marche aléatoire sur S' ou le taux d'innovation au cours d'une marche neutre⁸. Malheureusement, ces codages semblent trop aléatoires pour être performants sur tous types de problème. Knowles [KNO 02] reprend le random boolean mapping et montre que sur les problèmes NK, Max-SAT et H-IFF le codage direct est plus performant.

Un codage redondant aléatoire n'a pas d'influence a priori sur les mesures caractéristiques du paysage (taux innovation, nombre de portes moyen d'un réseau, etc.) et donc ne peut pas améliorer les performances d'un AE. Introduire de la neutralité de façon "aveugle" doit donc être évité.

3.3.2. Redondance plate

Afin d'évaluer la qualité de la neutralité, Rothlauf *et al* [ROT 03] introduisent le concept de redondance synonymique. La redondance est synonymique lorsque l'en-

8. Toutefois, il n'a pas été comparé avec celui d'une marche aléatoire ce qui ne permet pas de connaître l'innovation réelle d'un réseau de neutralité

semble $\varphi^{-1}(s)$ des éléments de S' qui ont pour image $s \in S$ sont proches. Cette redondance est régulière au sens où elle “duplique” localement les solutions et tend à augmenter la taille des réseaux. Elle ne modifie pas la nature de la dynamique d’un AG. Les performances sont équivalentes lorsque la taille de la population et le nombre d’itération sont de l’ordre de $O(2^k/r)$, où k est le degré de redondance égal à $\frac{\log(S')}{\log(S)}$ et $r = \varphi^{-1}(s_{opt})$ le nombre de solution de S' qui ont pour image la solution optimale s_{opt} . Le temps de convergence et la taille de la population sont alors plus petits lorsque la solution optimale est sur-représentée dans l’espace S' .

Le *mapping par vote de majorité* est un exemple de redondance synonymique. Ici, S' est l’ensemble des chaînes binaires $\{0, 1\}^{(2p+1)N}$. Le nombre de bits positionnés à 1 entre les positions $(2p+1)k$ et $(2p+1)(k+1) - 1$ d’une chaîne de $s' \in S'$ détermine la valeur du bit k de la chaîne $s \in S$. Si ce nombre est supérieur ou égal à p , alors il y a une majorité de 1, la valeur du bit de s vaut 1, sinon le bit vaut 0.

3.3.3. Redondance encapsulée

Dans cette section, nous allons présenter trois exemples où la neutralité repose à la fois sur une redondance et sur des opérateurs spécifiques. Ces opérateurs exploitent la redondance introduite et tiennent compte des caractéristiques du problème. Ainsi, ils permettent d’améliorer les performances d’un algorithme évolutionnaire.

Dans le cadre de l’optimisation de problèmes dynamiques [GAS 99], les AE sont confrontés à deux difficultés. Dans un problème dynamique de bonnes solutions ne sont, en général, plus adaptées à une nouvelle situation. L’algorithme doit alors préserver la diversité de la population afin de conserver la capacité de créer de nouvelles solutions. Par ailleurs, il est fréquent que des situations proches de celles déjà réalisées surviennent de nouveau, aussi l’algorithme doit être capable de mémoriser des solutions dans le but de les réutiliser. Dans ce contexte, Levenick [LEV 99] étudie l’avantage d’ajouter dans le génotype des introns, c’est-à-dire des régions non codantes. Ces régions doublent au minimum la longueur de la chaîne. Lorsque la fitness d’un individu devient négligeable, un opérateur de “swapping” effectue une permutation entre bits non codants et bits codants. Ce mécanisme préserve la diversité de la population et la partie non codante constitue un réservoir de diversité qui peut jouer le rôle de mémoire.

Les stratégies d’évolution sont des AE utilisés pour optimiser les problèmes codés à l’aide de vecteur de longueur N de nombres réels. Ces nombres sont mutés en ajoutant une réalisation d’une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne nulle et dont l’écart-type est un paramètre. Dans une version simple de ces stratégies, l’écart-type est un paramètre constant de l’algorithme et ne dépend que de la variable considérée. Toussaint et Igel [TOU 02] soulignent l’intérêt d’un codage redondant

conduisant à un paysage neutre dans une version plus efficace⁹. En effet, dans cette version, les solutions sont codées à l'aide de vecteur de nombre réel de longueur $2N$, les N premiers réels codent la solution, les N suivants sont les écart-types qui paramètrent la mutation. Le codage utilisé est donc redondant et induit un paysage de fitness neutre. L'algorithme utilise alors un opérateur de croisement spécifique permettant de recombiner efficacement les écart-types¹⁰. Les performances comparées des deux stratégies sont largement en faveur de la version avec neutralité. Les auteurs mettent en avant le fait que la neutralité autorise l'auto-adaptation des paramètres de recherche sans perte de valeur de fitness. Si l'adaptation des écart-types s'effectuait uniquement sous l'effet de la pression sélective, on ne pourrait pas optimiser le réglage des paramètres. Toutefois, il faut noter que si la recombinaison de ces paramètres n'était pas réalisée de manière pertinente, la neutralité à elle seule ne serait pas suffisante pour permettre l'auto-adaptation.

Dans le contexte des algorithmes génétiques manipulant des chaînes binaires de longueur fixe, Collard *et al* [COL 00] ont proposé une approche parcimonieuse de la redondance. On suppose que les solutions sont initialement codées par des chaînes binaires de longueur N fixée et l'on "plonge" l'espace génotypique S de base dans un espace S' de dimension $N + 1$ via l'ajout d'un nouveau bit en tête de la chaîne. Cet espace étendu devient alors l'espace de recherche effectif d'un algorithme génétique. Deux chaînes complémentaires $0x$ et $1\bar{x}$ dans S' correspondent au même génotype de base x et donc partagent la même fitness $f(x)$. De plus les auteurs introduisent un nouvel opérateur neutre spécifique, dit de "mirroring", qui transforme une chaîne de S' en la chaîne complémentaire. Cet opérateur n'a bien sûr aucune influence sur la fitness. Du point de vue de la neutralité, et indépendamment de la neutralité intrinsèque du problème, on a ainsi créé 2^N réseaux de neutralité de taille 2 dans lesquelles on peut se déplacer par mirroring. On a là un exemple d'exploitation minimale du concept de neutralité. Notons toutefois que les auteurs proposent une généralisation de cette approche synthétique en considérant des espaces S' de taille $N + k$. L'intérêt de l'approche est mise en évidence sur des fonctions trompeuses (fonctions Trap où la fitness d'une solution dépend du nombre de bits positionnés à 1) présentant une multitude d'optima locaux. Un algorithme génétique classique est utilisé ($N = 200$, TauxCroisement=0.7, TauxMutation=0.5 par chaîne, TaillePop=100). Sans neutralité, après 10^3 générations, la population est piégée sur un optimum local. Par contre l'introduction de neutralité (TauxMirroring=0.02) permet d'atteindre l'unique optimum global. L'examen de la dynamique montre une succession de périodes lors desquelles la performance évolue peu et le polymorphisme augmente. Ces périodes sont entrecoupées de brusques augmentations de la fitness. On retrouve là la dynamique des équilibres ponctués connue dans les paysages de fitness neutres.

9. Ce n'est sans doute pas la meilleure version connue de la stratégie d'évolution mais le but ici est de comparer deux codages (avec et sans redondance) des solutions associés à deux algorithmes

10. pour plus de détail voir [BAC 97] ou [TOU 02]

Ces trois derniers exemples montrent que l'introduction d'une redondance structurée couplée avec des opérateurs capables d'exploiter la neutralité, peut-être une méthode pertinente pour concevoir des algorithmes évolutionnaires performants.

3.4. Algorithmes évolutionnaires adaptées à la neutralité

3.4.1. Netcrawler

Barnett [BAR 01] a montré qu'en présence d'un haut degré de neutralité, il peut être plus avantageux d'utiliser une seule solution "rampante" sur les réseaux de neutralité plutôt qu'une population de solutions potentielles. L'heuristique du Netcrawler (NC) s'apparente à un hill-climber ou à un recuit simulé dont la température serait nulle. L'intérêt de la démarche vient du fait que Barnett définit une classe de paysages de fitness neutres sur lesquels le NC est l'algorithme évolutionnaire le plus performant. Cette classe des paysages ϵ -corrélé regroupe une large part des paysages neutres dont la famille des paysages académiques NK_p (voir section 2.4) fait partie. Un paysage est dit ϵ -corrélé s'il vérifie les hypothèses suivantes :

- 1) la probabilité des mutations avantageuses est très faible comparée à celles des mutations neutres ou délétères.
- 2) les seules mutations avantageuses de probabilité non nulle sont celles qui conduisent au réseau de neutralité adjacent.

On suppose par ailleurs que le degré de neutralité (i.e. la probabilité qu'une mutation soit neutre) est constant dans un même réseau de neutralité. Le NC a donc été conçu pour dériver dans un paysage de fitness neutre ϵ -corrélé ; lors du processus de recherche, la solution courante est mutée et le remplacement a lieu uniquement quand la fitness du mutant est égale ou supérieure à la performance courante. Le NC réalise ainsi un parcours aléatoire neutre sur le paysage, ponctué par des transitions vers des réseaux de meilleures qualités. Barnett fournit une estimation du temps nécessaire pour découvrir de meilleures solutions et propose une variante adaptative du NC où l'on ajuste dynamiquement le nombre de bits mutés en fonction d'informations statistiques sur le paysage collectées durant l'exécution.

3.4.2. La "sélection extrême"

On considère ici que l'on utilise un AE pour rechercher de bonnes solutions dans un espace de recherche neutre ; dans ce contexte, la "Sélection Extrême" proposée par Terry Stewart [STE 01] a pour objectif d'accélérer l'évolution lors de la recherche. Quand la majorité des solutions dans une population a atteint le même niveau de fitness on observe généralement une dérive génétique purement aléatoire ; cela correspond à une longue période durant laquelle il n'y a pas d'amélioration de la qualité des solutions trouvées par l'AG. L'idée ici est d'attribuer à chaque solution une fitness corrélée à sa distance au centroïde de la population. La prise en compte lors de la sélection de cette fitness endogène a pour effet de disséminer la population sur le réseau de neutralité ; on peut ainsi espérer, par une exploration plus large du réseau,

atteindre plus rapidement des points de meilleures fitness. Pour s'assurer que la population reste dans un même réseau de neutralité, les mutations délétères sont ignorées. Ce type particulier de sélection est évalué sur la famille des paysages NKp (cf. section 2.4). Les expériences menées montrent que l'amélioration des performances due à la "sélection extrême", comparée à une sélection standard (roulette-wheel), est corrélée au degré de neutralité.

3.4.3. Recherche Périscopique

Une nouvelle métaheuristique de recherche a été proposée [COL 04, VER 04] dans le but de tirer avantage de la neutralité inhérente à un problème. Cette métaheuristique, appelé *recherche périscopique* (RP), est imagée par la métaphore de la nage avec périscope. L'idée de base est d'essayer d'optimiser sur les réseaux de neutralité, non pas la fitness de la solution mais la meilleure fitness du voisinage de la solution, appelée ici évolvabilité¹¹ d'une solution. La RP consiste donc en l'itération de deux étapes, la première optimise sur un réseau de neutralité l'évolvabilité des solutions, la suivante réalise un saut qualitatif de fitness en sélectionnant une solution voisine adéquate. Cette approche est évaluée sur les paysages neutres de type NK_q (cf. section 2.4) ainsi que sur une famille de problèmes TSP pour laquelle on peut régler le degré de neutralité [CHA 00]. Il est établi que la RP améliore les performances sur ces deux types de problèmes, comparées à celles d'heuristiques de recherche locale type "hill climbing", dès que la neutralité est suffisante. En revanche si l'évolvabilité est quasi constante sur un réseau de neutralité, comme cela est le cas par exemple pour les paysages Routes Royales [MIT 92], la RP sera équivalente à une recherche locale classique.

4. Conclusion

Au delà du modèle mathématique, la métaphore du paysage de fitness s'est révélée être un outil de "visualisation" de certaines propriétés des espaces de recherche, comme par exemple les optima locaux, la rugosité, etc. Dans cet article, nous avons montré que le paysage de fitness est un support pertinent pour l'étude de la neutralité. Dans ce cadre général nous avons présenté et défini le concept de neutralité ainsi que les principales caractéristiques des paysages neutres. De nombreux problèmes académiques permettent d'étudier la relation entre ces caractéristiques et le comportement des algorithmes évolutionnaires, en particulier la dynamique des équilibres ponctuels. Par ailleurs, certains travaux ont mis en évidence la présence de neutralité dans des problèmes réels ; par exemple pour la conception de contrôleurs de robot ou de circuits électroniques. Dans une seconde partie, nous avons étudié la dynamique des algorithmes évolutionnaires sur des paysages neutres ; en particulier, nous avons vu que la population de solutions manipulée par un AE augmentait sa robustesse vis-à-vis de la mutation sur un réseau de neutralité. Dans le but d'améliorer les performances des AE, nous avons présenté deux techniques fondées sur l'ajout de neutralité. La

11. "évolvabilité" désigne la capacité à évoluer

première solution consiste à introduire de la neutralité au moyen d'une redondance au niveau du codage dans le but de permettre une auto-adaptation des paramètres. La seconde technique consiste à coupler l'ajout d'une redondance minimale avec un opérateur neutre adéquat. Au vu de ces différentes possibilités, une redondance adaptée au problème et exploitée à l'aide d'un opérateur spécifique semble être la meilleure solution en terme de neutralité synthétique. Une autre approche consiste, en fonction des caractéristiques du paysage neutre, à utiliser un algorithme évolutionnaire adapté. Le Netcrawler est adapté aux paysages ϵ -corrélés. L'Extrema Selection accélère la recherche lors d'une dérive aléatoire d'une population. Enfin la recherche périscopique réalise l'optimisation de l'évolvabilité sur un réseau de neutralité, c'est-à-dire de la fitness dans le voisinage du réseau.

La présence de neutralité dans un paysage de fitness est a priori un handicap pour un AE ; il est toutefois possible d'en tirer parti ou d'utiliser des algorithmes adaptés. Une analyse du paysage permet de connaître les avantages ou les difficultés induits par la neutralité. Plus l'analyse de la neutralité du paysage est précise, plus la pertinence d'un codage ou d'un AE pourra être jugé précisément. Notre compréhension des dynamiques dans les paysages neutres est encore trop partielle, peu de résultats prennent en compte le mode ou la vitesse de convergence, et les modèles servant à décrire les réseaux de neutralité sont également trop simples. Les travaux futurs devront proposer les propriétés géométriques pertinentes des paysages qui permettront d'approfondir nos connaissances sur cette caractéristique fondamentale.

5. Bibliographie

- [BAC 97] BACK T., HAMMEL U., SCHWEFEL H.-P., « Evolutionary computation : comments on the history and current state », *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 1, n° 1, 1997, p. 3–17.
- [BAR 98] BARNETT L., « Ruggedness and Neutrality - The NKp Family of Fitness Landscapes », ADAMI C., BELEW R. K., KITANO H., TAYLOR C., Eds., *ALIFE VI, Proceedings of the Sixth International Conference on Artificial Life*, ALIFE, The MIT Press, 1998, p. 18-27.
- [BAR 01] BARNETT L., « Netcrawling - Optimal Evolutionary Search with Neutral Networks », *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation CEC2001*, COEX, World Trade Center, 159 Samseong-dong, Gangnam-gu, Seoul, Korea, 27-30 2001, IEEE Press, p. 30–37.
- [BAR 03] BARNETT L., « Evolutionary Search on Fitness Landscapes with Neutral Networks », PhD thesis, University of Sussex, 2003.
- [BAS 03] BASTOLLA U., PORTO M., ROMAN H. E., VENDRUSCOLO M., « Statistical properties of neutral evolution », *Journal Molecular Evolution*, vol. 57, n° S, 2003, p. 103-119.
- [BOR 99] BORNBERG-BAUER E., CHAN H., « Modeling Evolutionary Landscapes : Mutational Stability, Topology and Superfunnels in Sequence Space », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA, track 2*, vol. 96, n° 19, 1999, p. 10689-10694.
- [CHA 00] CHAKRABORTI A., CHAKRABARTI B., « The travelling salesman problem on randomly diluted lattices : Results for small-size systems », *The European Physical Journal B*,

vol. 16, n° 4, 2000, p. 677-680.

- [COL 00] COLLARD P., CLERGUE M., PLATEL M. D., « Synthetic Neutrality for Artificial Evolution », *Artificial Evolution : Fourth European Conference AE'99*, Springer-Verlag, 2000, p. 254-265, Selected papers in Lecture Notes in Computer Sciences 1829.
- [COL 04] COLLARD P., VEREL S., CLERGUE M., « How to use the scuba diving metaphor to solve problem with neutrality ? », DE MANTARAS R. L., SAITTA L., Eds., *Proceedings of the 2004 European Conference on Artificial Intelligence (ECAI04)*, Valence, Spain, August 2004, IOS Press, p. 166-170.
- [Def 03] DEFOIN PLATEL M., VEREL S., CLERGUE M., COLLARD P., « From Royal Road to Epistatic Road for Variable Length Evolution Algorithm », LIARDET P., COLLET P., FONLUPT C., LUTTON E., SCHOENAUER M., Eds., *Evolution Artificielle, 6th International Conference*, vol. 2936 de *Lecture Notes in Computer Science*, Marseilles, France, 27-30 octobre 2003, Springer, p. 3-14, Revised Selected Papers.
- [DER 91] DERRIDA B., PELITI L., « Evolution in a flat fitness landscape », *Bull. Math. Biol.*, vol. 53, 1991, p. 355-382.
- [EBN 99] EBNER M., « On the Search Space of Genetic Programming and Its Relation to Nature's Search Space », ANGELINE P. J., MICHALEWICZ Z., SCHOENAUER M., YAO X., ZALZALA A., Eds., *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, vol. 2, Mayflower Hotel, Washington D.C., USA, 6-9 juillet 1999, IEEE Press, p. 1357-1361.
- [EBN 01] EBNER M., SHACKLETON M., SHIPMAN R., « How neutral networks influence evolvability », *Complex.*, vol. 7, n° 2, 2001, p. 19-33, John Wiley & Sons, Inc.
- [ELD 72] ELDRIDGE N., GOULD S. J., « Punctuated equilibria : An alternative to phyletic gradualism », SCHOPF T. J. M., Ed., *Models in Paleobiology*, p. 82-115, Freeman Cooper, San Francisco, 1972.
- [FON 93] FONTANA W., STADLER P. F., BORNBERG-BAUER E., GRIESMACHER T., HOFACKER I. L., TACKER M., TARAZONA P., WEINBERGER E., SCHUSTER P., « RNA folding and combinatorial landscapes », *Phys. Rev E*, vol. 47, 1993, p. 2083-2099.
- [GAR 97] GARCÍA-PELAYO R., STADLER P. F., « Correlation Length, Isotropy, and Metastable States », *Physica D*, vol. 107, 1997, p. 240-254, Santa Fe Institute Preprint 96-05-034.
- [GAR 02] GARNIER J., KALLEL L., « Efficiency of Local Search with Multiple Local Optima », *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 15, n° 1, 2002, p. 122-141.
- [GAS 99] GASPAR A., COLLARD P., « From GAs to Artificial Immune Systems : Improving Adaptation in Time Dependent Optimization », *CEC'99 : IEEE International Congress on Evolutionary Computation*, vol. 2, 1999, p. 1867-1874.
- [HAR 96] HARVEY I., THOMPSON A., « Through the Labyrinth Evolution Finds a Way : A Silicon Ridge », *ICES*, 1996, p. 406-422.
- [HUS 98] HUSBANDS P., « Evolving Robot Behaviours with Diffusing Gas Networks », *Proceedings of the First European Workshop on Evolutionary Robotics*, Springer-Verlag, 1998, p. 71-86.
- [HUY 96] HUYNEN M., « Exploring phenotype space through neutral evolution », *J. Mol. Evol.*, vol. 43, 1996, p. 165-169.
- [IZQ 04] IZQUIERDO-TORRES E., « The Role of Nearly Neutral Mutations in the Evolution of Dynamical Neural Networks », POLLACK J., ET AL, Eds., *Ninth International Conference of the Simulation and Synthesis of Living Systems (Alife 9)*, MIT Press, 2004, p. 322-327.

- [KAU 93] KAUFFMAN S. A., *The Origins of Order*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [KIM 83] KIMURA M., *The Neutral Theory of Molecular Evolution*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1983.
- [KNO 02] KNOWLES J. D., WATSON R. A., « On the Utility of Redundant Encodings in Mutation-Based Evolutionary Search. », *PPSN*, 2002, p. 88-98.
- [LAN 85] LANDE R., « Expected time for random genetic drift of a population between stable phenotypic states », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 82, 1985, p. 7641-7645.
- [LEV 99] LEVENICK J., « Swappers : Introns promote flexibility, diversity and invention. », BANZHAF W., DAIDA J., EIBEN A., GARZON M., HONAVAR V., M.JAKIELA, SMITH R., Eds., *Proceedings of the 1999 Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO'99*, vol. 1, San Francisco, California, 1999, Morgan Kaufmann Publisher, p. 361-368.
- [LOB 04] LOBO J., MILLER J. H., FONTANA W., « Neutrality in technology landscape », 2004.
- [MIL 00] MILLER J. F., THOMSON P., « Cartesian Genetic Programming », POLI R., BANZHAF W., LANGDON W. B., MILLER J. F., NORDIN P., FOGARTY T. C., Eds., *Genetic Programming, Proceedings of EuroGP'2000*, vol. 1802 de LNCS, Edinburgh, 15-16 avril 2000, Springer-Verlag, p. 121-132.
- [MIT 92] MITCHELL M., FORREST S., HOLLAND J. H., « The royal road for genetic algorithms : Fitness landscape and GA performance », VARELA F., BOURGINE P., Eds., *Proceedings of the First European Conference on Artificial Life*, Cambridge, MA, 1992, MIT Press/Bradford Books, p. 245-254.
- [NEW 85] NEWMAN C., COHEN J., KIPNIS C., « Neo-darwinian evolution implies punctuated equilibria », *Nature*, vol. 315, 1985, p. 400-401.
- [NEW 98] NEWMAN M., ENGELHARDT R., « Effect of neutral selection on the evolution of molecular species », *Proc. R. Soc. London B.*, vol. 256, 1998, p. 1333-1338.
- [NIM 99a] NIMWEGEN E. V., CRUTCHFIELD J. P., HUYNEN M., « Metastable Evolutionary Dynamics : Crossing Fitness Barriers or Escaping via Neutral Paths ? », rapport n° 99-07-041, 1999, SanteFe institute.
- [NIM 99b] NIMWEGEN E. V., CRUTCHFIELD J. P., HUYNEN M., « Neutral evolution of mutational robustness », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 96, 1999, p. 9716-9720.
- [NIM 01] NIMWEGEN E. V., CRUTCHFIELD J. P., « Optimizing Epochal Evolutionary Search : Population-Size Dependent Theory », *Mach. Learn.*, vol. 45, n° 1, 2001, p. 77-114, Kluwer Academic Publishers.
- [PAL 91] PALMER R., « Optimization on rugged landscapes », *Molecular Evolution on Rugged Landscapes : Proteins, RNA and the Immune System*, , 1991, p. 3-25, Addison-Wesley.
- [RAD 91] RADCLIFFE N. J., « Equivalence class analysis of genetic algorithm », *Complex System*, vol. 5, 1991, p. 183-205.
- [REI 01] REIDYS C. M., STADLER P. F., « Neutrality in fitness landscapes », *Applied Mathematics and Computation*, vol. 117, n° 2-3, 2001, p. 321-350.
- [ROT 03] ROTHLAUF F., GOLDBERG D. E., « Redundant representations in evolutionary computation », *Evol. Comput.*, vol. 11, n° 4, 2003, p. 381-415, MIT Press.

- [SCH 91] SCHAFFER J., ESHELMAN L., « On Crossover as an Evolutionary Viable Strategy », BELEW R., BOOKER L., Eds., *Proceedings of the 4th International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, 1991, p. 61-68.
- [SCH 94] SCHUSTER P., STADLER P. F., « Landscapes : Complex Optimization Problems and Biopolymer Structures. », *Computers & Chemistry*, vol. 18, n° 3, 1994, p. 295-324.
- [SEY 04] SEYS C. W., BEER R. D., « Evolving Walking : The anatomy of an evolutionary Search », SCHAAL S., IJSPEERT A., BILLARD A., VIJAYAKUMAR S., HALLAM J., MEYER J.-A., Eds., *Animals to Animats, Proceedings of the Eight international Conference on Simulation of Adaptive Behavior*, The MIT Press, 2004, p. 357-363.
- [SHA 00] SHACKLETON M., SHIPMAN R., EBNER M., « An investigation of redundant genotype-phenotype mapping and their role in evolutionary search », *Proceeding of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*, vol. 1, San Diego Marriott Hotel La Jolla, New York, 2000, IEEE Press, p. 493-500.
- [SMI 01a] SMITH T., HUSBANDS P., O'SHEA M., « Neutral Networks in an Evolutionary Robotics Search Space », *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation : CEC2001*, p. 136-145, IEEE, Korea, 2001.
- [SMI 01b] SMITH T., HUSBANDS P., O'SHEA M., « Not Measuring Evolvability : Initial Exploration of an Evolutionary Robotics Search Space », *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation : CEC2001*, p. 9-16, IEEE, Korea, 2001.
- [SMI 02] SMITH T., PHILIPPIDES A., HUSBANDS P., O'SHEA M., « Neutrality and Ruggedness in Robot Landscapes », *Congress on Evolutionary Computation : CEC2002*, IEEE Press, 2002, p. 1348-1353.
- [STA 92] STADLER P. F., SCHNABL W., « The landscape of the traveling salesman problem », *Phys. Letters*, vol. A, n° 161, 1992, p. 337-344.
- [STA 02] STADLER P. F., « Fitness Landscapes », LÄSSIG M., VALLERIANI, Eds., *Biological Evolution and Statistical Physics*, vol. 585 de *Lecture Notes Physics*, Heidelberg, 2002, Springer-Verlag, p. 187-207.
- [STE 01] STEWART T., « Extrema Selection : Accelerated Evolution on Neutral Networks », *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation CEC2001*, COEX, World Trade Center, 159 Samseong-dong, Gangnam-gu, Seoul, Korea, 27-30 May 2001, IEEE Press, p. 25-29.
- [THO 97] THOMPSON A., « An evolved circuit, intrinsic in silicon, entwined with physics », HIGUCHI T., IWATA M., LIU W., Eds., *Proceedings of The First International Conference on Evolvable Systems : From Biology to Hardware (ICES96)*, vol. 1259 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997, p. 390-405.
- [TOU 02] TOUSSAINT M., IGEL C., « Neutrality : A Necessity for Self-Adaptation », *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002)*, 2002, p. 1354-1359.
- [VAS 00] VASSILEV V. K., MILLER J. F., « The Advantages of Landscape Neutrality in Digital Circuit Evolution », *ICES*, 2000, p. 252-263.
- [VER 04] VEREL S., COLLARD P., CLERGUE M., « Scuba Search : when selection meets innovation », *Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation CEC2004*, Portland, Oregon, 19-23 June 2004, IEEE Press, p. 924-931.
- [WEI 90] WEINBERGER E. D., « Correlated and uncorrelated fitness landscapes and how to tell the difference », *Biological Cybernetics*, 1990, p. 63 :325-336.

- [WEI 91] WEINBERGER E. D., « Local properties of Kauffman's NK model, a tuneably rugged energy landscape », *Physical Review A*, vol. 44, n° 10, 1991, p. 6399-6413.
- [WIL 01] WILKE C. O., « Adaptive evolution on neutral networks », *Bull. Math. Biol.*, vol. 63, 2001, p. 715-730.
- [WRI 32] WRIGHT S., « The Roles of Mutation, Inbreeding, Crossbreeding, and Selection in Evolution », *Proceedings of the Sixth International Congress of Genetics I*, 1932, p. 356-366.
- [WRI 82] WRIGHT S., « Character change, speciation, and the higher taxa », *Evolution*, vol. 36, n° 3, 1982, p. 427-443.
- [YU 01] YU T., MILLER J. F., « Neutrality and the Evolvability of Boolean Function Landscape », *EuroGP '01 : Proceedings of the 4th European Conference on Genetic Programming*, Springer-Verlag, 2001, p. 204-217.
- [YU 02] YU T., MILLER J. F., « Finding Needles in Haystacks Is Not Hard with Neutrality. », *EuroGP*, 2002, p. 13-25.