



HAL
open science

La méthode de Neumann et Fredholm vue par le mathématicien et par le physicien

R. Balian

► **To cite this version:**

R. Balian. La méthode de Neumann et Fredholm vue par le mathématicien et par le physicien. Horowitz J., Lions J.-L. Les grands systèmes des sciences et de la technologie, Masson, 1994, RMA: Research Notes in Applied Mathematics. hal-00164129

HAL Id: hal-00164129

<https://hal.science/hal-00164129>

Submitted on 19 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La méthode de Neumann et Fredholm vue par le mathématicien et par le physicien

R. Balian

CEA/Saclay, Service de Physique Théorique
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

Après avoir rappelé la solution de Neumann et Fredholm au problème de Dirichlet (ou de Neumann) à l'aide d'un potentiel de double (ou de simple) couche, on montre comment des idées de physique conduisent à échanger les rôles des potentiels. L'existence des deux représentations équivalentes ainsi obtenues a des conséquences intéressantes, exemple parmi d'autres de l'utilité de confronter les approches souvent différentes du physicien ou du mathématicien.

ABSTRACT

After having recalled the solution given by Neumann and Fredholm to the problem of Dirichlet (or Neumann) in terms of a double-shell (or single-shell) potential, we show how ideas from physics compel us to interchange the rôles of the potentials. The existence of these two equivalent representations has interesting consequences, an example among others of the utility of comparing the often different approaches of physicists and mathematicians.

Partie d'un livre

Physique et mathématique se sont depuis toujours développées en symbiose. La première a souvent inspiré la seconde en posant des problèmes nouveaux, et la seconde s'est affirmée comme le langage privilégié de la première. Ainsi, en 1824, J.-B. Biot regrette, dans la préface de son *Précis élémentaire de physique expérimentale*, de devoir publier «un ouvrage où la physique est dépouillée de ce qui fait sa principale utilité et sa certitude, je veux dire les expressions et les méthodes mathématiques». Cependant, durant la majeure partie de notre siècle, les deux disciplines ont progressé de manière presque autonome, probablement en raison de la rapidité de leur croissance. Depuis une ou deux décennies, les échanges tendent à nouveau à se rétablir dans les deux sens entre la physique théorique et les mathématiques tant pures qu'appliquées, comme en témoignent plusieurs médailles Fields récentes. Dans ces conditions, s'interroger sur les spécificités de chacune peut aider à accélérer leur rapprochement et à le rendre plus fructueux.

Les communications sont souvent freinées par une différence instinctive d'attitude des chercheurs lorsqu'ils exposent leurs résultats, tant oralement que par écrit. Le mathématicien aime suivre une voie déductive, avançant linéairement et inexorablement des prémisses aux conclusions, qu'il souhaite aussi générales que possible. Au risque de cacher ses motivations, il cherche à éliminer toutes les scories, fausses pistes, idées qualitatives, et s'attarde peu sur les exemples. A ce portrait (poussé à la caricature) s'oppose celui du physicien type, qui procède par induction, partant de cas particuliers simples, annonçant à l'avance les résultats qu'il escompte, sans craindre de zigzaguer ni de révéler ses états d'âme. Il pousse parfois la coquetterie jusqu'à masquer ce que son travail a de rigoureux. La présente note sera bien entendu rédigée dans un tel esprit.

Nous allons examiner une question déjà ancienne de physique mathématique et montrer comment la confrontation des deux points de vue peut encore actuellement aider à y progresser. Il s'agit de la méthode de Neumann et Fredholm, qui permet de transformer une équation d'onde avec conditions aux limites en équation intégrale puis en développement en série. Pour fixer les idées, nous considérons un *problème de Dirichlet intérieur* pour l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)\varphi(r) = 0, \quad (1)$$

où la variable r est située dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^3 ; le bord Γ de Ω est supposé régulier, de classe \mathcal{C}^2 . On cherche la fonction de Green $G(r, r')$ correspondante, qui satisfait pour $r \in \Omega$ à

$$(\Delta + k^2)G(r, r') = -\delta^3(r - r'), \quad (2)$$

et qui s'annule lorsque r tend vers Γ . En notant s ou $t \in \Gamma$ les points de la frontière et $s + 0$ les points intérieurs à Ω voisins de s , on impose donc

$$G(s + 0, r') = 0. \quad (3)$$

Afin de simplifier la discussion, nous prenons k complexe et supposons $\text{Im } k > 0$, ce qui assure l'unicité de la solution de (2), (3). En effet, pour toute

solution φ de l'équation homogène (1) dans $\bar{\Omega}$, on a

$$\begin{aligned} \int d^2s \bar{\varphi}(s) \frac{d\varphi(s)}{dn(s)} &= - \int d^3r \operatorname{div} [\bar{\varphi}(r) \nabla \varphi(r)] \\ &= \int d^3r [k^2 |\varphi(r)|^2 - |\nabla \varphi(r)|^2] ; \end{aligned} \quad (4)$$

ici et dans la suite, nous désignons par $\int d^2s$ une intégration sur la surface Γ , par $\int d^3r$ une intégration sur Ω , et par $d/dn(s)$ une dérivation dans la direction de la normale à Γ au point s orientée vers l'intérieur de Ω . Si φ (ou si sa dérivée normale) s'annule sur Γ , il résulte de (4) que

$$\int d^3r |\nabla \varphi(r)|^2 = k^2 \int d^3r |\varphi(r)|^2, \quad (5)$$

condition qui implique l'annulation de φ dans Ω si $\operatorname{Im} k > 0$.

En l'absence de frontière, pour $\Omega = \mathbb{R}^3$, la solution serait donnée par

$$G_0(r - r') = \frac{1}{4\pi|r - r'|} \exp ik|r - r'|. \quad (6)$$

Par analogie avec l'électrostatique, G_0 s'interprète comme un potentiel créé dans le vide au point r par une source ponctuelle située au point r' . Une distribution surfacique de sources caractérisée par la densité $\mu(t)$ sur la frontière Γ crée alors au point r le *potentiel de simple couche*

$$V_\mu(r) \equiv \int d^2t G_0(r - t) \mu(t). \quad (7)$$

De même, une *double couche*, localisée sur la surface Γ , de densité $\nu(t)$, crée le potentiel

$$W_\nu(r) = \int d^2t \frac{dG_0(r - t)}{dn(t)} \nu(t). \quad (8)$$

Carl Neumann en 1870, puis Ivar Fredholm de manière plus efficace en 1900 sont partis de la remarque suivante. Le potentiel de double couche défini dans \mathbb{R}^3 par (8) est discontinu à travers Γ ; sa limite pour $r = s + 0$ diffère de la valeur que l'on obtient en fixant r en s , et cette discontinuité a pour valeur

$$W_\nu(s + 0) - W_\nu(s) = \frac{1}{2} \nu(s). \quad (9)$$

Ils ont alors cherché à construire G sous la forme

$$G(r, r') = G_0(r - r') + W_\nu(r), \quad (10)$$

où la densité $\nu(s)$ de *double couche*, qui dépend de la position de r' , reste à déterminer. Compte tenu de (3) et (10), on doit avoir

$$W_\nu(s + 0) = -G_0(s - r'), \quad (11)$$

et par suite, en utilisant (8) et (9),

$$\nu(s) = -2G_0(s - r') - 2 \int d^2t \frac{dG_0(s - t)}{dn(t)} \nu(t) . \quad (12)$$

Le problème de Dirichlet intérieur au volume Ω a ainsi été ramené à la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce (12) sur la surface Γ . On montre ensuite aisément pour $\text{Im } k > 0$ que cette équation admet une solution unique, et que celle-ci peut (au moins pour $\text{Re } k^2 < 0$) s'obtenir par itération sous forme d'une série convergente. Les équations (10), (8) et (12) conduisent ainsi à représenter G par le développement

$$\begin{aligned} G(r, r') &= G_0(r - r') - 2 \int d^2s \frac{dG_0(r - s)}{dn(s)} G_0(s - r') \\ &+ 4 \int d^2s d^2t \frac{dG_0(r - s)}{dn(s)} \frac{dG_0(s - t)}{dn(t)} G_0(t - r') - \dots . \end{aligned} \quad (13)$$

Le premier terme décrit une propagation directe de l'onde de r' à r comme si la frontière était absente, le deuxième s'interprète comme une diffusion sur Γ au point s , précédée et suivie d'une propagation libre, et les termes suivants sont associés à des processus de *diffusions multiples* successives.

La méthode s'étend aisément à d'autres questions apparentées. Pour résoudre le *problème de Dirichlet extérieur*, où r et r' sont dans la région Ω' extérieure à la surface Γ , et où $G(s - 0, r') = 0$ s'annule à la limite où $r \in \Omega'$ tend vers Γ , il suffit de chercher pour G la même représentation (10), (8) que ci-dessus, et d'utiliser la discontinuité

$$W_\nu(s - 0) - W_\nu(s) = -\frac{1}{2}\nu(s) \quad (14)$$

du potentiel de double couche lorsqu'on passe de s au point infiniment voisin $s - 0$ à l'extérieur de Γ ; ceci conduit à

$$G(r, r') = G_0(r - r') + 2 \int d^2s \frac{dG_0(r - s)}{dn(s)} G_0(s - r') + \dots, \quad (15)$$

résultat analogue à (13) au changement de signe de $n(s)$ près. Pour le *problème de Neumann* intérieur, où la fonction de Green $G(r, r')$ doit satisfaire à l'équation (2) et à la condition aux limites

$$\frac{dG(s + 0, r')}{dn(s)} = 0, \quad (16)$$

Neumann et Fredholm ont cherché une représentation de la forme

$$G(r, r') = G_0(r - r') + V_\mu(r), \quad (17)$$

faisant intervenir un potentiel de *simple couche* (7). Celui-ci, continu à la traversée de Γ , a une dérivée normale définie de part et d'autre de Γ ainsi que sur Γ lui-même, mais discontinue et satisfaisant à

$$\frac{dV_\mu(s \pm 0)}{dn(s)} - \frac{dV_\mu(s)}{dn(s)} = \mp \frac{1}{2}\mu(s). \quad (18)$$

La combinaison de (7), (16), (17) et (18) fournit l'équation intégrale de Fredholm pour la densité de simple couche

$$\mu(s) = 2 \frac{dG_0(s - r')}{dn(s)} + 2 \int d^2t \frac{dG_0(s - t)}{dn(s)} \mu(t). \quad (19)$$

Le développement en diffusions multiples pour la fonction de Green en résulte, sous la forme

$$G(r, r') = G_0(r - r') + 2 \int d^2s G_0(r - s) \frac{dG_0(s - r')}{dn(s)} + \dots \quad (20)$$

Pour le problème de Neumann extérieur, $n(s)$ est changé en $-n(s)$ dans toutes les formules.

C'est l'approche esquissée ci-dessus qui figure dans la plupart des ouvrages de base. A la fois rigoureuse et (au moins à première vue) intuitive, elle garde la marque du va-et-vient entre physique et mathématique qui a fécondé la théorie des équations aux dérivées partielles au long du XIX^{ème} siècle. C'est pourquoi elle a été fidèlement reproduite, sans discussion, depuis cette époque. Pourtant, après réflexion, le physicien se sent quelque peu surpris par certains aspects des résultats. Il constate d'abord que les séries (13), (15) ou (20), malgré une interprétation naturelle en termes de diffusions multiples, ne mettent pas en évidence la symétrie de $G(r, r')$ dans l'échange des deux points r et r' . Ensuite, s'il s'interroge sur la signification physique de G , il ne peut manquer d'examiner son comportement non seulement dans $r \in \Omega$ mais aussi lorsque r décrit l'espace tout entier. Par exemple, l'électrostatique en présence de conducteurs fait intervenir, hors de ceux-ci, l'équation de Laplace pour le potentiel, c'est-à-dire l'éq. (1) avec $k = 0$. Selon la formule de Poisson, une charge ponctuelle égale à 1 (dans des unités où $\varepsilon_0 = 1$) placée en r' se traduit par la singularité du second membre de (2). Lorsque cette charge est entourée d'une couche mince conductrice fermée Γ , maintenue à un potentiel nul, la situation est modélisée à l'intérieur de Γ par le problème de Dirichlet (2), (3). Le potentiel électrostatique est donc fourni pour $r \in \Omega$ par (13). Cependant, on doit aussi se demander ce qui se passe à l'extérieur de l'enceinte, lorsque la source reste fixée en r' à l'intérieur. La réponse est évidente; le potentiel étant continu à la traversée de Γ , on a $G(s - 0, r') = 0$, et la solution (unique) de (2) pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$ est simplement $G(r, r') = 0$. La signification physique de ce résultat est bien connue: une paroi conductrice fermée joue le rôle d'*écran* parfait. On retrouve ces mêmes caractéristiques pour d'autres phénomènes, où $G(r, r')$ représente la valeur en r d'un potentiel, d'une onde ou d'un champ, créé par une source située en $r' \in \Omega$, en présence d'une paroi mince servant de cage ou arrêtant l'onde. En pareil cas, on s'attend à ce que la source soit sans effet à l'extérieur de Γ .

Or, si la solution (10) ou (13) de Neumann et Fredholm au problème de Dirichlet intérieur fournit la bonne réponse pour $r \in \Omega$, elle n'a pas de *signification physique ailleurs*. Considérons en effet le prolongement de la série (13) vers la région $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$, où elle converge encore pour $\text{Im } k > 0$.

Etant donné que le potentiel de double couche (8) présente à la traversée de Γ la discontinuité (9), (14), l'expression (10) ou (13) pour $G(r, r')$ se prolonge à l'extérieur par une fonction satisfaisant à

$$G(s - 0, r') = -\nu(s) \quad , \quad r' \in \Omega. \quad (21)$$

Elle n'est donc pas nulle pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$, puisque c'est la solution d'un problème de Dirichlet extérieur avec la condition aux limites (21). On aurait d'ailleurs dû suspecter cette pathologie dès le départ. Dans l'exemple de l'électrostatique, la présence d'une couche mince conductrice Γ reliée à une terre impose l'annulation du potentiel non seulement juste à l'intérieur selon (3) mais aussi juste à l'extérieur, en contradiction avec (21). Plus précisément, le potentiel électrostatique doit être continu à la traversée du conducteur, contrairement au potentiel de double couche utilisé dans (10). Celui-ci décrirait l'effet d'une densité $\nu(s)$ de *dipôles* qui seraient induits dans la paroi Γ par la charge source située en r' , alors qu'en réalité cette source induit sur la feuille conductrice une densité de *charges*. La physique nous impose donc d'introduire, afin de décrire le potentiel électrique dans tout l'espace, une *simple couche* (7) sur Γ et non une double couche. La densité $\mu(s)$ s'interprète comme la densité surfacique des charges induites ; l'équation (18) représente la discontinuité du champ électrique à travers la paroi Γ chargée.

Nous sommes ainsi amenés pour des raisons de physique à nous poser un problème mathématique un peu plus général que le problème de Dirichlet intérieur (2), (3) initial : construire *dans* \mathbb{R}^3 la solution de (2), *continue* et satisfaisant sur Γ à la condition $G(s, r') = 0$. Pour ce faire, il nous faut chercher pour $G(r, r')$ dans $r \in \mathbb{R}^3$, $r' \in \Omega$ une représentation de la forme (17), où la densité de *simple couche* $\mu(s)$ aura une interprétation physique [1], contrairement à la densité de double couche $\nu(s)$ de la solution (10) de Neumann et Fredholm dans $r \in \Omega$, $r' \in \Omega$. Afin de déterminer $\mu(s)$, nous notons que G doit s'annuler $\forall r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$, ce qui implique

$$\frac{dG(s - 0, r')}{dn(s)} = 0, \quad r' \in \Omega. \quad (22)$$

(En électrostatique, (22) exprime la nullité de la composante normale du champ à l'extérieur de la paroi.) En utilisant (17), (22) et la discontinuité (18) de la dérivée normale de V_μ entre $s - 0$ et s , nous obtenons encore pour μ une équation de Fredholm sur Γ :

$$\mu(s) = -2 \frac{dG_0(s - r')}{dn(s)} - 2 \int d^2t \frac{dG_0(s - t)}{dn(s)} \mu(t). \quad (23)$$

Un nouveau développement en diffusions multiples de G s'en déduit

$$G(r, r') = G_0(r - r') - 2 \int d^2s \ G_0(r - s) \frac{dG_0(s - r')}{dn(s)} + \dots, \quad (24)$$

pour $r' \in \Omega$ et r arbitraire. Pour $r' \in \Omega'$, le signe de $n(s)$ est changé.

Faire varier r dans tout l'espace conduit également à une seconde solution au problème de Neumann intérieur. Le résultat (20) de Neumann et Fredholm, prolongé hors du domaine original, définissait pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$ une fonction non nulle, puisque c'était pour r quelconque la solution de (2), (16) continue à la traversée de Γ ; selon (18), la dérivée normale de cette fonction au point $r = s - 0$ vaut $\mu(s)$. Il est préférable d'admettre, pour effectuer le prolongement vers $r \in \Omega'$, que la paroi Γ a de part et d'autre le même effet : elle doit imposer à la fonction d'avoir une dérivée normale nulle, non seulement du côté intérieur où se trouve r' mais aussi vers l'extérieur. Il convient alors de rechercher pour la fonction de Green dans tout l'espace une représentation (10) en termes d'un potentiel de *double couche*, et non de simple couche comme dans la méthode de Neumann et Fredholm. La condition d'annulation de la dérivée normale pour $r = s - 0$ implique que $G(r, r')$ s'annule $\forall r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$. De $G(s - 0, r') = 0$ et de (10) et (14), on tire une équation de Fredholm pour la densité de double couche,

$$\nu(s) = 2G_0(s - r') + 2 \int d^2t \frac{dG_0(s - t)}{dn(t)} \nu(t). \quad (25)$$

On en déduit, pour la fonction de Green du problème de Neumann intérieur, une seconde représentation sous forme de série en diffusions multiples:

$$G(r, r') = G_0(r - r') + 2 \int d^2s \frac{dG_0(s - t)}{dn(s)} G_0(s - r') + \dots \quad (26)$$

La même idée s'étend à l'électromagnétisme [2], où (23) et (25) sont remplacés par une équation intégrale pour les courants de surface induits par les ondes électromagnétiques dans les conducteurs. A la dualité entre problèmes de Dirichlet et de Neumann correspond une certaine symétrie par échange des champs magnétique et électrique.

L'existence de *deux solutions distinctes* quoique similaires au problème de Dirichlet (ou de Neumann), celle "du mathématicien" et celle "du physicien", a d'intéressantes conséquences. Bien que les termes successifs des séries (13) et (24) diffèrent, les sommes de ces séries coïncident pour $r \in \Omega$, $r' \in \Omega$; cette identité met en évidence la symétrie de la fonction de Green du problème de Dirichlet intérieur dans l'échange de r et r' . De même, l'égalité de (20) et (26) pour $r \in \Omega$, $r' \in \Omega$ exprime la symétrie de la fonction de Green du problème de Neumann intérieur. Cependant, pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$, les valeurs de (13) et (24) diffèrent : la première prolonge la fonction de Green du problème de Dirichlet intérieur de telle sorte que la dérivée normale soit continue à la traversée de Γ , la seconde, qui est nulle, la prolonge de telle sorte que la fonction elle-même soit continue. Parallèlement, (20) se prolonge de manière continue à travers Γ , alors que (26) saute à 0 pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$. Une autre symétrie est aussi mise en évidence, celle entre problèmes de Dirichlet et de Neumann : lorsque $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega'$, les séries (13) ou (24) représentent la fonction de Green du problème de Neumann extérieur, les séries (20) ou (26) celle du problème de Dirichlet extérieur. Les

expressions (13) et (20) s'annulent pour $r \in \Omega$, $r' \in \Omega'$, même propriété que l'annulation de (24) et (26) pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$.

La comparaison des deux méthodes utilisées ci-dessus peut aider à comprendre intuitivement cette dualité. Par exemple, les développements (15) et (26), formellement identiques, représentent respectivement la fonction de Green du problème de Dirichlet extérieur et celle du problème de Neumann intérieur. Obtenus tous deux à l'aide d'un potentiel de double couche, ils ne diffèrent que par la position de la source, en $r' \in \Omega$ ou en $r' \in \Omega'$. Or, afin d'établir le premier, nous avons utilisé la condition aux limites de Dirichlet elle-même, $G(s-0, r') = 0$, $r' \in \Omega$; afin d'établir le second, nous avons imposé la continuité de la dérivée normale à la traversée de Γ , ce qui revient à prolonger la fonction de Green par 0 à l'intérieur, puis utilisé $G(s-0, r') = 0$, $r' \in \Omega'$. C'est donc la même condition aux limites qui est en définitive apparue dans les deux cas. De même, la solution (24) du problème de Dirichlet intérieur a été trouvée à l'aide de la condition (22) portant sur la dérivée normale à l'extérieur de Γ .

Nous venons de montrer comment les représentations (24) ou (26) des fonctions de Green découlaient directement d'un raisonnement de physicien. Compte tenu de l'ancienneté du sujet, il n'est pas surprenant que des mathématiciens aient eux aussi proposé l'emploi de potentiels de simple couche pour le problème de Dirichlet, de double couche pour le problème de Neumann [3]. Leur préoccupation majeure était l'existence, l'unicité et la convergence des solutions de l'équation de Helmholtz *pour k réel*, et il est remarquable que des progrès aient pu être faits en ce domaine grâce à la synthèse entre les deux attaques. La difficulté était la suivante : le déterminant de Fredholm de l'équation intégrale qui détermine le potentiel de simple couche pour le problème de Neumann extérieur, par exemple, s'annule lorsque k est valeur propre du problème de Dirichlet intérieur (1) avec $\varphi(s) = 0$. L'innocuité de cette singularité se démontre à l'aide d'une technique qui équivaut à utiliser le potentiel de double couche. Ici encore, des idées de physique éclairent ce résultat : prolonger la solution du problème de Neumann extérieur par 0 pour $r \in \Omega$ garantit en effet que la source placée en $r' \in \Omega'$ n'excite jamais aucun mode intérieur, même s'il en existe à la fréquence considérée.

Cependant, ces travaux mathématiques sont relativement récents, et la plupart des traités se bornent à exposer la méthode originale de Neumann et Fredholm. A ma connaissance, la seule exception est l'ouvrage de Dautray et Lions [4], où les deux approches ont été introduites à la suite de conversations avec le premier.

Comment se fait-il donc que la possibilité d'échanger les rôles des potentiels de simple et double couche soit autant méconnue ? C'est probablement parce qu'une idée naturelle pour le physicien ne l'est pas forcément pour le mathématicien. Pour établir l'équation (23) qui détermine la densité de simple couche $\mu(s)$, nous avons dû sortir du domaine Ω dans lequel le problème était initialement posé et prendre r arbitraire, question physique intéressante mais artifice mathématique. Au contraire, l'équation (12) pour le potentiel de double couche $\nu(s)$ s'obtenait directement à partir de la condition aux limites (3). On peut aussi trouver une autre raison, moins superficielle. Afin

d'écrire la condition aux limites (22), nous avons noté que $G(r, r')$ devait être nul pour $r \in \Omega'$, $r' \in \Omega$. Ce faisant, nous avons implicitement admis que la solution continue dans $r \in \mathbb{R}^3$ de (2), (3) était *unique*. Une telle hypothèse est familière au physicien : lorsqu'il aborde un phénomène, il est prêt à supposer (parfois à tort !) que les équations qui le régissent admettent une solution et une seule, celle réalisée dans la nature. C'est donc grâce à une *induction* que nous avons trouvé la seconde manière de résoudre le problème de Dirichlet. Le mathématicien ne peut qu'être gêné par cette induction, puisque l'un de ses buts est précisément d'établir l'unicité de la solution. Notre raisonnement a pourtant été rigoureux, car nous avons imposé $\text{Im } k > 0$, ce qui grâce à (5) justifiait notre inférence ; les livres de mathématique étudient en général l'équation de Laplace (où $k = 0$) ou l'équation de Helmholtz proprement dite (où k est réel), auxquels cas l'existence, l'unicité et la convergence des solutions ne sont pas garanties.

Cette remarque sur l'introduction d'une variable k complexe illustre une autre différence d'attitude entre mathématiciens et physiciens. Pour ceux-ci, la considération de modèles ou de cas aussi simples que possible passe souvent avant les soucis de cohérence et de généralité. C'est pourquoi ils ont par exemple coutume de rendre complexes des variables a priori réelles, afin d'esquiver certaines difficultés ou de tirer parti de propriétés d'analyticité. Ainsi avons nous ci-dessus trouvé utile d'attribuer une partie imaginaire à k . Une autre manière de bénéficier de l'emploi de variables complexes a été introduite dans le même problème [1,5]. A l'aide de représentations du type (13) pour les fonctions de Green de problèmes d'ondes, on construit aisément des développements asymptotiques en $1/|k|$, utiles à la limite des courtes longueurs d'onde ; ces développements font intervenir les trajectoires classiques du problème, ou en optique les rayons lumineux. Cependant, une transformation de Laplace par rapport à k (ou en mécanique ondulatoire par rapport à $1/\hbar$, traité comme une variable complexe) donne naissance, si l'on se limite à des frontières Γ non seulement régulières de classe \mathcal{C}^2 mais analytiques (ou à des potentiels analytiques), à une relation nouvelle entre ondes et trajectoires : ces dernières apparaissent comme les singularités des transformées des fonctions d'onde. Naturellement, ce résultat, bien qu'issu d'un raisonnement (assez grossier) de physicien, n'a pas d'interprétation physique puisqu'il fait intervenir des trajectoires dans un espace-temps dont les coordonnées seraient des variables complexes. Il a cependant des applications pratiques, puisqu'il permet de mieux comprendre l'effet tunnel ou encore de calculer avec précision des propriétés ondulatoires en manipulant simplement des trajectoires classiques [6]. La même idée est à la base de travaux mathématiques récents [7].

Les théories semi-classiques élaborées auxquelles nous venons de faire allusion tirent parti d'encore une autre disparité de points de vue. Pour le mathématicien, un développement asymptotique pour x grand,

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^N C_n x^n, \quad (27)$$

n'a de sens qu'à la limite où $x \rightarrow \infty$ à N fixé : la différence entre premier et second membres divisée par x^N tend vers 0. Le physicien, lui,

s'intéresse en général au calcul de $f(x)$ pour x grand mais fixé par la nature ou par les conditions de l'expérience. Il cherche donc à extraire de (27) une information aussi précise que possible sur $f(x)$, et pour cela ajuste par exemple le nombre N de termes en sorte que le dernier terme retenu $C_N x^N$ soit minimal. Dans ces conditions, la rigueur est perdue, l'erreur mal contrôlée. Mais l'analyticité de $f(x)$ peut permettre d'obtenir des renseignements supplémentaires précieux, en particulier à l'aide du comportement de C_N pour N grand. Des corrections exponentielles, en e^{-ax} , peuvent par exemple devenir pertinentes: bien que de tels termes n'aient pas de signification dans la théorie des développements asymptotiques, rien ne les empêche de fournir à $f(x)$ une contribution contrôlable et significative, plus grande que le dernier terme $C_N x^N$ de (27) lorsque x est grand mais fixé [8]. Cette remarque, qui était déjà en germe lorsqu'Airy introduisit les séries asymptotiques bien avant qu'elles n'aient reçu leur définition rigoureuse, a donné naissance à de nombreux travaux tant en physique théorique qu'en mathématique. C'est un nouvel exemple de ce que la confrontation entre démarches différentes peut apporter à nos deux disciplines.

Références

- [1] R. BALIAN and C. BLOCH, *Ann. Phys.* **60** (1970) 401–447 ; **69** (1972) 76–160.
- [2] R. BALIAN and B. DUPLANTIER, *Ann. Phys.* **104** (1977) 300–335.
- [3] R.E. KLEINMAN and G.F. ROACH, *SIAM Rev.* **16** (1974) 214–236 ; voir aussi la bibliographie donnée dans cet article.
- [4] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tome I (Masson, Paris, 1984) pages 445–452.
- [5] R. BALIAN and C. BLOCH, *Ann. Phys.* **85** (1974) 514–545.
- [6] A. VOROS, *Ann. Inst. H. Poincaré* **A39** (1983) 211–338.
- [7] J. CHAZARAIN, *Invent. Math.* **24** (1974) 65 ; J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes* (Publ. Math. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1981) ; *Cinq applications des fonctions résurgentes* (ibid, 1984), Chap.1 ; B. CANDELPERGER, J.-C. NOSMAS et F. PHAM, *Approche de la résurgence* (Hermann, Paris, 1993).
- [8] R. BALIAN, G. PARISI and A. VOROS, *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 1141–1144.