



**HAL**  
open science

## Points singuliers normaux

Jean-Pierre Dax

► **To cite this version:**

| Jean-Pierre Dax. Points singuliers normaux. 2007. hal-00162276

**HAL Id: hal-00162276**

**<https://hal.science/hal-00162276>**

Preprint submitted on 13 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Points singuliers normaux

Dax Jean-Pierre<sup>\*†‡</sup>

24 Juin 2007

SOMMAIRE. L'auteur étudie les singularités d'une application différentiable  $f$  entre variétés différentielles, soumise à la contrainte  $f(A) \subset B$  où  $A$  et  $B$  sont deux sous-variétés différentielles. L'auteur dégage une notion nouvelle, celle de point singulier normal; il étudie plus particulièrement les points singuliers normaux simples; il en donne une définition intrinsèque ainsi qu'une forme réduite en coordonnées locales. L'auteur donne également un modèle d'élimination de points singuliers normaux simples.

SUMMARY. The author studies the singularities of a differential mapping  $f$  between differential manifolds with the constraint  $f(A) \subset B$  where  $A$  and  $B$  are two differential submanifolds. The author introduces a new notion : that of a normal singular point. In particular he studies some of these points that he calls simple normal singular points. He gives for them an intrinsic definition and a reduced form in local coordinates. The author gives also a model for the elimination of simple normal singular points.

## Introduction

On considère deux paires de variétés différentielles de classe  $C^\infty$ ,  $(X, A)$  et  $(Y, B)$ . On suppose que  $X$  est compacte et que  $A$  et  $B$  sont des sous-variétés fermées. On note  $m, n, p, q$  les dimensions respectives de  $X, Y, A, B$ . On note  $r = m - p$  et  $s = n - q$ .

On considère une application différentiable de la paire  $(X, A)$  dans la paire  $(Y, B)$ ; on entend par là une application différentiable

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{telle que} \quad f(A) \subset B.$$

On introduit au §1 la notion de **rang normal de  $f$  au point  $a \in A$** , noté  $\text{rgn}_a f$  (cf. Déf 1.1). On dit que le point  $a \in A$  est **un point régulier normal de  $f$**  si  $\text{rgn}_a f =$

---

\*DAX Jean-Pierre, Professeur de Mathématiques à l'Université Paul Verlaine de Metz

†Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz, Unité Mixte de Recherche n° 7122 du CNRS

‡UFR MIM, Département de Mathématiques, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 1, France

$\inf(r, s)$ , un **point singulier normal** de  $f$  si  $\text{rgn}_a f < \inf(r, s)$ . On étudie dans ce papier ces points d'un point de vue local et d'un point de vue global. On exhibe notamment des formes réduites en coordonnées locales de certains points réguliers normaux et de certains points singuliers normaux.

Au ¶2 on considère deux sortes de **points réguliers normaux**.

On considère d'abord les points réguliers normaux satisfaisant à  $\text{rgn}_a f = r$ ,  $\text{rg}_a f = m$ . On prouve qu'au voisinage d'un tel point,  $f$  peut s'écrire en coordonnées locales sous la forme (cf. Prop 2.1)

$$f(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0; v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0) \quad \text{avec } p \leq q, r \leq s.$$

On considère également les points réguliers normaux satisfaisant à  $\text{rgn}_a f = s$ ,  $\text{rg}_a f|_A = q$ . On prouve qu'au voisinage d'un tel point,  $f$  peut s'écrire en coordonnées locales sous la forme (cf. Prop 2.2)

$$f(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) = (u_1, \dots, u_q; v_1, \dots, v_s) \quad \text{avec } q \leq p, s \leq r.$$

Au ¶3 on introduit la notion de **points singuliers normaux simples**. Un point singulier normal  $a \in A$  de  $f$  est dit semi-simple (cf. Déf 3.1) si  $\text{rgn}_a f = r - 1$  et si la première dérivée normale (cf. Déf 1.4) de  $f$  est transversale au point  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux (cf. Déf 1.3) de rang  $r - 1$ . Un point singulier normal  $a \in A$  de  $f$  est dit simple (cf. Déf 3.2) s'il est semi-simple et si l'on a  $\text{rg}_a f = m$ . Ces conditions impliquent  $r \leq s$  (cf. Déf 3.1),  $p \leq q - 1$  (cf. Déf 3.2) et  $s \leq m - 1$  (cf. Prop 3.1).

On prouve qu'au voisinage d'un point singulier normal simple,  $f$  peut s'écrire en coordonnées locales sous la forme (cf. Prop 3.3)

$$f(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, u_1 v_1, \dots, u_{s-r+1} v_1).$$

On introduit aussi au ¶3 la notion d'**application simple**. On dit qu'une application  $f$  est semi-simple (cf. Déf 3.3) si  $r \leq s$ , si tous ses points singuliers normaux sont semi-simples et si  $f|_{X \setminus A}$  est transversale à  $B$ . On prouve alors (cf. Prop 3.2) que  $D = \overline{f^{-1}(B)} \setminus A$  est une sous-variété compacte de  $X$  et que  $S = D \cap A$  est une sous-variété compacte de codimension 1 de  $D$ . On dit qu'une application  $f$  est simple (cf. Déf 3.4) si elle est semi-simple, si tous ses points singuliers normaux sont simples et si la restriction de  $f$  à  $D$  est un plongement.

Au ¶4 on introduit la notion de **point singulier normal non dégénéré d'une fonction**

$$f : (X, A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \{b\}).$$

C'est un point singulier normal  $a \in A$  tel que la première dérivée normale  $f'_v$  soit transversale en  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux de rang 0. On prouve (cf. Prop 4.2) qu'en un tel point  $f$  peut s'écrire en coordonnées locales sous la forme

$$f(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) = b + \sum_{i=1}^r u_i v_i \quad \text{avec } r \leq p.$$

Dans les ¶5 et ¶6 on introduit les notions **d'applications correctes et d'applications excellentes**. Ces notions sont génériques (cf. Prop 5.3 et 6.3) et ont des liens avec certaines singularités normales (cf. Prop 1.4). Les applications semi-simples sont toujours excellentes.

Au ¶7 on exhibe **des modèles de déformation d'applications simples entre paires de variétés**. Ces modèles permettent de déformer une application simple

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

en une application  $g$  sans point singulier normal et satisfaisant à  $g(X \setminus A) \cap B = \emptyset$ . Un cas élémentaire d'un tel modèle est donné dans l'exemple 7.2, illustré par les figures 1,2 et 3, aux commentaires desquelles on pourra se reporter.

## 1 Généralités sur les points singuliers normaux

On considère une application différentiable  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ .

NOTATIONS 1.1.— On note  $\tau_A X$  la restriction à  $A$  du fibré tangent à  $X$  noté  $\tau X$ . On note de même  $\tau_B Y$  la restriction à  $B$  du fibré tangent à  $Y$  noté  $\tau Y$ .

Si  $\xi$  est un fibré vectoriel réel, on note  $E(\xi)$  l'espace total de ce fibré; on note  $\dot{E}(\xi)$  le complémentaire de la section nulle dans  $E(\xi)$ .

Si  $\xi$  est un fibré vectoriel euclidien, on note  $B(\xi)$  le fibré en boules unités fermées associé à  $\xi$ ; on note  $S(\xi)$  le fibré en sphères unités associé à  $\xi$ .

DÉFINITION 1.1.— On appelle **rang normal de  $f$  au point  $a \in A$**  le rang au-dessus du point  $a$  de l'application fibrée

$$f_A : E(\tau_A X / \tau A) \longrightarrow E(\tau_B Y / \tau B)$$

obtenue par passage au quotient de la restriction à  $A$  de l'application linéaire tangente  $f_*$ .

On notera  $\text{rgn}_a(f)$  ce rang et  $\text{rg}_a(f)$  le rang de  $f$  au point  $a$ .

DÉFINITION 1.2.— On dit qu'un point  $a \in A$  est un **point singulier normal** de l'application  $f$  si l'on a

$$\text{rgn}_a(f) < \inf(r, s) .$$

Sinon on dit que le point  $a \in A$  est un **point régulier normal** de l'application  $f$ .

DÉFINITION 1.3.— On appelle **1-jet normal** de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  un élément de la variété

$$JN^1(X, A; Y, B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} \mathcal{L}(\tau_x X / \tau_x A, \tau_y Y / \tau_y B)$$

où  $\mathcal{L}(\tau_x X / \tau_x A, \tau_y Y / \tau_y B)$  désigne l'espace des applications linéaires de  $\tau_x X / \tau_x A$  dans  $\tau_y Y / \tau_y B$ .

DÉFINITION 1.4.— On appelle **première dérivée normale de  $f$**  l'application

$$f_\nu^1 : A \longrightarrow JN^1(X, A; Y, B)$$

qui à  $x \in A$  associe l'application linéaire  $f_{A,x}$  obtenue par passage au quotient de l'application linéaire tangente à  $f$  au point  $x$ .

DÉFINITION 1.5.— On appelle **1-jet** de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  un élément de la variété

$$J^1(X, A; Y, B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} \mathcal{L}(\tau_x X, \tau_x A; \tau_y Y, \tau_y B)$$

où  $\mathcal{L}(\tau_x X, \tau_x A; \tau_y Y, \tau_y B)$  désigne l'espace des applications linéaires  $\varphi$  de  $\tau_x X$  dans  $\tau_y Y$  telles que  $\varphi(\tau_x A) \subset \tau_y B$ .

DÉFINITION 1.6.— On appelle **première dérivée de  $f$**  l'application

$$f^1 : A \longrightarrow J^1(X, A; Y, B)$$

qui à  $x \in A$  associe l'application linéaire tangente  $f_{*,x}$  à  $f$  au point  $x$ .

On a une application naturelle

$$\pi : J^1(X, A; Y, B) \longrightarrow JN^1(X, A; Y, B)$$

et l'on a  $f_\nu^1 = \pi \circ f^1$ . L'application  $\pi$  est une fibration différentiable.

NOTATIONS 1.2.— En mettant des coordonnées locales au voisinage de  $a \in A$ , centrées en  $a$  et  $f(a)$ , l'application  $f$  peut être considérée au voisinage de  $a$  comme une application

$$f : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

avec  $a = 0$  et  $f(a) = 0$ .

On utilisera les notations suivantes :

$$u = (u_1, \dots, u_p), \quad v = (v_1, \dots, v_r), \quad x = (u; v) \text{ avec } u_i, v_j \in \mathbb{R}$$

$$U = (U_1, \dots, U_p), \quad V = (V_1, \dots, V_r), \quad X = (U; V) \text{ avec } U_i, V_j \in \mathbb{R}$$

$$g = (g_1, \dots, g_q), \quad h = (h_1, \dots, h_s), \quad f = (g; h)$$

$$(e_1, \dots, e_m) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$(e_1, \dots, e_p) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^p, \quad (e_{p+1}, \dots, e_{p+r}) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^r$$

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^n$$

$$(e_1, \dots, e_q) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^q, \quad (e_{q+1}, \dots, e_{q+s}) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^s$$

REMARQUE 1.1.—  $f$  étant une application entre paires de variétés, on a  $h(u, 0) = 0$ .

L'application linéaire tangente  $f_* : \mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  est donnée par

$$f_*(x, X) = \left( f(x) \quad , \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) X_j \right)$$

Par restriction l'application

$$f_\nu^1 : \mathbb{D}^p \longrightarrow \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$$

est donc donnée par

$$f_\nu^1(u, V) = \left( u \quad , \quad g(u; 0) \quad , \quad \sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(u; 0) V_j \right)$$

NOTATION 1.3.— On note  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$  l'espace des applications de classe  $C^\infty$  de la paire  $(X, A)$  dans la paire  $(Y, B)$ , espace muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney.

PROPOSITION 1.1.— Soit  $N$  une sous-variété (non nécessairement fermée) de

$$J^1(X, A; Y, B) .$$

Alors l'ensemble des applications

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

dont la première dérivée  $f^1$  est transversale à la sous-variété  $N$  est partout dense dans  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$ .

PREUVE. On procède comme pour la preuve des Théorèmes de transversalité de Thom. Le point essentiel à vérifier est que l'on peut appliquer le lemme fondamental de ([C], exp. 6-05). Le point à vérifier étant local, on part d'une application

$$f : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \text{ avec } f(0) = 0 .$$

Il suffit de construire une application  $F(x, w, k, l, t)$  avec

$$F : (\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{pq} \times \mathbb{R}^{qr} \times \mathbb{R}^{rs} , \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{pq} \times \mathbb{R}^{qr} \times \mathbb{R}^{rs}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^q)$$

telle que

$$F((u; v), 0, 0, 0, 0) = f(u; v)$$

et telle que l'application

$$\phi : \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{pq} \times \mathbb{R}^{qr} \times \mathbb{R}^{rs} \longrightarrow \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

définie par  $\phi(u, w, k, l, t) = (F_{w,k,l,t})^1(u)$  soit transversale à la sous-variété  $N$ .

On définit  $F$  par

$$F((u; v), w, k, l, t) = (G(u, v, w, k, l, t), H(u, v, w, k, l, t))$$

$$G(u, v, w, k, l, t) = g(u; v) + w + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p u_j k_{ij} e_i + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r v_j l_{ij} e_i$$

$$H(u, v, w, k, l, t) = h(u; v) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_j t_{ij} e_{q+i} = \sum_{i=1}^s h_i(u, v) e_{q+i} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_j t_{ij} e_{q+i}$$

L'application  $F$  ainsi définie est telle que

$$F((u; v), 0, 0, 0, 0) = f(u; v)$$

$$H(u, 0, w, k, l, t) = 0 .$$

L'application  $\phi$  est régulière en tout point (c'est-à-dire en tout point son rang est égal à la dimension du but). Par suite l'application  $\phi$  est transversale à la sous-variété  $N$ .

On peut donc appliquer le lemme fondamental.

□

PROPOSITION 1.2.— Soit  $N$  une sous-variété (non nécessairement fermée) de

$$JN^1(X, A; Y, B) .$$

Alors l'ensemble des applications  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  dont la première dérivée normale  $f_v^1$  est transversale à la sous-variété  $N$  est partout dense dans  $C^\infty(X, A; Y, B)$ .

PREUVE. Ce résultat découle de la Prop 1.1, compte-tenu de la fibration différentiable

$$\pi : J^1(X, A; Y, B) \longrightarrow JN^1(X, A; Y, B)$$

et de ce que l'on a  $f_v^1 = \pi \circ f^1$ .

□

PROPOSITION 1.3.— On considère un germe d'application

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0)$$

de rang normal  $k$  à l'origine, avec  $0 \leq k < \inf(r, s)$ . Plus précisément on suppose que l'on a les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) &= e_{q+j} && \text{pour tout } j = 1, \dots, k \\ \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) &= 0 && \text{pour tout } j = k + 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Alors la première dérivée normale  $f_\nu^1$  est transversale à l'origine à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $k$  si et seulement si

$$(TN1) \quad \text{les matrices } N_l = \left( \frac{\partial^2 h_i}{\partial u_l \partial v_j} (0) \right)_{k+1 \leq i \leq s, k+1 \leq j \leq r}, \quad 1 \leq l \leq p,$$

engendrent l'espace vectoriel des matrices  $(s-k, r-k)$ .

Lorsque  $k = r - 1$ ,  $r \leq s$  cette condition est équivalente à

$$(TN2) \quad \text{la matrice } R = \left( \frac{\partial^2 h_i}{\partial u_l \partial v_r} (0) \right)_{k+1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq p} \text{ est de rang } s - k.$$

Lorsque  $k = s - 1$ ,  $s \leq r$  cette condition est équivalente à :

$$(TN3) \quad \text{la matrice } S = \left( \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_l \partial v_j} (0) \right)_{1 \leq l \leq p, k+1 \leq j \leq r} \text{ est de rang } r - k.$$

PREUVE. La matrice de l'application linéaire  $f_\nu^1(u)$  est de la forme

$$A(u) = \begin{pmatrix} M(u) & Q(u) \\ P(u) & N(u) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial h_i(u)}{\partial v_j} \right)_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r}$$

où  $M(u)$  est une matrice carrée de rang  $k$ ,  $M(0)$  la matrice identité et

$$P(0) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad N(0) = 0.$$

Pour  $u$  voisin de 0 la matrice  $M(u)$  est donc inversible et la matrice  $A(u)$  est de rang  $k$  si et seulement si

$$N(u) - P(u)M(u)^{-1}Q(u) = 0.$$

Par suite l'application  $f_\nu^1$  est transversale à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $k$  si et seulement si les coefficients de la matrice  $N(u) - P(u)M(u)^{-1}Q(u)$  [matrice qui s'annule à l'origine] ont leurs parties linéaires linéairement indépendantes.

Comme  $P(0) = 0$  et  $Q(0) = 0$ , les coefficients de la matrice  $P(u)M(u)^{-1}Q(u)$  ont leurs parties linéaires identiquement nulles. Ce qui précède équivaut donc à dire que les coefficients de la matrice  $N(u)$  ont leurs parties linéaires linéairement indépendantes, c'est-à-dire à la condition (TN1).

Considérons le cas particulier  $k = r - 1$ ,  $r \leq s$ . Les matrices  $N_l$  ( $1 \leq l \leq p$ ) sont alors **des matrices colonnes**. Donc dans ce cas la condition (TN1) équivaut à la condition (TN2).

Considérons le cas particulier  $k = s - 1$ ,  $s \leq r$ . Les matrices  $N_l$  ( $1 \leq l \leq p$ ) sont alors **des matrices lignes**. Donc dans ce cas la condition (TN1) équivaut à la condition (TN3).  $\square$

PROPOSITION 1.4.— On considère une application  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  et un point  $a \in A$ . Notons  $k$  le rang normal de  $f$  au point  $a$ . Si la première dérivée normale  $f_\nu^1$  est transversale au point  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $k$ , alors l'application  $f$  est **correcte au point**  $a$  (cf. ¶5.Déf 5.1).

Si de plus  $k = \inf(r, s) - 1$ , alors ces deux propriétés sont équivalentes.

PREUVE.

1) Supposons d'abord que  $k = \inf(r, s)$ . Dans ce cas  $f_\nu^1$  est transversal au point  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $k$  [puisqu'il y a un ouvert].

Par ailleurs si  $r \leq s$ , on a  $k = r$  et l'application linéaire  $f_{*,a}$  est injective; si  $s \leq r$ , on a  $k = s$  et  $f_{*,a}$  est surjective. Par suite dans ces deux cas  $f$  est correcte au point  $a$ .

2) Supposons maintenant que  $k \leq \inf(r, s) - 1$ .

Le problème étant local, on peut supposer que  $f$  est le germe à l'origine d'une application

$$(\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0).$$

Des changements linéaires de cartes sur  $\mathbb{R}^r$  et sur  $\mathbb{R}^s$  permettent de satisfaire les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) &= e_{q+j} && \text{pour } 1 \leq j \leq k \\ \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) &= 0 && \text{pour } k+1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Soit  $V = (V_{k+1}, \dots, V_r) \in \mathbb{R}^{r-k}$ ,  $V \neq 0$ . On lui associe l'application linéaire

$$\Phi_V : \mathbb{R}^{(r-k)(s-k)} \longrightarrow \mathbb{R}^{s-k}$$

qui à une matrice  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  de type  $(s-k, r-k)$  associe le vecteur colonne  $\sum_{j=k+1}^r \lambda_j V_j$  où

$\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r$  désignent les vecteurs colonnes de la matrice  $\Lambda$ . L'application linéaire  $\Phi_V$  est **surjective** car

$$\frac{\partial \Phi_V}{\partial \lambda_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

le coefficient  $V_j$  étant situé à la ligne d'indice  $i$ .

$\Phi_V$  étant surjective, il résulte de la condition (TN1) que les vecteurs colonnes

$$\Phi_V(N_1), \Phi_V(N_2), \dots, \Phi_V(N_p)$$

engendrent  $\mathbb{R}^{s-k}$ .

Autrement dit la condition (TN1) entraîne la propriété suivante :

(C) Pour tout vecteur  $V = (V_{k+1}, \dots, V_r) \in \mathbb{R}^{r-k}$ ,  $V \neq 0$ , les vecteurs colonnes

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=k+1}^r \frac{\partial^2 h_{k+1}}{\partial u_l \partial v_j}(0) V_j \\ \vdots \\ \sum_{j=k+1}^r \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_l \partial v_j}(0) V_j \end{pmatrix}, \quad 1 \leq l \leq p$$

engendrent  $\mathbb{R}^{s-k}$ .

D'après la Prop 5.1 la propriété (C) équivaut à dire que  $f$  est **correcte au point**  $a$ .

Envisageons le cas particulier  $k = r - 1$ ,  $r \leq s$ . Dans ce cas  $V = (V_r)$  donc la condition (C) revient à dire que les vecteurs colonnes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h_r}{\partial u_l \partial v_r}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_l \partial v_r}(0) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq l \leq p$$

engendrent  $\mathbb{R}^{s-k}$ . Cette condition est bien équivalente à (TN2).

Envisageons le cas particulier  $k = s - 1$ ,  $s \leq r$ . On note  $W_{k+1}, \dots, W_r$  les vecteurs colonnes de la matrice figurant dans (TN3). La condition (TN3) équivaut à dire que pour tout vecteur

$$V = (V_{k+1}, \dots, V_r) \in \mathbb{R}^{r-k}, \quad V \neq 0,$$

le vecteur  $\sum_{j=k+1}^r V_j W_j$  est non nul; autrement dit les nombres

$$\sum_{j=k+1}^r \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_l \partial v_j}(0) V_j \quad (1 \leq l \leq p)$$

ne sont pas tous nuls. Et ceci coïncide avec la condition (C).

□

## 2 Points réguliers normaux

On détermine dans ce paragraphe deux formes locales explicites de certains points réguliers normaux.

DÉFINITION 2.1.— *On dira qu'une carte au voisinage de  $a \in A$  dans  $X$  (resp. de  $b \in B$  dans  $Y$ ) est **normale** si la sous-variété  $A$  (resp.  $B$ ) est définie par la nullité des dernières coordonnées.*

PROPOSITION 2.1.— *Soit  $a \in A$  un point régulier normal d'une application  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ . On suppose que l'on a*

$$\operatorname{rgn}_a f = r \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}_a f = m \quad (\text{d'où } p \leq q, r \leq s).$$

Alors il existe des cartes normales en  $a$  et en  $f(a)$  telles que  $f$  prenne la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0; v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0)$$

avec  $u = (u_1, \dots, u_p)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_r)$ .

PREUVE.

a) Le résultat étant local, on part d'un germe

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0).$$

Comme  $\operatorname{rgn}_a f = r$ , par un changement linéaire de carte normale, on obtient que la différentielle de  $h$  à l'origine satisfasse à

$$(1) \quad h_{*,0}(e_{p+j}) = e_{q+j} \quad 1 \leq j \leq r$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\partial h}{\partial v_1}(0) = e_{q+1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0) = e_{q+r}.$$

On fait le changement de carte normale suivant :

$$\begin{cases} u' = u \\ v'_j = h_j(u, v) \quad 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

C'est un changement de carte normale car  $h(u, 0) = 0$  et la matrice jacobienne à l'origine est la matrice identité. L'application  $f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = (g(u, v); v_1, \dots, v_r, h_{r+1}(u, v), \dots, h_s(u, v))$$

et satisfait encore à (1).

b) Puisque  $h(u, 0) = 0$ , la matrice jacobienne de  $f$  en  $a$  est de la forme

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0) & \frac{\partial g}{\partial v}(0) \\ 0 & \frac{\partial h}{\partial v}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (q, s; p, r)$$

$$\text{avec } \frac{\partial h}{\partial v}(0) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (r, s - r; r).$$

D'après l'hypothèse  $\text{rg}_a f = m$  et la forme de la matrice  $J_a(f)$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (q, p),$$

est de rang  $p$ . Par suite quitte à faire un changement linéaire de carte sur  $\mathbb{R}^q$ , on impose les relations

$$(2) \quad g_{*,0}(e_j) = e_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(0) = e_1, \dots, \frac{\partial g}{\partial u_p}(0) = e_p.$$

On fait alors le changement de carte normale  $\phi$  défini par

$$\begin{cases} u'_j = g_j(u, v) & 1 \leq j \leq p \\ v' = v \end{cases}$$

On a à l'origine

$$\begin{cases} \phi_{*,0}(e_j) = e_j & 1 \leq j \leq p \\ \phi_{*,0}(e_{p+j}) = \left( \sum_{i=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial v_j}(0) e_i \right) + e_{p+j} & 1 \leq j \leq r \end{cases}$$

$f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, g_{p+1}(u, v), \dots, g_q(u, v); v_1, \dots, v_r, h_{r+1}(u, v), \dots, h_s(u, v))$$

et satisfait encore à (1) et à (2).

c) Faisons dans le but le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} U'_i = U_i & 1 \leq i \leq p \\ U'_i = U_i - g_i(U_1, \dots, U_p; V_1, \dots, V_r) & p+1 \leq i \leq q \\ V'_i = V_i & 1 \leq i \leq r \\ V'_i = V_i - h_i(U_1, \dots, U_p; V_1, \dots, V_r) & r+1 \leq i \leq s \end{cases}$$

C'est un changement de carte normale car on a  $h(u; 0) = 0$ .

Alors  $f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0; v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0).$$

□

PROPOSITION 2.2. — Soit  $a \in A$  un point régulier normal d'une application  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . On suppose que l'on a

$$\operatorname{rgn}_a f = s \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}_a f|_A = q \quad \text{d'où} \quad q \leq p, \quad s \leq r).$$

Alors il existe des cartes normales en  $a$  et en  $f(a)$  telles que  $f$  prenne la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_q; v_1, \dots, v_s)$$

avec  $u = (u_1, \dots, u_p)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_r)$ .

PREUVE.

Comme  $\operatorname{rgn}_a f = s$ , par un changement de carte linéaire sur  $\mathbb{R}^r$  on peut imposer les conditions

$$\begin{cases} h_{*,0}(e_{p+j}) = e_{q+j} & 1 \leq j \leq s \\ h_{*,0}(e_{p+j}) = 0 & s+1 \leq j \leq r \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) = e_{q+j} & 1 \leq j \leq s \\ \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) = 0 & s+1 \leq j \leq r \end{cases}$$

On effectue le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} u' = u \\ v'_j = h_j(u, v) & 1 \leq j \leq s \\ v'_j = v_j & s+1 \leq j \leq r \end{cases}$$

L'application  $f$  prend alors la forme suivante :

$$f(u; v) = (g(u, v) ; v_1, \dots, v_s) .$$

Comme  $\text{rg}_a f|_A = q$ , par un changement de carte linéaire sur  $\mathbb{R}^p$  on peut imposer les conditions

$$\begin{cases} g_{*,0}(e_j) = e_j & 1 \leq j \leq q \\ g_{*,0}(e_j) = 0 & q + 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_j}(0) = e_j & 1 \leq j \leq q \\ \frac{\partial g}{\partial u_j}(0) = 0 & q + 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

On effectue le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} u'_j = g_j(u, v) & 1 \leq j \leq q \\ u'_j = u_j & q + 1 \leq j \leq p \\ v' = v \end{cases}$$

Alors l'application  $f$  prend la forme suivante :

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_q ; v_1, \dots, v_s) .$$

□

### 3 Points singuliers normaux simples

On va exhiber dans ce paragraphe et le suivant des formes réduites de certains germes d'applications  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  en des points singuliers normaux.

**DÉFINITION 3.1.**— *On dira qu'un point singulier normal  $a$  de  $f$  est **semi-simple** s'il possède les propriétés suivantes :*

(NS1) le rang normal de  $f$  au point  $a$  est égal à  $r - 1$  :  $\text{rgn}_a f = r - 1$  [donc  $r \leq s$ ];

(NS2) la première dérivée normale  $f_v^1$  est transversale au point  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $r - 1$ .

**DÉFINITION 3.2.**— *On dit qu'un point singulier normal  $a$  de  $f$  est **simple** s'il est semi-simple et si de plus il satisfait à :*

(NS3) le rang de  $f$  au point  $a$  est égal à  $m$  :  $\text{rg}_a f = m$  [ce qui implique  $q \geq p + 1$ ].

DÉFINITION 3.3.— On dit que l'application  $f$  est **semi-simple** si  $r \leq s$  et si elle satisfait à :

- (AS1) les points singuliers normaux de  $f$  sont semi-simples ;
- (AS2) la restriction de  $f$  à  $X \setminus A$  est transversale à  $B$  .

DÉFINITION 3.4.— On dit que l'application  $f$  est **simple** si elle est semi-simple et si de plus elle possède les propriétés suivantes :

- (AS3) les points singuliers normaux de  $f$  sont simples ;
- (AS4) la restriction de  $f$  à la sous-variété  $D = \overline{f^{-1}(B)} \setminus A$  est un plongement (cf. Prop 3.2).

PROPOSITION 3.1.— Considérons un germe d'application  $f = (g; h) : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0)$  . On suppose que  $\frac{\partial h}{\partial v_1}(0) = 0$ . Alors ce germe est le germe d'un point singulier normal **semi-simple** si et seulement si

- (a) les vecteurs  $\frac{\partial h}{\partial v_2}(0), \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0)$  sont linéairement indépendants ;
- (b) les vecteurs  $\frac{\partial h}{\partial v_2}(0), \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0), \frac{\partial^2 h}{\partial u_1 \partial v_1}(0), \dots, \frac{\partial^2 h}{\partial u_p \partial v_1}(0)$  engendrent  $\mathbb{R}^s$  .

La condition (b) implique  $p + r - 1 \geq s$ , c'est-à-dire  $m \geq s + 1$ .

PREUVE. Il est immédiat que la condition (NS1) est équivalente à la condition (a) .

Par un changement linéaire de carte sur  $\mathbb{R}^s$ , on se ramène à prouver la Prop 3.1 pour une application  $h$  satisfaisant de plus aux conditions

$$\frac{\partial h}{\partial v_2}(0) = e_{q+1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0) = e_{q+r-1} .$$

D'après la Prop 1.3 la condition (NS2) est équivalente à la condition (TN2) du ¶1, laquelle peut se mettre sous la forme (b) .

□

PROPOSITION 3.2.— Soit  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  une application **semi-simple**. Alors

$$D = \overline{f^{-1}(B)} \setminus A$$

est **une sous-variété compacte** de  $X$ , de dimension  $m - s$ . De plus  $S = D \cap A$  est une sous-variété compacte de codimension 1 de  $D$  ; c'est l'ensemble des points singuliers normaux de  $f$  . Tout vecteur tangent à  $D$  et normal à  $S$  est normal à  $A$  .

PREUVE.

a) D'après la condition (AS2), l'application  $f|_{X \setminus A}$  est transversale à  $B$ . Il en résulte que  $f^{-1}(B) \setminus A$  est une sous-variété fermée de  $X \setminus A$ .

b) Plaçons-nous d'abord au voisinage d'un point régulier normal  $a \in A$ . Comme  $r \leq s$ , on a  $\text{rgn}_a f = r$ . Par suite pour  $u$  donné, l'équation  $h(u, v) = 0$  a au plus une solution d'après le théorème des fonctions implicites; or  $v = 0$  est solution. Il en résulte qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $X$  tel que

$$f^{-1}(B) \cap V = A \cap V .$$

c) Plaçons-nous dorénavant au voisinage d'un point singulier normal semi-simple  $a \in A$ . On choisit des cartes normales en  $a$  et en  $f(a)$  telles que l'on ait

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial v_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v_2}(0) = e_{q+1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0) = e_{q+r-1} .$$

On fait le changement de carte normale suivant :

$$\begin{cases} u' = u \\ v'_1 = v_1 \\ v'_j = h_{j-1}(u, v) \quad 2 \leq j \leq r \end{cases}$$

C'est un changement de carte normale car  $h(u, 0) = 0$  et la matrice jacobienne à l'origine est la matrice identité. L'application  $f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = (g(u, v) ; v_2, \dots, v_r, h_r(u, v), \dots, h_s(u, v))$$

et satisfait encore à (1).

d) Il existe des germes de fonctions  $\omega_i$  tels que

$$h_i(u; v) = v_1 \omega_i(u; v) + h_i(u; 0, v_2, \dots, v_r) \quad \text{pour } r \leq i \leq s .$$

On a  $\omega_i(0) = \frac{\partial h_i}{\partial v_1}(0) = 0$  d'après (1). Le sous-ensemble  $f^{-1}(B)$  est solution du système

$$\begin{cases} v_j = 0 & 2 \leq j \leq r \\ h_i(u; v) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} v_j = 0 & 2 \leq j \leq r \\ v_1 \omega_i(u; v) + h_i(u; 0, v_2, \dots, v_r) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

Comme  $h_i(u; 0) = 0$ , ce sous-ensemble est aussi solution du système

$$\begin{cases} v_j = 0 & 2 \leq j \leq r \\ v_1 \omega_i(u; v_1, 0, \dots, 0) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

Par suite au voisinage de  $a$ ,  $f^{-1}(B)$  est réunion de  $A$  et du sous-ensemble  $D$  défini par le système

$$\begin{cases} v_j = 0 & 2 \leq j \leq r \\ \omega_i(u; v_1, 0, \dots, 0) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

Comme l'origine est un point singulier semi-simple de  $f$ , il résulte de la Prop 3.1 que la matrice

$$\left( \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j}(0) \right)_{r \leq i \leq s, 1 \leq j \leq p}$$

est de rang  $s - r + 1$ .  $D$  est donc une sous-variété de dimension  $(p + 1) - (s - r + 1) = m - s$ .

Par ailleurs au voisinage de  $a$ , l'ensemble  $S$  des points singuliers normaux est donné par

$$\begin{cases} v_j = 0 & 1 \leq j \leq r \\ \frac{\partial h_i}{\partial v_1}(u; 0) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$\begin{cases} v_j = 0 & 1 \leq j \leq r \\ \omega_i(u; 0) = 0 & r \leq i \leq s \end{cases}$$

On a donc  $S = D \cap A$  au voisinage de  $a$ . De plus  $S$  est une sous-variété compacte de codimension 1 de  $D$  et tout vecteur tangent à  $D$  et normal à  $S$  est normal à  $A$ .

□

Une forme réduite des points singuliers normaux simples est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3.— *Le point  $a \in A$  est un point singulier normal **simple** d'une application*

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

*si et seulement s'il existe des cartes normales en  $a$  et en  $f(a)$  telles que  $f$  prenne la forme*

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, u_1 v_1, \dots, u_{s-r+1} v_1)$$

où  $u = (u_1, \dots, u_p)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_r)$ .

PREUVE. La condition est suffisante d'après la Prop 3.1. Prouvons qu'elle est nécessaire.

a) Le résultat étant local, on part d'un germe

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0) .$$

Par un changement linéaire de carte, d'après l'hypothèse (NS1), on obtient que la différentielle de  $h$  à l'origine satisfasse à

$$(1) \quad h_{*,0}(e_{p+1}) = 0 \quad \text{et} \quad h_{*,0}(e_{p+j}) = e_{q+j-1} \quad 2 \leq j \leq r$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\partial h}{\partial v_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v_2}(0) = e_{q+1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial v_r}(0) = e_{q+r-1} .$$

On fait le changement de carte normale suivant :

$$\begin{cases} u' = u \\ v'_1 = v_1 \\ v'_j = h_{j-1}(u; v) \quad 2 \leq j \leq r \end{cases}$$

C'est un changement de carte normale car  $h(u, 0) = 0$  et la matrice jacobienne à l'origine est la matrice identité. L'application  $f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = (g(u; v) ; v_2, \dots, v_r, h_r(u; v), \dots, h_s(u; v))$$

et satisfait encore à (1).

b) Puisque  $h(u; 0) = 0$ , la matrice jacobienne de  $f$  en  $a$  est de la forme

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0) & \frac{\partial g}{\partial v}(0) \\ 0 & \frac{\partial h}{\partial v}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (q, s; p, r)$$

$$\text{avec } \frac{\partial h}{\partial v}(0) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (r-1, s-r+1; 1, r-1) .$$

D'après l'hypothèse (NS3) et la forme de la matrice  $J_a(f)$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de type } (q, p+1),$$

est de rang  $p+1$  (d'où  $p+1 \leq q$ ). Par suite quitte à faire un changement linéaire de carte sur  $\mathbb{R}^q$ , on impose les relations

$$(2) \quad g_{*,0}(e_j) = e_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p \quad \text{et} \quad g_{*,0}(e_{p+1}) = e_{p+1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(0) = e_1, \dots, \frac{\partial g}{\partial u_p}(0) = e_p, \frac{\partial g}{\partial v_1}(0) = e_{p+1}.$$

On fait alors le changement de carte normale  $\phi$  défini par

$$\begin{cases} u'_j = g_j(u; v) & 1 \leq j \leq p \\ v' = v \end{cases}$$

On a à l'origine

$$\begin{cases} \phi_{*,0}(e_j) = e_j & 1 \leq j \leq p+1 \\ \phi_{*,0}(e_{p+j}) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial v_j}(0) e_i + e_{p+j} & 2 \leq j \leq r \end{cases}$$

$f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, g_{p+1}(u; v), \dots, g_q(u; v); v_2, \dots, v_r, h_r(u; v), \dots, h_s(u; v))$$

et satisfait encore à (1) et à (2).

c) Il existe un germe  $\lambda : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tel que

$$g_{p+1}(u; v) = g_{p+1}(u; 0, v_2, \dots, v_r) + v_1 \lambda(u; v).$$

Comme  $\frac{\partial g_{p+1}}{\partial v_1}(0) = 1$ , on a  $\lambda(0) = 1$ . On fait alors le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} u' = u \\ v'_1 = v_1 \lambda(u; v) \\ v'_i = v_i & 2 \leq i \leq r \end{cases}$$

Ce changement de carte admet la matrice identité comme matrice jacobienne à l'origine.

L'application  $f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1 + g_{p+1}(u; 0, v_2, \dots, v_r), g_{p+2}(u; v), \dots, g_q(u; v); v_2, \dots, v_r, h_r(u; v), \dots, h_s(u; v))$$

et satisfait encore à (1) et (2).

d) Faisons dans le but le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} U'_i = U_i & \text{pour } i \neq p+1 \\ U'_{p+1} = U_{p+1} - g_{p+1}(U_1, \dots, U_p; 0, V_1, \dots, V_{r-1}) \\ V' = V \end{cases}$$

D'après (2) on a  $\frac{\partial g_{p+1}}{\partial u_j} = 0$  pour  $1 \leq j \leq p$ .  $f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, g_{p+2}(u; v), \dots, g_q(u; v); v_2, \dots, v_r, h_r(u; v), \dots, h_s(u; v))$$

et satisfait toujours à (1) et (2).

Faisons dans le but le changement de carte normale défini par

$$\begin{cases} U'_i = U_i & 1 \leq i \leq p+1 \\ U'_i = U_i - g_i(U_1, \dots, U_p; U_{p+1}, V_1, \dots, V_{r-1}) & p+2 \leq i \leq q \\ V' = V \end{cases}$$

$f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, h_r(u; v), \dots, h_s(u; v))$$

et satisfait à (1) [vu la forme de  $f$ , la condition (2) est évidemment satisfaite].

e) Il existe des germes  $\omega_i$  de fonctions de classe  $C^\infty$  tels que

$$h_i(u; v) = v_1 \omega_i(u; v) + h_i(u; 0, v_2, \dots, v_r) \quad r \leq i \leq s.$$

On a alors  $\omega_i(0) = \frac{\partial h_i}{\partial v_1}(0) = 0$  d'après (1).

On fait dans le but le changement de carte normale suivant

$$\begin{cases} U' = U \\ V'_i = V_i & 1 \leq i \leq r-1 \\ V'_i = V_i - h_i(U_1, \dots, U_p; 0, V_1, \dots, V_{r-1}) & r \leq i \leq s \end{cases}$$

Alors  $f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, v_1 \omega_r(u; v), \dots, v_1 \omega_s(u; v)).$$

D'après la Prop 3.1, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_r}{\partial u_i}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega_s}{\partial u_i}(0) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

engendrent  $\mathbb{R}^{s-r+1}$ , d'où  $s - r + 1 \leq p$ .

En permutant les coordonnées  $u_1, \dots, u_p$ , on obtient que les vecteurs précédents forment une base pour  $1 \leq i \leq s - r + 1$ . On fait dans la source et dans le but les changements de cartes normales définis par

$$\begin{cases} u'_j = \omega_{r+j-1}(u; v) & 1 \leq j \leq s - r + 1 \\ u'_j = u_j & s - r + 2 \leq j \leq p \\ v'_i = v_i & 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'_i = \omega_{r+i-1}(U_1, \dots, U_p; U_{p+1}, V_1, \dots, V_{r-1}) & 1 \leq i \leq s - r + 1 \\ U'_i = U_i & s - r + 2 \leq i \leq q \\ V' = V \end{cases}$$

Alors  $f$  prend la forme

$$f(u; v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, u_1 v_1, \dots, u_{s-r+1} v_1).$$

□

PROPOSITION 3.4. — *On suppose que les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$s - r \geq \sup \left( 0, \frac{p-3}{2}, 2p - q, \frac{2p - q + 1}{2} \right).$$

[En particulier on a donc  $r \leq s$  et  $m \leq n$ ]. Alors le sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $C^\infty(X, A; Y, B)$  formé des applications simples est **un ouvert partout dense** pour la topologie  $C^\infty$  de Whitney.

PREUVE.

1) Prouvons d'abord que le sous-ensemble  $\mathcal{S}$  est un ouvert de  $C^\infty(X, A; Y, B)$ .

L'ensemble des applications  $f$  satisfaisant à (AS1) et (AS3) est un ouvert. Si l'on ajoute la condition (AS2) on a encore un ouvert d'après les Prop 1.4 et 6.2. Comme  $D$  dépend continûment de  $f$ , vu la forme de la condition (AS4), il en résulte que  $\mathcal{S}$  est un ouvert.

2) *Prouvons maintenant que le sous-ensemble  $\mathcal{S}$  est partout dense dans  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$ .*

On considère une application

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B) .$$

L'application  $f$  n'a pas de point singulier normal de rang  $\leq r - 2$  si et seulement si l'image de la première dérivée normale  $f_\nu^1$  ne contient pas de 1-jets normaux de rang  $\leq r - 2$ . Mais les 1-jets normaux de rang  $\leq r - 2$  forment une sous-variété stratifiée de codimension  $2(s - r + 2)$ . Par suite d'après la Prop 1.2, si

$$\dim A < 2(s - r + 2) \quad \text{c'est-à-dire si } p \leq 2(s - r) + 3 ,$$

quitte à remplacer  $f$  par une application voisine,  $f$  n'a pas de point singulier normal de rang  $\leq r - 2$ .

D'après la Prop 1.2, quitte à remplacer  $f$  par une application voisine, on peut supposer que  $f_\nu^1$  est transversale à la sous-variété des 1-jets normaux de rang  $r - 1$ . Les points singuliers normaux de  $f$  sont alors semi-simples.

D'après la Prop 1.4 l'application  $f$  est correcte. D'après la Prop 6.2 il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  dans  $X$  tel que  $f|_{U \setminus A}$  soit transversale à  $B$ . D'après les Théorèmes de transversalité de Thom, quitte à remplacer  $f$  par une application voisine,  $f|_{X \setminus A}$  est transversale à  $B$ , c'est-à-dire satisfait à la condition (AS2).

Soit  $S$  l'ensemble des points singuliers normaux de  $f$ . Pour que le rang de  $f$  en tout point de  $S$  soit égal à  $m$ , il faut et il suffit que la première dérivée  $f^1$  évite une sous-variété stratifiée de codimension  $n - m + 1$ . Par suite d'après la Prop 1.1 si

$$\dim A < n - m + 1 \quad \text{c'est-à-dire si } 2p - q \leq s - r ,$$

quitte à remplacer  $f$  par une application voisine, les points singuliers normaux de  $f$  sont simples.

L'application  $f$  satisfait à (AS4) si et seulement si  $f|_D : D \longrightarrow B$  est un plongement. Par suite si

$$2 \dim D + 1 \leq \dim B \quad \text{c'est-à-dire si } 2p - q \leq 2(s - r) - 1 ,$$

quitte à remplacer  $f$  par une application voisine, l'application  $f$  est simple. □

**COROLLAIRE 1.**— *Soit  $V^n$  une variété différentielle compacte. Soit  $M^m$  une variété différentielle. On suppose que  $2m \geq 3n > 0$ . On note  $\Delta_V$  et  $\Delta_M$  les diagonales de  $V \times V$  et  $M \times M$  respectivement. Alors l'ensemble des applications simples  $g : (V \times V, \Delta_V) \longrightarrow (M \times M, \Delta_M)$  est un ouvert partout dense de l'espace  $\mathcal{C}^\infty(V \times V, \Delta_V; M \times M, \Delta_M)$ .*

## 4 Points singuliers normaux non dégénérés de fonctions

DÉFINITION 4.1.— On dit qu'un **point singulier normal**  $a$  d'une fonction

$$f : (X, A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \{b\})$$

est **non dégénéré** si la première dérivée normale  $f_\nu^1$  est transversale au point  $a$  à la sous-variété des 1-jets normaux de rang 0.

PROPOSITION 4.1.— On considère un germe d'application

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, 0) \quad \text{avec } r \geq 1$$

On suppose que  $\frac{\partial f}{\partial v_j}(0) = 0$  pour  $1 \leq j \leq r$ . Alors l'origine 0 est un point singulier normal non dégénéré si et seulement si la matrice

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial v_j}(0) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r}$$

est de rang  $r$ . En particulier dans ce cas on a  $p \geq r$ .

PREUVE. Cette proposition est le cas particulier  $s = 1$  de la condition (TN3) de la Prop 1.3.  $\square$

Une forme réduite des points singuliers normaux non dégénérés est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.—  $a \in A$  est un point singulier normal non dégénéré d'une fonction

$$f : (X, A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \{b\}) \quad \text{avec } r \geq 1$$

si et seulement s'il existe une carte normale au voisinage de  $a \in A$  telle que  $f$  soit de la forme

$$f(u; v) = b + \sum_{i=1}^r u_i v_i$$

PREUVE. Le problème étant local, on peut partir d'un germe de fonction

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, 0) .$$

La Prop 4.1 montre immédiatement que la condition est suffisante. Prouvons que la condition est nécessaire.

Puisque  $f(u; 0) = 0$ , il existe des germes de fonctions  $\theta_j$  tels que

$$f(u; v) = \sum_{j=1}^r v_j \theta_j(u; v) \quad .$$

Alors

$$\theta_j(0) = \frac{\partial f}{\partial v_j}(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial v_j}(0) \quad .$$

Par suite d'après la Prop 4.1 la matrice

$$\left( \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i}(0) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r}$$

est de rang  $r$ .

Quitte à permuter les coordonnées de  $\mathbb{R}^p$ , la matrice carrée  $\left( \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$  est de rang  $r$ .

Effectuons le changement de coordonnées normales

$$\begin{cases} u'_i = \theta_i(u; v) & 1 \leq i \leq r \\ u'_i = u_i & r+1 \leq i \leq p \\ v'_j = v_j & 1 \leq j \leq r \end{cases}$$

L'application  $f$  prend alors la forme

$$f(u; v) = \sum_{i=1}^r u_i v_i$$

□

REMARQUE 4.1.— Si  $a$  est un point critique non dégénéré d'une fonction différentiable  $f : V^m \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $(a, a)$  est un point singulier normal non dégénéré de l'application

$$\begin{aligned} \Phi : (V \times V, \Delta_V) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, y) &\longmapsto f(y) - f(x) \end{aligned}$$

où  $\Delta_V$  désigne la diagonale de  $V \times V$ .

PREUVE. En effet il existe une carte centrée en  $a$  telle que l'application  $f$  soit de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^t x_i^2 - \sum_{i=t+1}^m x_i^2 \quad \text{avec } t \in \{0, \dots, m\}$$

d'où

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^t (y_i^2 - x_i^2) - \sum_{i=t+1}^m (y_i^2 - x_i^2).$$

Considérons la carte normale

$$\begin{cases} u_i = y_i + x_i & 1 \leq i \leq m \\ v_i = y_i - x_i & 1 \leq i \leq t \\ v_i = x_i - y_i & t + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Alors on obtient

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^m u_i v_i$$

ce qui prouve la remarque. □

## 5 Définition et étude des applications correctes

On introduit dans ce paragraphe la notion d'application correcte, notion reliée à certaines singularités normales (cf. Prop 1.4).

On rappelle que  $\dot{E}(\tau_a X / \tau_a A)$  désigne le complémentaire de la section nulle dans  $E(\tau_a X / \tau_a A)$ .

DÉFINITION 5.1.— *On dit qu'une application différentiable  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est **correcte au point**  $a \in A$  si l'application*

$$f_A : E(\tau_A X / \tau A) \rightarrow E(\tau_B Y / \tau B)$$

*est transversale à la section nulle du fibré vectoriel  $\tau_B Y / \tau B$  en tout point de  $\dot{E}(\tau_a X / \tau_a A)$ .*

*On dit que l'application  $f$  est **correcte** si elle est correcte en tout point  $a \in A$ .*

REMARQUE 5.1.— Si  $V$  et  $M$  sont deux variétés différentielles,  $V$  étant compacte sans bord, une application  $f : V \rightarrow M$  est correcte au sens de ([D], III.1.1) si et seulement si l'application

$$f \times f : (V \times V, \Delta_V) \rightarrow (M \times M, \Delta_M)$$

est correcte au sens précédent,  $\Delta_V$  et  $\Delta_M$  désignant les diagonales de  $V \times V$  et de  $M \times M$  respectivement.

PROPOSITION 5.1.— L'application  $f : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0)$  est correcte à l'origine si et seulement si pour tout vecteur  $V \in \mathbb{R}^r$  avec  $V \neq 0$  et

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) V_j = 0 ,$$

les vecteurs

$$\frac{\partial h}{\partial v_j}(0) \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial v_j}(0) V_j \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq p$$

engendrent l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^s$ .

PREUVE. L'application

$$f_{\mathbb{D}^p} : \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s$$

est donnée par

$$f_{\mathbb{D}^p}(u, V) = \left( g(u; 0) , \sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(u; 0) V_j \right)$$

La proposition résulte alors aussitôt de la Déf 5.1 .

□

PROPOSITION 5.2.— On munit  $X$  d'une structure riemannienne et on prend pour  $\tau_A X / \tau A$  le fibré normal à  $A$  dans  $X$ . On note  $S(\tau_A X / \tau A)$  le fibré en sphères unités associé au fibré normal à  $A$  dans  $X$ . Une application différentiable  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  est **correcte** au point  $a \in A$  si et seulement si l'application

$$f_A : S(\tau_A X / \tau A) \longrightarrow E(\tau_B Y / \tau B)$$

est transversale à la section nulle en tout point de  $S(\tau_a X / \tau_a A)$ .

PREUVE. En effet si un point  $b$  du fibré  $S(\tau_a X / \tau_a A)$  a une image par  $f_A$  située dans la section nulle, alors tous les points du sous-espace vectoriel engendré par  $b$  ont la même image. La proposition résulte de cette remarque et de ce que l'application  $f_A$  est linéaire sur les fibres de  $E(\tau_A X / \tau A)$ .

□

PROPOSITION 5.3.— Les applications correctes de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  forment **un ouvert dense** de l'espace  $C^\infty(X, A; Y, B)$  des applications de classe  $C^\infty$  de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. De plus si une application différentiable  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  est correcte en tout point d'un fermé  $L$  de  $X$ , alors on peut l'approcher d'aussi près que l'on veut par une application correcte  $g$  égale à  $f$  au voisinage de  $L$ .

PREUVE. Il résulte de la Prop 5.2 que les applications correctes de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  forment un ouvert de  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$ . Prouvons que cet ouvert est dense.

Le problème est essentiellement local. On part d'une application

$$f : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0) .$$

On lui associe l'application

$$f_{\mathbb{D}^p} : \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s$$

explicitée par

$$f_{\mathbb{D}^p}(u, V) = \left( g(u; 0) , \sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(u; 0) V_j \right) .$$

On considère l'application

$$F : (\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{rs} , \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^{rs}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

définie par

$$F(u, v, t) = (G(u, v, t), H(u, v, t)) \quad \text{où} \quad (u, v) \in \mathbb{D}^m, \quad t = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{rs}$$

$$G(u, v, t) = g(u; v)$$

$$H(u, v, t) = h(u; v) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_j t_{ij} e_{q+i} .$$

On a  $F(u, v, 0) = f$  .

Considérons l'application

$$\phi : \mathbb{D}^p \times (\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{rs} \longrightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s$$

définie par

$$\phi(u, V, t) = (F_t)_{\mathbb{D}^p}(u, V) = (g(u; 0) , \psi(u, V, t))$$

où  $\psi$  est l'application donnée par

$$\psi(u, V, t) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial H}{\partial v_j}(u; 0) V_j = \sum_{j=1}^r \left( \frac{\partial h}{\partial v_j}(u; 0) + \sum_{i=1}^s t_{ij} e_{q+i} \right) V_j .$$

Soit  $V \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  . Il existe  $k \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $V_k \neq 0$ . Les vecteurs  $V_k e_{q+1}, \dots, V_k e_n$  engendrent alors  $\mathbb{R}^s$ . Ceci montre que le point  $(u, V, t)$  est un point régulier de l'application  $\psi$ . Par suite l'application  $\phi$  est transversale à la sous-variété  $\mathbb{R}^q \times \{0\}$  .

Il suffit alors d'appliquer à l'application  $\phi$  le *lemme fondamental de* ([C], exp 6-05), lemme qui est à la base des Théorèmes de transversalité de Thom. Plus précisément, on applique ce lemme à la restriction de l'application  $\phi$  à  $\mathbb{D}^p \times \mathbb{S}^{r-1} \times \mathbb{R}^{rs}$  .

□

On note  $I = [0, 1]$  et l'on pose  $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$ .

DÉFINITION 5.2.— On dit qu'une **homotopie**

$$h = (h_t)_{t \in I} : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$$

est **correcte** si les applications  $h_0$  et  $h_1$  sont correctes et si l'application  $h$  est correcte.

De la Prop 5.3 appliquée au fermé  $L = X \times \{0, 1\}$  découle la proposition suivante.

PROPOSITION 5.4.— Soient  $f$  et  $g$  deux applications correctes de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$ . Alors toute homotopie

$$h : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$$

de  $f$  dans  $g$  peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une homotopie correcte de  $f$  dans  $g$ .

## 6 Définition et étude des applications excellentes

On introduit dans ce paragraphe la notion d'application excellente. Cette notion est reliée à celle d'application semi-simple (cf. Déf 3.3) car toute application semi-simple est excellente.

DÉFINITION 6.1.— On dit qu'une application différentiable  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  est **excellente** si elle est correcte et si l'application  $f|_{X \setminus A}$  est transversale à  $B$ .

REMARQUE 6.1.— Si  $V$  et  $M$  sont deux variétés,  $V$  étant compacte sans bord, une application  $f : V \longrightarrow M$  est excellente au sens de ([D], III.1.2) si et seulement si l'application  $f \times f : (V \times V, \Delta_V) \longrightarrow (M \times M, \Delta_M)$  est excellente au sens précédent,  $\Delta_V$  et  $\Delta_M$  désignant les diagonales de  $V \times V$  et de  $M \times M$  respectivement.

PROPOSITION 6.1.— Soit  $a \in A$  et soit  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  une application correcte au point  $a$ . Il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $a$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $f \in \mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$  tels que pour  $F \in \mathcal{V}$ ,  $F|_{W \setminus A}$  soit transversale à  $B$ .

PREUVE. Le problème étant local, il suffit d'étudier un germe d'application  $f : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0)$ .

a) Soit une application  $F : (\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q, 0)$ . On utilise la notation

$$F(u; v) = (G(u; v) ; H(u; v)) .$$

Comme  $H(u; 0) = 0$ , il existe des fonctions  $\alpha_j^H$  de classe  $C^\infty$  ( $1 \leq j \leq r$ ) définies dans  $\mathbb{D}^m$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^s$ , dépendant continûment de  $H$ , telles que l'on ait

$$H(u; v) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^H(u; v) v_j .$$

Il vient

$$\frac{\partial H}{\partial v_j}(0) = \alpha_j^H(0) \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial v_j}(0) = \frac{\partial \alpha_j^H}{\partial u_i}(0) \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq r .$$

b) L'application  $f$  est correcte à l'origine. Par suite d'après la Prop 5.1 pour tout vecteur  $V \in \mathbb{R}^r$  avec  $V \neq 0$  et

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) V_j = 0$$

les vecteurs

$$\frac{\partial h}{\partial v_j}(0) \quad 1 \leq j \leq r$$

et  $\sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial v_j}(0) V_j \quad 1 \leq i \leq p$

engendrent l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^s$ .

c) Soit  $K$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^r$  défini par

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j}(0) V_j = 0 .$$

Il existe un secteur  $S$  de  $\mathbb{R}^r$  [c'est-à-dire une réunion de demi-droites fermées issues de 0], il existe un voisinage  $W_1$  de 0 dans  $\mathbb{D}^m$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_1$  de  $h$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^p; \mathbb{R}^s, 0)$  tels que

1)  $S \setminus \{0\}$  soit un voisinage de  $K \setminus \{0\}$ ;

2) si  $(u; v) \in W_1$ ,  $H \in \mathcal{V}_1$ ,  $V \in S$  et  $V \neq 0$ , alors les vecteurs

$$\frac{\partial H}{\partial v_j}(u; v) \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^r \frac{\partial \alpha_j^H}{\partial u_i}(u; v) V_j \quad 1 \leq i \leq p$$

engendrent  $\mathbb{R}^s$ .

L'existence de  $S$  résulte de b) et d'un argument de compacité sur  $K \cap \mathbb{S}^{r-1}$ .

d) Il existe  $W$  voisinage de 0 dans  $\mathbb{D}^m$ ,  $W \subset W_1$ , il existe  $\mathcal{V}$  voisinage de  $h$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$ , tels que si  $(u; v) \in W$ ,  $H \in \mathcal{V}$  et si

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j^H(u; v) V_j = 0$$

alors  $V \in S$ . Cela résulte de la définition de  $K$  et de ce que  $\alpha_j^h(0) = \frac{\partial h}{\partial v_j}(0)$ .

e) Par suite si  $(u; v) \in W$ ,  $H \in \mathcal{V}$  et si

$$H(u; v) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^H(u; v) v_j = 0$$

on a  $v \in S$ . Vu le choix de  $S$ , on déduit de c) que si  $v \neq 0$ , alors les vecteurs

$$\frac{\partial H}{\partial v_j}(u; v) \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial u_i}(u; v) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial \alpha_j^H}{\partial u_i}(u; v) v_j \quad 1 \leq i \leq p$$

engendrent  $\mathbb{R}^s$ .

Autrement dit, pour tout  $H \in \mathcal{V}$ , l'application  $H|_{W \setminus \mathbb{D}^p}$  admet 0 comme valeur régulière.  $\square$

PROPOSITION 6.2.— Soit  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  une application correcte. Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $f$  dans  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$  tels que pour  $F \in \mathcal{V}$ ,  $F|_{U \setminus A}$  soit transversale à  $B$ .

PREUVE. A tout point  $x \in A$  on associe à l'aide de la Prop 6.1 un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_x$  de  $f$  tels que pour  $F \in \mathcal{V}_x$ ,  $F|_{V_x \setminus A}$  soit transversale à  $B$ .  $A$  étant compact, il existe

$$(x_1, \dots, x_r) \in A \quad \text{tels que} \quad A \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_r} .$$

Posons

$$U = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_r} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_{x_1} \cap \dots \cap \mathcal{V}_{x_r} .$$

$U$  est un voisinage ouvert de  $A$  et  $\mathcal{V}$  est un voisinage ouvert de  $f$ . Alors si  $F \in \mathcal{V}$ , on a  $F \in \mathcal{V}_{x_i}$  pour  $i = 1, \dots, r$ ; donc  $F|_{V_{x_i} \setminus A}$  est transversale à  $B$  pour  $i = 1, \dots, r$ ; par suite  $F|_{U \setminus A}$  est transversale à  $B$ .

□

PROPOSITION 6.3.— *Les applications excellentes de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  forment un ouvert dense de l'espace  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$  des applications de classe  $C^\infty$  de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$  muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. De plus si  $L$  est un fermé de  $X$ , si une application différentiable  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est excellente au voisinage de  $L$ , alors on peut l'approcher d'aussi près que l'on veut par une application excellente égale à  $f$  au voisinage de  $L$ .*

PREUVE.

a) *Montrons que le sous-espace étudié est un ouvert.*

Soit  $f$  une application excellente.  $f$  étant correcte, d'après la Prop 5.3, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  de  $f$  formé d'applications correctes. D'après la Prop 6.2 il existe un voisinage tubulaire fermé  $T$  de  $A$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $f$  avec  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$  tels que pour  $g \in \mathcal{V}$ ,  $g|_{T \setminus A}$  soit transversale à  $B$ .

$X \setminus \overset{\circ}{T}$  étant un fermé disjoint de  $A$ , les applications de  $X$  dans  $Y$  transversales à  $B$  en tout point de  $X \setminus \overset{\circ}{T}$  forment un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$ .  $f$  étant excellente appartient à  $\mathcal{O}$ . Par suite  $\mathcal{O} \cap \mathcal{V}$  est un voisinage ouvert de  $f$  formé d'applications excellentes.

b) *Montrons que le sous-espace étudié est dense.*

Soit  $f$  une application de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$ . D'après la Prop 5.3 on peut approcher  $f$  d'aussi près que l'on veut par une application correcte  $F$ . D'après la Prop 6.2 il existe un voisinage tubulaire fermé  $T$  de  $A$  dans  $X$  tel que  $F|_{T \setminus A}$  soit transversale à  $B$ . D'après un Théorème de transversalité de Thom, quitte à remplacer  $F$  par une application voisine,  $F|_{X \setminus A}$  est transversale à  $B$ . L'application  $F$  est encore correcte d'après la Prop 5.3 et par suite elle est excellente.

□

On note  $I = [0, 1]$  et l'on pose  $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$ .

DÉFINITION 6.2.— *On dit qu'une homotopie*

$$h = (h_t)_{t \in I} : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$$

est **excellente** si les applications  $h_0$  et  $h_1$  sont excellentes et si l'application  $h$  est excellente.

De la Prop 6.3 appliquée au fermé  $L = X \times \{0, 1\}$  découle la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4.— *Soient  $f$  et  $g$  deux applications excellentes de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$ . Alors toute homotopie*

$$h : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$$

de  $f$  dans  $g$  peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une homotopie excellente de  $f$  dans  $g$ .

## 7 Modèles de déformation d'applications simples

On construit dans ce paragraphe des modèles de déformation d'applications simples. Ces modèles permettent de déformer une application simple  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  en une application  $g$  sans point singulier normal et satisfaisant à  $g(X \setminus A) \cap B = \emptyset$ .

### 7.1 Construction d'un fibré vectoriel différentiel réel $\omega$ de rang 1.

*Soit  $D$  une variété compacte admettant  $S$  comme sous-variété fermée de codimension 1. On va donner une construction permettant d'associer au couple  $(D, S)$  un fibré vectoriel réel  $\omega$  de rang 1 et de base  $D$ , muni d'une section  $i : D \longrightarrow E(\omega)$  transversale à la section nulle.*

Soit  $T$  un voisinage tubulaire fermé de  $S$  dans  $D$ . On note  $p : T \longrightarrow S$  la projection de ce voisinage tubulaire. On construit  $\omega$  en recollant les fibrés vectoriels

$$\omega_{|D \setminus \overset{\circ}{T}} = (D \setminus \overset{\circ}{T}) \times \mathbb{R}$$

$$\omega_{|T} = p^*(\nu(D; S))$$

où  $\nu(D; S)$  désigne le fibré normal à  $S$  dans  $D$ . Les deux fibrés précédents se recollent sur  $\partial T$  car la restriction de  $p^*(\nu(D; S))$  à  $\partial T$  possède une section canonique partout non nulle puisque  $T = B(\nu(D; S))$ .

On définit maintenant une section

$$i : D \longrightarrow E(\omega)$$

du fibré  $\omega$  comme suit :

$$\begin{aligned} i(x) &= (x, 1) && \text{pour } x \in D \setminus \overset{\circ}{T} \\ i(x) &\text{ section canonique du fibré } p^*(\nu(D; S)) && \text{pour } x \in T . \end{aligned}$$

L'image réciproque par  $i$  de la section nulle de  $\omega$  est égale à  $S$ . Si l'on identifie à  $D$  la section nulle de  $\omega$ , on a une application entre paires d'espaces

$$i : (D, S) \longrightarrow (E(\omega), D)$$

telle que  $i^{-1}(D) = S$ . De plus  $i$  est transversale à  $D$ .

EXEMPLE 7.1.— Prenons  $D = \mathbb{S}^1$  le cercle unité,  $S = \{1\}$ . Dans ce cas le fibré  $\omega$  coïncide avec  $\lambda_1$  fibré vectoriel de Hopf de base  $\mathbb{S}^1$ , c'est-à-dire avec la bande de Moëbius. La section  $i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow E(\lambda_1)$  est une section transversale à la section nulle et elle coupe la section nulle en un seul point.

## 7.2 Construction d'un fibré vectoriel différentiel réel $\eta_\theta$ .

*On se donne un fibré vectoriel différentiel réel  $\eta$  de base  $D$  et un sous-fibré vectoriel  $\theta$  de  $\eta|_S$ . On va leur associer un fibré vectoriel différentiel réel  $\eta_\theta$  de base  $D$ , de même rang que  $\eta$ , et un morphisme de fibrés vectoriels*

$$\psi : \eta \longrightarrow \eta_\theta$$

*au-dessus de  $D$  tel que*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 && \text{pour tout } x \in E(\theta) \\ \psi(x) &\neq 0 && \text{pour tout } x \in E(\eta), x \notin E(\theta) . \end{aligned}$$

Le couple  $(\eta_\theta, \psi)$  sera caractérisé à isomorphisme près par la propriété universelle suivante : quels que soient le fibré vectoriel  $\lambda$  de base  $D$  et le morphisme  $\varphi : \eta \longrightarrow \lambda$  de fibrés vectoriels au-dessus de  $D$  tel que  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x \in E(\theta)$ , il existe un morphisme de fibrés vectoriels  $\zeta : \eta_\theta \longrightarrow \lambda$  et un seul tel que  $\varphi = \zeta \circ \psi$ .

On va prouver l'existence du couple  $(\eta_\theta, \psi)$ .

Supposons d'abord que  $S = \emptyset$ . Il suffit dans ce cas de prendre

$$\eta_\theta = \eta \quad , \quad \psi = id \quad .$$

Supposons maintenant que

$$\begin{aligned} D &= S \times \mathbb{R} \\ S &= S \times \{0\} \\ \eta &= (S \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \\ \theta &= (S \times \{0\}) \times \mathbb{R}^a \times \{0\} \end{aligned}$$

Alors on pose  $\eta_\theta = \eta$  et l'on définit  $\psi$  par

$$\psi(s, t, u, v) = (s, t, tu, v)$$

où  $s \in S$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^a$ ,  $v \in \mathbb{R}^b$ .

Prouvons que le couple  $(\eta_\theta, \psi)$  ainsi défini possède bien la propriété universelle. Il suffit pour cela de prouver l'existence et l'unicité de l'application  $\zeta$  localement au-dessus de  $D$ . Il suffit donc de considérer le cas  $\lambda = D \times \mathbb{R}$ . Mais alors se donner  $\varphi : \eta \longrightarrow \lambda$  revient à se donner une application

$$g : (S \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t, u, v) \longmapsto g(s, t, u, v)$$

linéaire par rapport à  $(u, v)$  et telle que

$$g(s, 0, u, 0) = 0 .$$

Ceci implique qu'il existe des fonctions  $\alpha_i, \beta_j$  de classe  $C^\infty$  telles que

$$g(s, t, u, v) = \sum_{i=1}^a \alpha_i(s, t) u_i + \sum_{j=1}^b \beta_j(s, t) v_j$$

$$\text{et } \alpha_i(s, 0) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, a .$$

Il existe donc des fonctions  $\gamma_i$  de classe  $C^\infty$  telles que

$$\alpha_i(s, t) = t \gamma_i(s, t) .$$

Par suite

$$g(s, t, u, v) = \sum_{i=1}^a \gamma_i(s, t) t u_i + \sum_{j=1}^b \beta_j(s, t) v_j .$$

Posons

$$h(s, t, u, v) = \sum_{i=1}^a \gamma_i(s, t) u_i + \sum_{j=1}^b \beta_j(s, t) v_j .$$

On a alors  $g = h \circ \psi$ . Si l'on définit  $\zeta : \eta \longrightarrow \lambda = D \times \mathbb{R}$  par  $\zeta(s, t, u, v) = (s, t, h(s, t, u, v))$  on a donc  $\varphi = \zeta \circ \psi$ . Par ailleurs l'unicité de  $\zeta$  est immédiate puisque  $\psi$  est un isomorphisme au-dessus de  $D \setminus S$ .

Revenons au cas général. On peut recouvrir  $D$  par une famille finie d'ouverts  $U$  tels que

$$(U, S \cap U, \eta|_U, \theta|_{U \cap S})$$

soit de l'une des 2 formes précédemment traitées. Au-dessus de  $U$  on a donc une solution et ces solutions se recollent grâce à la propriété universelle pour donner le couple  $(\eta_\theta, \psi)$ .

REMARQUE 7.1.— Au-dessus de  $D \setminus S$ , l'application  $\psi$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

REMARQUE 7.2.— Pour  $\eta = D \times \mathbb{R}$  et  $\theta = S \times \mathbb{R}$  on peut prendre  $\eta_\theta = \omega$  et  $\psi(d, t) = t i(d)$ , où  $i$  est l'inclusion de  $D$  dans  $E(\omega)$  définie au ¶7.1.

REMARQUE 7.3.— Même si  $\eta$ ,  $\theta$  et  $\nu(D; S)$  sont des fibrés vectoriels triviaux, le fibré vectoriel  $\eta_\theta$  peut ne pas être trivial. Prenons par exemple

$$D = \mathbb{S}^1, \quad S = \{1\}, \quad \eta = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad \theta = \{1\} \times \mathbb{R} .$$

Alors  $\eta_\theta = \omega$  est la bande de Moëbius.

REMARQUE 7.4.— Lorsque le sous-fibré vectoriel  $\theta$  du fibré  $\eta|_S$  se prolonge en un sous-fibré vectoriel  $\Theta$  du fibré  $\eta$ , on peut donner une construction plus simple du couple  $(\eta_\theta, \psi)$ .

Soit  $\rho$  un sous-fibré vectoriel de  $\eta$  tel que  $\eta = \Theta \oplus \rho$ .

On pose

$$\eta_\theta = \Theta \otimes \omega \oplus \rho$$

et l'on définit  $\psi : \eta \longrightarrow \eta_\theta$  par

$$\psi(x_d, y_d) = (x_d \otimes i(d), y_d)$$

où  $i : D \longrightarrow E(\omega)$  est la section de  $\omega$  définie au ¶7.1 .

### 7.3 Construction d'un modèle d'application simple.

On considère une variété compacte  $D$  sans bord,  $S$  une sous-variété fermée de codimension 1. Soit  $\eta$  un fibré vectoriel de base  $D$ , soit  $\theta$  un sous-fibré vectoriel de  $\eta|_S$ . Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de base  $D$  et soit  $j : \theta \longrightarrow \xi|_S$  un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $S$ , qui soit injectif sur chaque fibre. On note  $\varphi : \eta \longrightarrow \xi$  un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $D$  tel que  $\varphi|_{E(\theta)} = j$ .

Au couple  $(D, S)$  et aux fibrés vectoriels  $\eta, \theta$  sont associés au ¶7.2 un fibré vectoriel  $\eta_\theta$  de base  $D$  et un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $D$

$$\psi : \eta \longrightarrow \eta_\theta .$$

On considère l'application fibrée au-dessus de  $D$

$$\Gamma : (B(\eta), B(\theta)) \longrightarrow (E(\xi \oplus \eta_\theta), E(\xi))$$

définie par

$$\Gamma(x_d) = (\varphi(x_d), \psi(x_d)) \quad \text{où } d \in D .$$

On identifie dans l'espace source  $D$  à la section nulle de  $B(\eta)$ .

PROPOSITION 7.1.— *L'application différentiable*

$$\Gamma : (B(\eta), B(\theta)) \longrightarrow (E(\xi \oplus \eta_\theta), E(\xi))$$

*est un plongement et c'est une application simple. De plus on a les relations*

$$\Gamma^{-1}(E(\xi)) \setminus B(\theta) = D \setminus S \quad \text{et} \quad D \cap B(\theta) = S .$$

PREUVE. Prouvons d'abord que  $\Gamma$  est un plongement. Comme  $\Gamma$  est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $D$ , il suffit de prouver que  $\Gamma$  est injectif sur chaque fibre. Soit  $x_d \in E(\eta)$  avec  $x_d \neq 0_d$ . Si  $x_d \in E(\theta)$ , on a  $\varphi(x_d) = j(x_d) \neq 0_d$  car  $j$  est injectif sur chaque fibre. Si  $x_d \in E(\eta) \setminus E(\theta)$ , on a  $\psi(x_d) \neq 0$  d'après la construction de  $\psi$ .

Le morphisme  $\psi$  étant un isomorphisme au-dessus de  $D \setminus S$ , l'application  $\Gamma$  restreinte à  $B(\eta) \setminus B(\theta)$  est transversale à  $E(\xi)$ .

Au-dessus d'un voisinage dans  $D$  d'un point de  $S$ ,  $\psi$  est de la forme

$$\psi(s, t, u, v) = (s, t, tu, v)$$

avec  $s \in S$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^a$ ,  $v \in \mathbb{R}^b$  et aussi  $(s, t) \in D$ ,  $(s, u) \in E(\theta)$ ,  $(s, t, u, v) \in E(\eta)$ .

L'application  $\varphi$  est de la forme

$$\varphi(s, t, u, v) = (s, t, u, h(s, t, u, v))$$

où  $h$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .

Par suite  $\Gamma$  est de la forme

$$\Gamma(s, u; t, v) = (s, t, u, h(s, t, u, v); tu, v) .$$

Les points singuliers normaux de  $\Gamma$  sont donc solution du système

$$\begin{cases} t = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial(tu)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire du système  $t = 0, v = 0, u = 0$ . Par suite ce sont des points singuliers normaux simples.

□

REMARQUE 7.5.— Considérons l'application

$$f : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

donnée par la forme réduite d'un point singulier normal (cf.Prop 3.3), c'est-à-dire par

$$f(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) = (u_1, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, u_1 v_1, \dots, u_{s-r+1} v_1) .$$

On peut mettre cette application sous une forme analogue à celle de l'application  $\Gamma$  ci-dessus en prenant dans la source

$$\begin{aligned} D &= \{ (0, \dots, 0, u_{s-r+2}, \dots, u_p; v_1, 0, \dots, 0) \} \\ S &= \{ (0, \dots, 0, u_{s-r+2}, \dots, u_p; 0, 0, \dots, 0) \} \\ E(\theta) &= \{ (u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p; 0, 0, \dots, 0) \} = \mathbb{R}^p \\ E(\eta) &= \{ (u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) \} = \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

et dans le but

$$\begin{aligned} D &= \{ (0, \dots, 0, U_{s-r+2}, \dots, U_p, U_{p+1}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0) \} \\ S &= \{ (0, \dots, 0, U_{s-r+2}, \dots, U_p, 0, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0) \} \\ E(\eta_\theta) &= \{ (0, \dots, 0, U_{s-r+2}, \dots, U_p, U_{p+1}, 0, \dots, 0; V_1, \dots, V_s) \} \\ E(\xi) &= \{ (U_1, \dots, U_{s-r+1}, U_{s-r+2}, \dots, U_p, U_{p+1}, U_{p+2}, \dots, U_q; 0, \dots, 0) \} = \mathbb{R}^q . \end{aligned}$$

On prend pour applications  $j, \varphi, \psi$ , les applications données par

$$\begin{aligned} j(u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p; 0, \dots, 0) &= (u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p, 0, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0) \\ \varphi(u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p; v_1, v_2, \dots, v_r) &= (u_1, \dots, u_{s-r+1}, u_{s-r+2}, \dots, u_p, v_1, 0, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0) \\ \psi(u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_r) &= (0, \dots, 0, u_{s-r+2}, \dots, u_p, v_1, 0, \dots, 0; v_2, \dots, v_r, u_1 v_1, \dots, u_{s-r+1} v_1) . \end{aligned}$$

#### 7.4 Construction d'un modèle élémentaire de déformation d'application simple.

On considère une variété différentielle compacte  $D'$  de bord  $D$ . Soit  $S'$  une sous-variété fermée de  $D'$  de codimension 1, de bord  $S = S' \cap D$ , cette intersection étant transversale. Soit  $D'_1$  la variété obtenue à partir de  $D'$  en ajoutant un collier  $\partial D' \times [0, 1]$  le long de son bord. On introduit de même  $S'_1 \subset D'_1$  à partir de  $S'$ .

On note  $\omega'_1$  le fibré vectoriel de rang 1 et de base  $D'_1$  associé à  $(D'_1, S'_1)$  par la construction du ¶7.1. On note  $i'_1$  la section de ce fibré définie au ¶7.1. On note  $T'_1$  un voisinage tubulaire fermé de  $S'_1$  dans  $D'_1$ .

On considère une fonction différentiable

$$\lambda : D'_1 \longrightarrow ]-1, +1[$$

admettant 0 comme valeur régulière et telle que

$$\lambda^{-1}(0) = D, \quad \lambda(D') \subset [0, 1[, \quad \lambda(D'_1 \setminus D') \subset ]-1, 0[ .$$

On lui associe l'application fibrée au-dessus de  $D'_1$

$$\gamma : (D'_1, S'_1) \longrightarrow (E(\omega'_1), D'_1)$$

définie par

$$\gamma(d) = \lambda(d) i'_1(d)$$

pour tout  $d \in D'_1$ .

PROPOSITION 7.2. — *L'application différentiable*

$$\gamma : (D'_1, S'_1) \longrightarrow (E(\omega'_1), D'_1)$$

**est un plongement et c'est une application simple.** De plus on a

$$\gamma^{-1}(D'_1) \setminus S'_1 = D \setminus S .$$

Pour tout voisinage  $V$  de  $D'$  dans  $D'_1$ , l'application  $\gamma$  est différentiablement homotope par une homotopie  $\gamma_\sigma$  ( $\sigma \in [0, 1]$ ) fixe en dehors de  $V$  et respectant la projection sur  $D'_1$ , à une application  $\gamma_1$  **sans point singulier normal** et telle que

$$(1) \quad \gamma_1(D'_1 \setminus S'_1) \cap D'_1 = \emptyset .$$

PREUVE.

1) Montrons que l'application  $\gamma$  est simple.

Au voisinage d'un point de  $D'_1 \setminus S'_1$ , l'application  $\gamma$  est de la forme

$$\gamma(d) = (d; \lambda(d))$$

avec  $d \in \mathbb{R}^{k+1}$  où  $k = \dim D$ . Comme 0 est une valeur régulière de  $\lambda$ , il en résulte qu'en un tel point  $\gamma$  est transversale à la section nulle de  $\omega'_1$ .

Au voisinage d'un point de  $S'_1$ , l'application  $\gamma$  est de la forme

$$\gamma(u; v) = (u, v; \lambda(u, v) v)$$

avec  $u \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{R}$ , la sous-variété  $S'_1$  correspondant à  $v = 0$ . Les points singuliers normaux de  $\gamma$  sont donc définis par  $v = 0, \lambda(u, 0) = 0$ ; ce sont donc les éléments de  $S$  et ce sont des points singuliers normaux simples vu les hypothèses faites sur  $\lambda$ .

2) Exhibons une homotopie  $\gamma_\sigma$  ayant les propriétés voulues.

Soit  $\pi : D'_1 \longrightarrow [0, 1]$  une fonction différentiable nulle en dehors de  $V$  et égale à 1 sur  $D'$ . Il suffit de définir  $\gamma_\sigma$  ( $\sigma \in [0, 1]$ ) par

$$\gamma_\sigma(d) = (\lambda(d) - \pi(d) \sigma) i'_1(d) \quad \text{pour tout } d \in D'_1 .$$

L'application  $\gamma_1$  n'a plus de points singuliers normaux et satisfait à la condition (1) car on a

$$\lambda(d) - \pi(d) < 0 \quad \text{pour tout } d \in D'_1 .$$

□

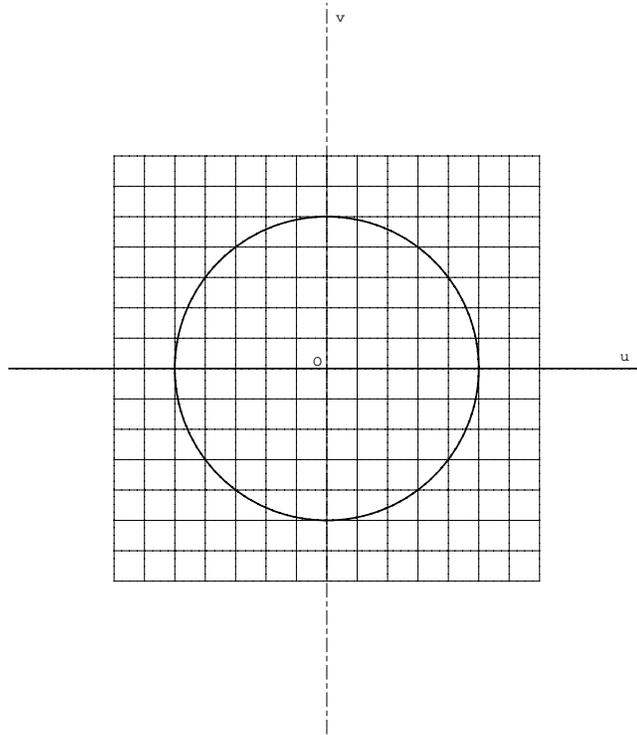
EXEMPLE 7.2.— On considère l'application

$$f : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

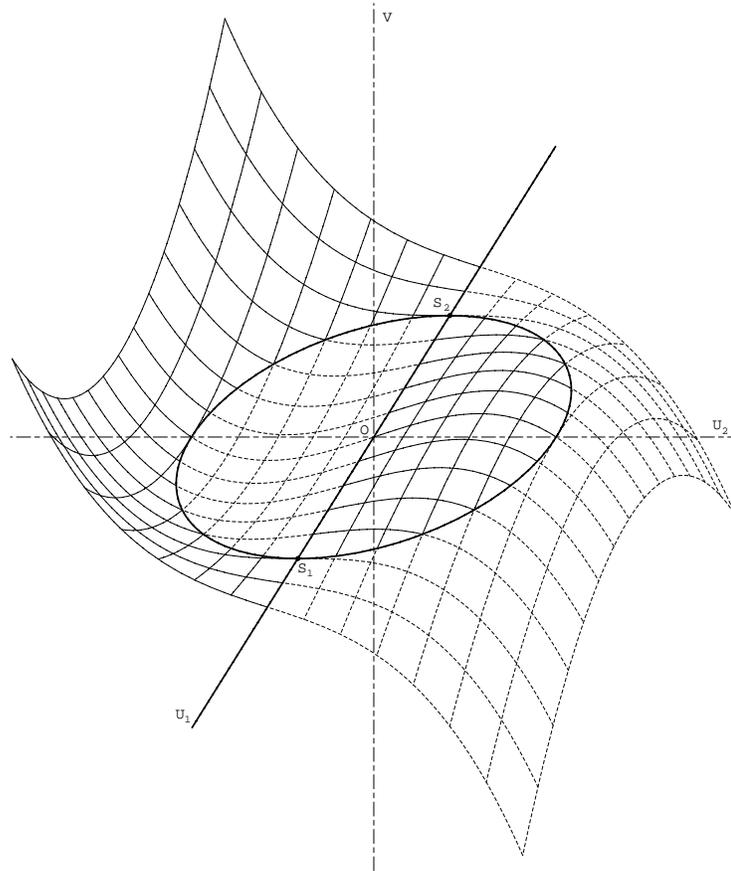
définie par

$$f(u; v) = (u, v; v(1 - u^2 - v^2)) .$$

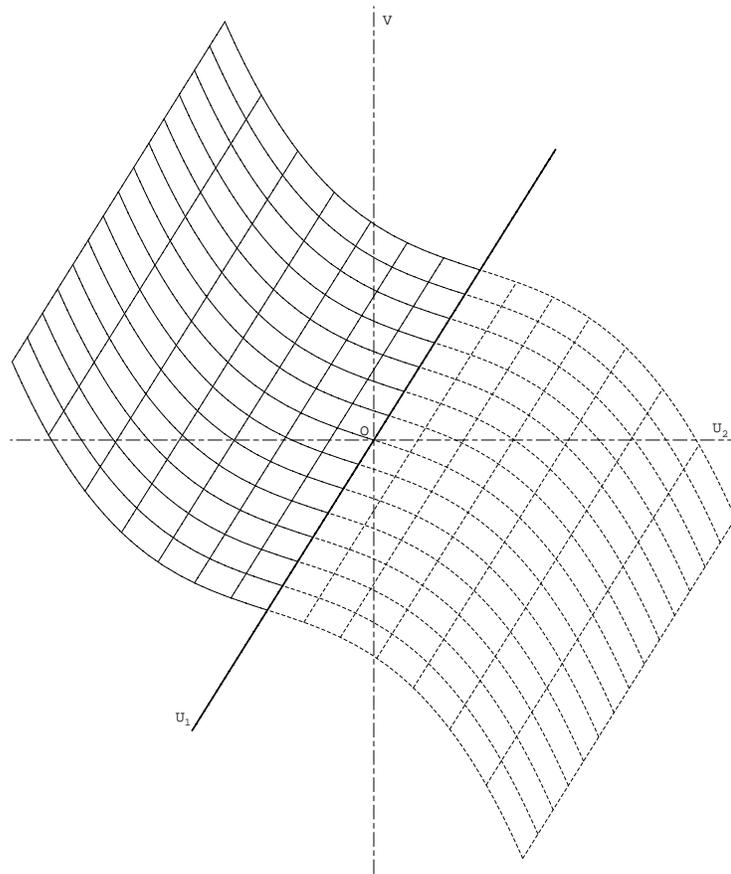
L'application  $f$  possède 2 points singuliers normaux simples  $S_1$  et  $S_2$ . Le graphe de l'application  $f$  est représenté sur le figure 2 ci-après. On peut déformer  $f$  pour éliminer les points singuliers normaux simples et obtenir une application dont le graphe est représenté sur le figure 3 ci-après.



**figure 1** : cette figure illustre l'exemple 7.2 en représentant la source de l'application  $f$ . Le cercle et l'axe  $Ou$ , en traits gras, ont leurs images situées dans le plan  $OU_1U_2$ . Les segments horizontaux ou verticaux de la figure sont ceux dont on voit l'image par  $f$  sur la figure 2.



**figure 2 :** cette figure illustre l'exemple 7.2 en représentant le graphe de l'application  $f$ . L'ellipse et l'axe  $OU_1$ , en traits gras, sont l'intersection du graphe avec le plan  $OU_1U_2$ . La partie du graphe située en dessous du plan  $OU_1U_2$  figure en pointillés. L'axe  $OU_1$  coupe l'ellipse suivant les points singuliers normaux simples  $S_1$  et  $S_2$ . Le modèle de déformation consiste à pousser vers le haut la partie du graphe située à gauche du plan  $OU_1V$ ; cette déformation entraîne la disparition de l'ellipse et des 2 points singuliers normaux.



**figure 3 :** cette figure illustre l'exemple 7.2. Elle représente le graphe de l'application  $f$  après qu'elle ait subi la déformation. L'intersection du graphe avec le plan  $OU_1U_2$  est réduite à l'axe  $OU_1$ . Il n'y a plus de points singuliers normaux.

Cette application est simple [mis à part que l'espace source n'est pas compact, mais on pourrait se restreindre au carré fermé  $|u| \leq 2, |v| \leq 2$ ]. L'application  $f$  possède **deux points singuliers normaux simples**, à savoir les points  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  d'images notées  $S_1 = (1, 0, 0)$  et  $S_2 = (-1, 0, 0)$ . De plus la sous-variété  $D$  de la source  $\mathbb{R}^2$  coïncide avec le cercle unité.

La figure 1 représente l'espace source de  $f$ , la figure 2 représente l'image de  $f$ . On a dessiné en trait gras l'intersection avec le plan  $OU_1U_2$  de l'image de  $f$ . Cette intersection comprend l'axe  $OU_1$  ainsi que le cercle unité du plan  $OU_1U_2$ .

On peut déformer  $f$  en une application  $f_1$  ne possédant plus de points singuliers normaux et telle que  $f_1^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ , au moyen de l'homotopie définie par

$$f_\sigma(u; v) = (u, v; v(1 - 2\sigma - u^2 - v^2))$$

avec  $\sigma \in [0, 1]$ . La figure 3 représente l'image de  $f_1$ . La déformation  $f_\sigma$  est un cas particulier de la déformation  $\gamma_\sigma$ . La variété  $D'$  est le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  et  $S' = [-1, 1] \times \{0\}$ .

## 7.5 Construction d'un modèle de déformation d'application simple.

Le modèle de déformation  $\gamma_\sigma$  permet de déformer certaines applications simples

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

en une application  $g$  sans point singulier normal et satisfaisant à  $g(X \setminus A) \cap B = \emptyset$ ; l'application  $f$  doit en particulier satisfaire aux conditions de dimensions

$$r = s = 1, \quad q = p + 1.$$

Nous allons construire un modèle de déformation  $\Gamma_\sigma$  plus général qui n'exigera pas ces restrictions sur les dimensions. Ce modèle sera obtenu en grossissant le modèle de déformation  $\gamma_\sigma$ .

On se donne des entiers naturels  $p, q, r, s$  satisfaisant à

$$\begin{aligned} 1 &\leq r \leq s \\ p &\leq q - 1 \\ s &\leq p + r + 1 \end{aligned}$$

On note  $m = p + r$  et  $n = q + s$ .

On considère comme précédemment un couple  $(D', S')$ , la variété  $D'$  étant supposée de dimension  $m - s + 1$ . On considère des fibrés vectoriels réels  $\eta^{s-1}, \xi^{n-m-1}$  de base  $D'_1$  et un sous-fibré vectoriel  $\theta^{s-r}$  de  $\eta^{s-1}|_{S'_1}$ . On se donne aussi un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $S'_1$

$$j : \theta \longrightarrow \xi|_{S'_1}$$

qui soit injectif sur chaque fibre. Soit

$$\varphi : \eta \longrightarrow \xi$$

un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $D'_1$ , prolongeant  $j$ .

Au couple  $(D'_1, S'_1)$  est associé au ¶7.1 un fibré vectoriel  $\omega'$  de rang 1 et une application  $i' : D'_1 \longrightarrow E(\omega'_1)$ .

Au couple  $(D'_1, S'_1)$  et aux fibrés vectoriels  $\eta$ ,  $\theta$  sont associés au ¶7.2 un fibré vectoriel  $\eta_\theta$  de base  $D'_1$  et un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de  $D'_1$

$$\psi : \eta \longrightarrow \eta_\theta .$$

On considère l'application fibrée au-dessus de  $D'_1$

$$\Gamma : (B(\eta), B(\theta)) \longrightarrow (E(\xi \oplus \omega'_1 \oplus \eta_\theta), E(\xi))$$

définie par

$$\Gamma(x_d) = (\varphi(x_d); \gamma(d), \psi(x_d)) \text{ pour } d \in D'_1, x_d \in B(\eta) ,$$

où  $\gamma$  est l'application définie au ¶7.4 .

On a

$$\begin{aligned} \dim E(\theta) &= \dim S' + \text{rg } \theta = p \\ \dim E(\eta) &= \dim D' + \text{rg } \eta = m \\ \dim E(\xi) &= \dim D' + \text{rg } \xi = q \\ \dim E(\xi \oplus \omega'_1 \oplus \eta_\theta) &= \dim D' + \text{rg } \xi + 1 + \text{rg } \eta = n . \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.3.— *L'application différentiable*

$$\Gamma : (B(\eta), B(\theta)) \longrightarrow (E(\xi \oplus \omega'_1 \oplus \eta_\theta), E(\xi))$$

**est un plongement et c'est une application simple.** De plus on a les relations

$$\Gamma^{-1}(E(\xi) \setminus B(\theta)) = D \setminus S \quad \text{et} \quad D \cap B(\theta) = S .$$

Pour tout voisinage  $V$  de  $D'$  dans  $B(\eta)$ , l'application  $\Gamma$  est différentiablement homotope par une homotopie  $\Gamma_\sigma$  ( $\sigma \in [0, 1]$ ) fixe en dehors de  $V$  et respectant la projection sur  $D'_1$ , à une application  $\Gamma_1$  sans point singulier normal et telle que

$$(2) \quad \Gamma_1(B(\eta) \setminus B(\theta)) \cap E(\xi) = \emptyset .$$

PREUVE.

1) Montrons que l'application  $\Gamma$  est simple.

L'application  $\Gamma$  est un plongement et l'on a les relations

$$\Gamma^{-1}(E(\xi) \setminus B(\theta)) = D \setminus S \quad \text{et} \quad D \cap B(\theta) = S .$$

Etudions d'abord  $\Gamma$  au-dessus d'un voisinage dans  $D'_1$  d'un point de  $D'_1 \setminus S'_1$ . Au voisinage d'un tel point,  $\Gamma$  est de la forme

$$\Gamma(d, x) = (d, h(d, x); \lambda(d), x)$$

où  $d \in D'_1$ ,  $(d, x) \in E(\eta)$  où  $h$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et où  $\lambda$  est l'application considérée au ¶7.4 . Par suite comme 0 est une valeur régulière de  $\lambda$ , l'application  $\Gamma$  est transversale à la sous-variété  $E(\xi)$  du but.

Etudions maintenant  $\Gamma$  au-dessus d'un voisinage dans  $D'_1$  d'un point de  $S'_1$ . Au voisinage d'un tel point, un point  $d \in D'_1$  peut s'écrire  $d = (s, t)$ , les points de  $S'_1$  correspondant à  $t = 0$  . Et l'application  $\Gamma$  est de la forme

$$\Gamma(s, x; t, y) = (d, x, h(d, x, y); t \lambda(d), tx, y)$$

où  $d \in D'_1$ ,  $(s, x) \in B(\theta)$ ,  $(d, x, y) \in B(\eta)$  et où  $h$  est une fonction de classe  $C^\infty$  .

Les points singuliers normaux de  $\Gamma$  sont donc solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ y = 0 \\ \frac{\partial(tx)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial(t\lambda(s, t))}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$t = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad \lambda(s, 0) = 0 .$$

Par suite l'ensemble des points singuliers normaux est  $D \cap S'_1 = S$  . Et comme 0 est une valeur régulière de  $\lambda$ , il en résulte que ce sont des points singuliers normaux simples.

2) Exhibons une homotopie ayant les propriétés voulues.

Soit  $\pi : E(\eta) \rightarrow [0, 1]$  une fonction différentiable nulle en dehors de  $V$  et égale à 1 sur  $D'$ . Il suffit de définir  $\Gamma_\sigma$  ( $\sigma \in [0, 1]$ ) par

$$\Gamma_\sigma(x_d) = (\varphi(x_d); \gamma_\sigma(d), \psi(x_d))$$

où

$$\gamma_\sigma(d) = (\lambda(d) - \pi(x_d)\sigma) i'_1(d) \quad \text{pour tout } d \in D'_1 .$$

L'application  $\Gamma_1$  n'a plus de points singuliers normaux et satisfait à la condition

$$\Gamma_1(E(\eta) \setminus E(\theta)) \cap E(\xi) = \emptyset$$

car on a

$$\lambda(d) - \pi(0_d) < 0 \quad \text{pour tout } d \in D'_1 .$$

**Références**

- [1] H. Cartan : *Topologie différentielle*. Sémin. H. Cartan, 12 (1961/62), exposé 6.
- [2] J.-P. Dax : *Étude homotopique des espaces de plongements*. Ann. Sci. Èc. Norm. Supér. (4) 5, 303-377 (1972). MSC2000 : 58D10, 57R90, 57R40.
- [3] J.-P. Dax : *Points singuliers normaux, points singuliers normaux simples et modèles d'élimination*. C. R. Acad. Sci., Paris, Sr. I 315, No.3, 315-319 (1992). MSC2000 : 57R45.

*DAX Jean-Pierre, Professeur de Mathématiques à l'Université Paul Verlaine de Metz*

*UFR MIM, Département de Mathématiques*

*Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz*

*Unité Mixte de Recherche n° 7122 du CNRS*

*Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 1, France*

## Index

- 1-jet de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$ , 3  
1-jet normal de  $(X, A)$  dans  $(Y, B)$ , 3
- application correcte, 22  
application correcte en un point, 21  
application excellente, 24  
application semi-simple, 12  
application simple, 12  
     $(AS1)$ ,  $(AS2)$ , 12  
     $(AS3)$ ,  $(AS4)$ , 12
- base, 4  
     $(e_1, \dots, e_n)$  base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , 4
- carte normale, 9  
composantes, 4  
    1.  $u = (u_1, \dots, u_p)$ , 4  
    2.  $v = (v_1, \dots, v_r)$ , 4  
    3.  $x = (u; v)$  avec  $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ , 4  
    4.  $U = (U_1, \dots, U_p)$ , 4  
    5.  $V = (V_1, \dots, V_r)$ , 4  
    6.  $X = (U; V)$  avec  $U_i, V_j \in \mathbb{R}$ , 4  
    7.  $g = (g_1, \dots, g_q)$ , 4  
    8.  $h = (h_1, \dots, h_s)$ , 4  
    9.  $f = (g; h)$ , 4
- fibrés vectoriels, 3  
     $B(\xi)$ , 3  
     $E(\xi)$ , 3  
     $\dot{E}(\xi)$ , 3  
     $\tau X$ , 3  
     $\tau_A X$ , 3
- homotopie correcte, 24  
homotopie excellente, 27
- modèle de déformation, 27  
    1.  $(D, S)$ ,  $\omega$ ,  $i$ , 27  
    2.  $i : D \rightarrow E(\omega)$ , 27  
    3.  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\eta|_S$ ,  $\eta_\theta$ , 28  
    4.  $\psi : \eta \rightarrow \eta_\theta$ , 28  
    5.  $\xi$ , 30  
    6.  $j : \theta \rightarrow \xi|_S$ , 30
7.  $\varphi : \eta \rightarrow \xi$ , 30  
8.  $\Gamma : (B(\eta), B(\theta)) \rightarrow (E(\xi \oplus \eta_\theta), E(\xi))$ , 30
- point régulier normal, 3  
point singulier normal, 3  
point singulier normal non dégénéré, 19  
point singulier normal semi-simple, 12  
point singulier normal simple, 12  
     $(NS1)$ ,  $(NS2)$ , 12  
     $(NS3)$ , 12
- première dérivée de  $f$ , 4  
première dérivée normale de  $f$ , 3
- rang normal de  $f$  au point  $a \in A$ , 3
- singularités normales, 3  
     $(TN1)$ ,  $(TN2)$ ,  $(TN3)$ , 6  
     $JN^1(X, A; Y, B)$ , 3  
     $J^1(X, A; Y, B)$ , 3  
     $N_l$ ,  $R$ ,  $S$ , 6  
     $f^1 : A \rightarrow J^1(X, A; Y, B)$ , 4  
     $f_A : E(\tau_A X / \tau A) \rightarrow E(\tau_B Y / \tau B)$ , 3  
     $f_\nu^1 : A \rightarrow JN^1(X, A; Y, B)$ , 3  
     $\pi : J^1(X, A; Y, B) \rightarrow JN^1(X, A; Y, B)$ , 4  
     $\text{rg}_a(f)$ , 3  
     $\text{rgn}_a(f)$ , 3  
     $\mathcal{L}(\tau_x X, \tau_x A; \tau_y Y, \tau_y B)$ , 3  
     $\mathcal{L}(\tau_x X / \tau_x A, \tau_y Y / \tau_y B)$ , 3
- variétés, 1  
     $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , 1  
     $\mathcal{C}^\infty(X, A; Y, B)$ , 5

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les points singuliers normaux</b>	<b>3</b>
<b>2 Points réguliers normaux</b>	<b>10</b>
<b>3 Points singuliers normaux simples</b>	<b>13</b>
<b>4 Points singuliers normaux non dégénérés de fonctions</b>	<b>22</b>
<b>5 Définition et étude des applications correctes</b>	<b>24</b>
<b>6 Définition et étude des applications excellentes</b>	<b>27</b>
<b>7 Modèles de déformation d'applications simples</b>	<b>31</b>
7.1 Construction d'un fibré vectoriel différentiel réel $\omega$ de rang 1 . . . . .	31
7.2 Construction d'un fibré vectoriel différentiel réel $\eta_\theta$ . . . . .	32
7.3 Construction d'un modèle d'application simple. . . . .	34
7.4 Construction d'un modèle élémentaire de déformation d'application simple. . . . .	36
7.5 Construction d'un modèle de déformation d'application simple. . . . .	41