HAL
open science

Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix

Denis Bouhineau, Hamid Chaachoua, Jean-François Nicaud, Christophe Viudez

To cite this version:

Denis Bouhineau, Hamid Chaachoua, Jean-François Nicaud, Christophe Viudez. Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix. Jun 2007. hal-00161603

HAL Id: hal-00161603

https://hal.science/hal-00161603v1

Submitted on 11 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix

Représentations sous forme mixte Naturelle & Arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques

Denis Bouhineau, Hamid Chaachoua, Jean-François Nicaud & Christophe Viudez

Université de Grenoble
Laboratoire LIG (Laboratoire Informatique de Grenoble)
Équipe MeTAH (Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain)
46 Av F. Viallet
38031 Grenoble Cedex
E-Mail: Prénom.Nom@imag.fr

RÉSUMÉ: *Dans le cadre du projet Européen ReMath, nous avons entrepris d'introduire deux nouvelles représentations des expressions algébriques dans le micromonde Aplusix : une représentation mixte Naturelle & Arbre mêlant la représentation naturelle en deux dimensions des expressions algébriques avec une représentation en arbre, et une représentation graphique dans le plan des fonctions et sur la droite des ensembles de solutions des équations. Notre travail emprunte une démarche traditionnelle centrée sur la définition de nouveaux objets et fonctionnalités, programmant phase de spécification, phase de développement et phase de tests, combinée avec une approche orientée expérimentation prenant en compte les futures expérimentations croisées prévues dans le projet ReMath. Les questions et solutions émergeantes sont présentées concernant en particulier l'importance des possibilités en édition et en manipulation directe que ces nouvelles représentations peuvent apporter, la distance entre représentation interne et représentation externe dans un micromonde, le statut des objets et des représentations dans ce même cadre et les apports pour la visualisation de l'équivalence entre expressions (rétroaction sémantique fondamentale au cœur d'Aplusix).*

MOTS-CLÉS : *algèbre, arbre, graphique, courbe, solution, représentation, édition expérimentation, scénario.*

Introduction

En décembre 2005 a commencé le projet Européen IST 4-26751 intitulé ReMath. ReMath est un acronyme anglo-saxon (Representing Mathematics with Digital Media [ReMath]) que l'on pourrait traduire assez fidèlement en français mot à mot par Représenter les mathématiques avec des médias numériques.

Ce projet regroupe 7 équipes de recherches en didactique des mathématiques et conception d'environnements d'apprentissage humain. Pour la plupart, ces équipes appartenaient auparavant à l'équipe de recherche européenne TELMA [Telma] du réseau d'excellence Kaléidoscope [Kaleidoscope] et ont développé ou étudié des environnements d'apprentissage des mathématiques possédant chacun sa manière de représenter des objets mathématiques.

L'objectif premier de ce projet consiste à introduire dans les environnements informatiques préexistants au projet, ceux développés précédemment par les partenaires du projet, de nouvelles représentations pour les objets mathématiques manipulés. Le second objectif de ce projet porte sur la définition de scénarios d'utilisation de ces différents environnements engageant au moins deux de ces environnements. Le troisième objectif de ce projet concerne le volet expérimental de notre domaine de recherche en visant des expérimentations croisées en milieu écologique.

Notre équipe travaille depuis maintenant un temps respectable sur l'environnement Aplusix d'enseignement de l'algèbre élémentaire [NIC 04]. Elle a choisi de participer au projet ReMath parce qu'elle trouvait dans l'objectif premier de ce projet l'occasion d'introduire dans son environnement d'apprentissage d'autres représentations des expressions algébriques : une représentation en arbre et une représentation graphique. De plus, nous avions été convaincus par le travail sur les expérimentations entrepris dans TELMA et souhaitions poursuivre ce travail lors des expérimentations croisées programmées dans ReMath.

Ce travail, effectué sur les expérimentations, indépendant des environnements et d'un objectif de tests de ces environnements ou de (nouvelles) représentations, mérite que l'on s'y attarde un instant. Entre 2005 et 2006, l'équipe TELMA a travaillé à la définition d'un manuel pour la réalisation d'expérimentations d'environnement informatiques d'apprentissage humain en vue d'études didactiques [CEG 05]. À l'occasion de ce travail, un protocole innovant d'expérimentations croisées a été mis en place : chaque partenaire de TELMA était amené à conduire l'une de ses expérimentations didactiques avec l'un des environnements développé par l'un des autres partenaires et à en référer à l'ensemble des membres de TELMA. Le choix de l'environnement et de l'expérimentation était laissé libre. Ces expérimentations avaient pour objectifs de révéler en particulier la prégnance des cadres théoriques (théories des situations didactiques, approche anthropologique,

constructivisme, cognitivisme… [ART05]) utilisés, d'une part, côté conception, implicitement par les équipes développant les environnements, d'autre part, côté didactique, explicitement par les équipes procédant à la mise en place d'expérimentations et d'analyses.

Ce protocole innovant s'est révélé particulièrement fructueux, montrant effectivement l'existence de différents cadres théoriques de recherche et permettant d'établir le manuel d'expérimentation envisagé, mais surtout révélant, d'une part, les différences et compatibilités réelles entre ces différents cadres de travail théorique et faisant la preuve, d'autre part, de la capacité de chaque environnement de travail à pouvoir être utilisé, ou non, dans un autre cadre théorique que celui prévu par ses concepteurs. Le double succès de ce travail est dû, à notre avis, en particulier à la confrontation effective qui s'est déroulée à distance entre les différents cadres théoriques, chaque équipe continuant à travailler dans son propre cadre théorique : les chercheurs faisant les expérimentations n'étant pas ceux qui ont participé à la conception des environnements, ne partageant ni une culture locale, ni un objectif commun ; concepteurs et didacticiens interagissant à distance et profitant chacun du travail des autres.

Par ailleurs, nous ne pouvons qu'observer les avantages d'un cadre de travail à caractère contraignant privilégiant un travail d'équipe à un niveau européen : (1) obligeant ses membres à expérimenter le travail des autres, ce qu'ils n'auraient probablement pas faits sinon et (2) planifiant la rédaction et publication au sein de ces équipes des résultats de ces travaux, même négatifs, ce qui n'aurait pas été fait de la même manière sinon.

Ainsi, en même temps que commençait la définition de nouvelles représentations pour nos expressions algébriques, nous avons conduit une réflexion sur de futurs scénarios d'expérimentations croisées. Bien sûr, pendant un temps, tant que ces nouvelles représentations n'étaient pas disponibles, cela a été purement théorique, mais notre travail de spécification et de conception de ces nouvelles représentations s'en est malgré tout trouvé imprégné.

La suite de cette proposition de communication comporte trois parties. La première situe notre travail dans le contexte du micromonde Aplusix et introduit la représentation des expressions algébriques utilisée jusqu'alors dans cet environnement : une représentation *naturelle* en deux dimensions semblable à celles utilisée sur le papier et au tableau. La seconde porte sur l'introduction d'une nouvelle représentation des expressions algébriques sous forme d'arbres : une représentation mixte pouvant mêler la représentation naturelle des expressions et une représentation de leur structure sous forme d'arbre. Cette partie occupe une plus grande place dans notre communication car c'est celle dont le travail est le plus novateur et le plus abouti, du fait du planning du projet ReMath. La dernière partie porte sur l'introduction d'une nouvelle représentation des expressions algébriques et solutions d'équations sous forme graphique à l'aide de courbes et de projections sur la droite réelle.

Pour ces deux dernières parties, les motivations pour l'introduction de ces nouvelles représentations, les questions que nous nous sommes posés, les réponses

que nous avons apportées et l'intégration dans Aplusix en vue d'expérimentation sont discutées. Trois copies d'écran sont également données, une pour chaque représentation, à des fins de comparaison.

1. Aplusix, représentation naturelle des expressions algébriques.

L'environnement Aplusix a été conçu initialement en 2000 comme un micromonde pour pratiquer l'algèbre au lycée et au collège, ou plus modestement comme un éditeur d'expressions algébriques élémentaires offrant diverses rétroactions syntaxiques et sémantiques. Dès les premières versions d'Aplusix [BOU 01, NIC 02], les questions relatives à la représentation et la manipulation des expressions algébriques étaient au centre de nos préoccupations, comme il se doit dans un micromonde. Les développements entrepris en 2004 ont substantiellement transformé Aplusix, le micromonde devenant plutôt un exerciseur pour faciliter son intégration en classe, en lui adjoignant un éditeur d'exercices et un module de génération automatique d'exercices. Cependant la composante d'édition et de manipulation d'expressions algébriques qui constituait le micromonde resta au cœur de l'environnement résultat, et les questions relatives à la représentation, à l'édition de ces objets continuèrent d'influencer notre travail.

Le travail de l'élève dans Aplusix consiste à résoudre, comme sur le papier, divers problèmes algébriques, en écrivant les différentes étapes de son raisonnement. Pour cela, l'élève doit travailler par équivalence et, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression initiale. L'élève a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de l'étape courante et la forme de son raisonnement (le raisonnement n'est pas nécessairement linéaire). Cette grande liberté autorise des raisonnements n'aboutissant pas, progressant lentement vers une solution ou s'en éloignant, l'introduction d'expressions algébriques non équivalentes à l'expression initiale, mal formée, ou en cours de définition.

Pour favoriser l'apprentissage de l'algèbre, lors des phases d'entraînements, Aplusix fournit des rétroactions, en particulier deux rétroactions fondamentales : tout d'abord, l'équivalence algébrique entre étapes est calculée en permanence et affichée de manière non intrusive, ensuite quand l'élève décide que l'exercice est terminé, une vérification syntaxique, épistémique et didactique de la forme de l'expression solution de l'élève est effectuée et les résultats sont affichés. Pendant les phases de tests, ces rétroactions ne sont plus accessibles. Elles réapparaissent dans une phase postérieure d'autocorrection.

Depuis le début nous représentons les expressions algébriques à l'écran de façon naturelle, c'est-à-dire comme elles sont représentées sur papier et au tableau, cf. figure 1. Une part importante de notre travail initial a été consacrée à la mise en œuvre de cette représentation naturelle et à la spécification de la manière dont l'édition de ces expressions puisse se réaliser de la façon la plus intuitive possible tout en restant au maximum mathématique. Ce travail a été décrit dans [NIC 04].

Lors de la réalisation de cette première version d'Aplusix, une approche traditionnelle pour le génie logicielle a été suivi : (1). Phase de spécification, (2). Phase de développement, (3). Phase de test, et retour en (1) pour la modification de certaines fonctionnalités et l'ajout de nouvelles fonctionnalités.

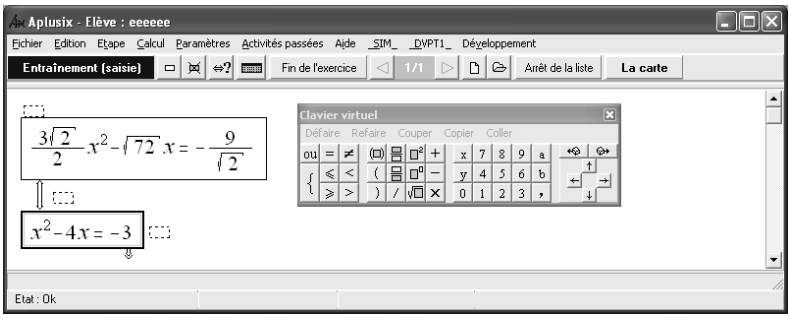

Figure 1: *Représentation naturelle d'expressions algébriques dans Aplusix.*

2. Introduction d'une représentation mixte Naturelle & Arbre.

2.0. Motivations pour l'introduction d'une représentation mixte Naturelle & Arbre

Les motivations pour l'introduction d'une représentation en arbre sont nombreuses.

D'un point de vue épistémologique, les expressions algébriques se représentent naturellement sous forme d'arbres dont les nœuds sont les opérateurs et les fils les opérandes. Dans cette représentation, les parenthèses sont inutiles ainsi que l'expression de priorité entre opérateurs.

D'un point de vue didactique et cognitif, l'introduction d'arbres d'expressions algébriques permettra pour les élèves un travail intéressant de changement de registre [DUV 06]. En effet, « le jeu sur les registres sémiotiques, permettant au sujet d'identifier une représentation, de la traiter à l'intérieur d'un même registre ou de la convertir dans un autre registre engage la distanciation entre le signe et l'objet, et construit la signification en mathématiques » [DUV 93]. Dans notre cas, l'introduction de la représentation en arbre aidera l'élève à comprendre la structure des expressions algébriques en elle-même et sa traduction dans leurs représentations naturelles. De plus, c'est une proposition des programmes de Collège [PRO 06].

Du point de vue de l'informatique -en tant que science- les arbres constituent une structure de données. Il ne s'agit pas de transformer Aplusix en un micromonde de l'informatique ou de structures de données (ce qu'il n'est pas) mais cela exprime la puissance de ce concept et son attrait intrinsèque.

Du point de vue informatique de la conception d'Aplusix, les expressions algébriques sont représentées en interne sous forme d'arbre, depuis le début ; il n'y a là rien d'étonnant d'après deux des trois points qui précèdent. En fait, et cela peut paraître ici moins prévisible, même les structures internes utilisées pour représenter

l'aspect graphique de la représentation naturelle en deux dimensions des expressions algébriques sont constituées d'arbres. Du point de vue informatique, cela n'a rien de vraiment surprenant, c'est même plutôt une évidence, comme la structure des pages HTML ou des documents XML sont naturellement des arbres. Pour montrer combien la structure d'arbre est équivalente à la structure d'expressions algébriques, et notre attachement à une modélisation interne mathématique, nous considérons nos arbres informatiques internes plutôt comme des expressions algébriques que l'inverse.

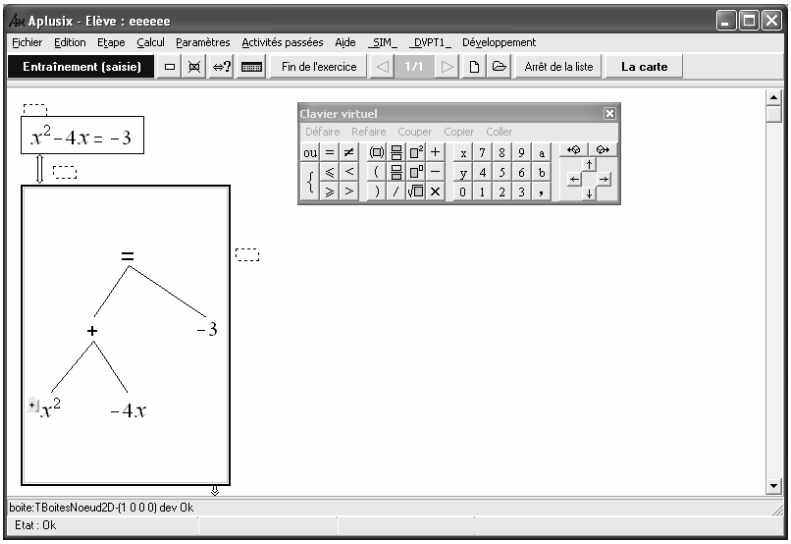

Figure 2 : *Représentation Naturelle & Arbre d'une expression algébrique dans Aplusix. Quand la souris s'approche d'une feuille expression algébrique non élémentaire un* ⊞ *apparaît pour développer l'expression sous forme d'arbre.*

2.1. Questions soulevées pour une représentation mixte Naturelle & Arbre.

Les premières questions soulevées lors de la phase de spécification ont été primordiales, elle portent sur la nature des objets et des relations que nous voulions introduire, c'est-à-dire sur les éléments qui constituent un micromonde [LAB 89] : quel genre d'arbres voulons nous introduire dans Aplusix ? Est-ce que ce sont les arbres internes utilisés pour représenter les expressions algébriques ? Est-ce que ce sont des arbres ayant une forte coloration algébrique ou, au contraire, des arbres très abstraits capables de représenter aussi bien des expressions algébriques que des liens de parentés ? Est-ce qu'il y a un lien (fort) entre ces arbres et la représentation naturelle déjà utilisée dans Aplusix ? Peut-on éditer ces arbres ? Est-ce que les expressions algébriques incomplètes ou malformées ont une représentation en arbre ? Est-ce qu'il y a des arbres incomplets ou malformés ? Est-ce que ces arbres ne sont qu'une nouvelle façon d'afficher des expressions algébriques ou est-ce que ce sont des objets à part entière ?

Quelques questions avaient un caractère plus mathématique : quelle est l'arité dans la représentation en arbre des nœuds représentant les opérateurs associatifs « + » et « × » et l'opérateur « - » (dans la représentation naturelle, par le jeu des priorités et les propriétés des opérateurs, cette arité n'est pas explicite dans une représentation en arbre cette arité le devient, elle peut être n-aire, binaire, unaire, plusieurs choix sont parfois possibles pour une même expression) ? Les parenthèses sont-elles représentées dans l'arbre (les parenthèses n'appartiennent pas à l'ensemble des opérateurs mathématiques, elles sont nécessaires dans la représentation naturelle pour signifier la structure des expressions, même si des règles de priorité entre opérateurs permettent de s'en affranchir souvent) ? Dans les arbres, la structure des expressions étant explicite, les parenthèses ne sont pas nécessaires.

2.2. Réponses adoptées pour une représentation mixte Naturelle & Arbre.

Pour toutes ces questions, prises une à une, il est relativement facile de trouver une ou plusieurs réponses et le cas échéant de choisir celle qui convient le mieux. Mais pratiquant ainsi, question par question, la cohérence de l'ensemble et l'adéquation au projet ReMath n'est pas garantie. Profitant d'importants échanges internes à notre équipe pluridisciplinaire, de quelques échanges avec les membres de ReMath souhaitant effectuer des expérimentations avec ces nouvelles représentations, du cadre programmatique des expérimentations croisées, et de l'aiguillon du calendrier du projet ReMath, nous avons atteint un ensemble de réponses satisfaisantes en vue d'un certain objectif (les expérimentations que nos collègues et nous voulions planifier) que nous espérons être cohérent pour cette nouvelle représentation, du moins possédant la cohérence induite de l'existence de cet objectif global. Ce processus de spécification s'est déroulé sur plusieurs mois, il nous a engagé dans la production de nombreux documents diffusés à tous les partenaires de ReMath et a convergé pour le début de l'été 2006.

La réponse essentielle à ce long processus est la suivante : les arbres sont des objets à part entière du micromonde, selon différents modes de paramétrages ; ils correspondent aux arbres abstraits de l'informatique, sur lesquels l'utilisateur a toute possibilité d'édition ou des arbres d'expressions algébriques, complètement développés ou semi développés.

Plus en détail, sur la forme, dans leur plus grande généralité, les arbres retenus associent la représentation naturelle des expressions en deux dimensions avec une représentation purement abstraite d'arbres : les feuilles de l'arbre peuvent être des expressions algébriques en représentation naturelle, les nœuds internes étant des textes simples quelconque ou des symboles d'opérateurs. Deux paramétrages permettent de limiter l'emploi d'opérateurs mathématiques valides pour les nœuds internes, et de limiter les feuilles aux nombres. Le premier mode est appelé *contrôlé* (il comporte un étayage garantissant la construction d'arbres mathématiques), le second *développé* (au sens où la structure en arbre reprenant la structure algébrique des expressions est complètement développée ou pas). Trois formes d'arbres sont ainsi définies :

- les *arbres libres* : arbres en mode développés - non contrôlé, ce sont les arbres

abstraits de l'informatique,

- les *arbre contrôlés* : arbres en mode développé - contrôlé, ce sont les arbres d'expressions algébriques complètement développés, et
- les *arbres mixtes* : arbres en mode non développé - contrôlé. Dans ce cas, quand la souris s'approche d'une feuille représentant une expression algébrique non élémentaire, un ⊞ apparaît pour développer cette expression sous forme d'arbre, le développement s'effectue avec un niveau d'opérateur (sauf si précédemment, l'arbre avait été déjà développé, auquel cas, on réinstalle la forme développée précédente), le résultat est un arbre de hauteur 1 ayant comme nœud l'opérateur de plus haut niveau de l'expression initiale et comme fils ses opérandes. Un mécanisme analogue permet de (re)compacter l'arbre en une expression algébrique en représentation naturelle.

En ce qui concerne l'édition, pour les feuilles expressions algébriques représentées en représentation naturelle dans le cas d'arbres mixtes, l'édition naturelle est pratiquée. Pour les autres cas, une édition spécifique aux arbres est définie. Celle-ci dépend du mode *contrôlé* ou *libre*. Dans le mode libre, tous les arbres sont possibles, sans vérification de la validité mathématique du nom des opérateurs ou de leur arité. Cette édition comporte l'ajout, la suppression d'un père ou d'un fils, la sélection, la copie d'un sous arbre, le changement du label d'un nœud, le tout sous une forme aussi facile à utiliser que possible, en suivant les mêmes principes d'édition libre, intuitive que pour l'édition des expressions algébriques dans leur représentation naturelle. Dans le mode contrôlé, une vérification est effectuée lors de la saisie des labels de nœud pour garantir leur existence mathématique et gérer leur arité.

Pour les aspects mathématiques, visibles dans le mode contrôlé seulement, les réponses à nos questions portent sur l'arité minimum des opérateurs n-aire (ils sont d'arité minimum 2), sur le sens de l'opérateur « - » et son arité (les deux opérateurs *différence* et *opposé* sont possibles), et sur l'absence de parenthèses.

2.3. Intégration dans Aplusix et expérimentations.

Deux nouveaux types d'exercices ont été introduits. Ils ont été définis en vu des expérimentations croisées et sont naturellement en relations avec les scénarios d'expérimentation prévues. Le premier type d'exercice consiste à demander aux élèves de construire un arbre libre (ou contrôlé) représentant une expression algébrique donnée en représentation naturelle ou sous forme textuelle en langage naturelle. La validation des solutions de ce type d'exercices correspond à une égalité syntaxique de 2 représentations (à peu de choses près), elle est très différente donc de l'équivalence. Le second type d'exercice consiste à demander aux élèves de donner la représentation naturelle, d'une expression donnée sous forme d'un arbre en mode développé (libre ou développé). Dans ces deux cas, les arbres mixtes ne sont pas disponibles, le mode *développé* est contraint (dans le mode *non développé*, ces deux exercices n'ont aucun intérêt, il suffit de quelques clics sur ⊞ ou sur ⊟ pour passer de la représentation naturelle à la représentation en arbre complètement développé, et vice-versa). Les arbres mixtes ne seront pas disponibles pendant ces

exercices mais auparavant ou ensuite, ou éventuellement dans d'autres contextes pour permettre l'apprentissage et l'exploration des liens entre ces différentes représentations.

Un premier prototype d'Aplusix avec des arbres est disponible depuis Décembre 2006. Une copie d'écran est donnée figure 2. Les fonctionnalités principales (affichage, édition, exercice) sont opérationnelles. Les mois avant l'expérimentation (prévue pour septembre 2007) seront utilisés pour affiner ce premier prototype ou y ajouter de nouvelles fonctionnalités, en accord avec nos collègues qui, depuis le début de l'année, y ont accès pour une première prise en main et une réflexion plus concrète sur les expérimentations possibles.

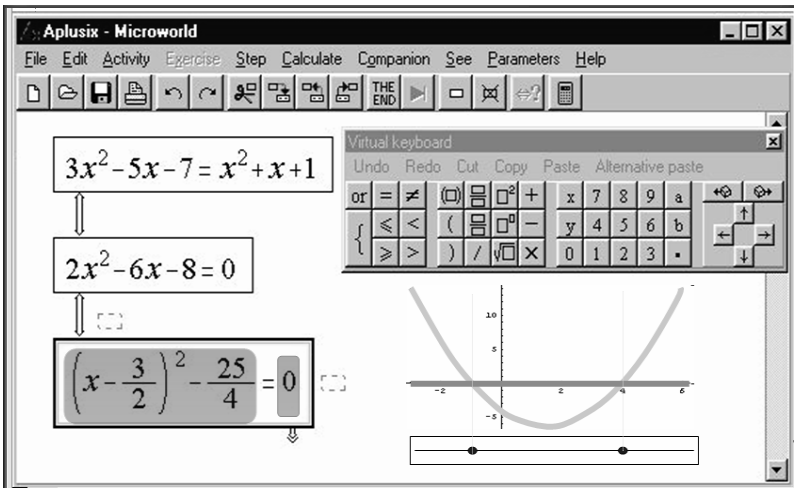

Figure 3 : *Projet de représentation graphique d'une équation dans Aplusix. Les courbes tracées dans le plan à droite constituent une représentation intermédiaire, elles reprennent les graphes des membres gauches et droits de l'équation. Les intersections de ces courbes sont projetées sur une droite réelle en dessous qui constitue la représentation finale de cette équation (son ensemble de solutions).*

3. Introduction d'une représentation graphique.

L'introduction d'une représentation graphique des expressions algébriques par le dessin des courbes dans le plan des fonctions associées à ces expressions et des ensembles de solutions aux équations, inéquations et systèmes d'équations constitue la seconde partie du travail envisagée dans ReMath. Cette seconde partie a été programmée, pour intervenir dans le calendrier de ReMath, à la suite de l'introduction de la représentation en arbre. La raison en est que les chercheurs désireux de participer aux expérimentations croisées avec Aplusix étaient plus intéressés par une représentation en arbre, plus innovante, que par cette représentation graphique. L'enjeu est donc plus limité, la progression moins avancée (seule la spécification a été menée à son terme à ce jour) et l'ampleur moins

importante (aucune expérimentation croisée n'est prévue à ce jour). La description de cette introduction sera donc plus concise.

3.0. Motivations pour l'introduction d'une représentation graphique.

Les motivations pour l'introduction d'une représentation graphique sont d'une autre nature. Tout d'abord, ce sont les enseignants qui la demandent, entre autres parce que l'étude des représentations graphiques des fonctions associées aux expressions algébriques est présente dans la plupart des curricula : le registre graphique permet de faire le lien avec la notion de fonction. En fait, les enseignants ne comprennent pas pourquoi Aplusix ne possède pas déjà de tels outils. Les avantages pour l'apprentissage d'une combinaison entre les registres graphiques et symboliques sont bien connus en mathématiques. Mais cette association ne va pas de soi. Il y a encore de réels défis à trouver une représentation graphique des expressions algébriques qui favorise l'apprentissage de l'algèbre, et en particulier des concepts de solutions d'équations, d'équivalence algébrique ou de calculs algébriques.

3.1. Questions et réponses pour l'introduction d'une représentation graphique.

Du fait des circonstances explicitées en début de section, un choix fondamental a été effectué dès le départ pour la représentation graphique : ce sera une représentation disponible à l'affichage seulement, liée à une expression algébrique dont elle représentera la dénotation (fonction, ensemble de solutions) de façon graphique, voir [NIC 01] pour une plus longue dissertation la notion de dénotation. Il n'y aura pas d'édition ou de manipulation de cette représentation graphique. Eventuellement, cet objet pourra évoluer en fonction des modifications de l'expression algébrique à laquelle il sera lié.

L'importance de ce premier choix est primordiale pour la suite de notre travail. Les spécifications à définir pour l'introduction d'une représentation graphique sont donc limitées à l'affichage. Il n'y aura pas d'objet en soi à définir.

Les questions à propos de cette représentation graphique sont : comment représenter deux objets sémantiquement équivalents (comme $2x^2–8$ et $2(x–2)(x+2)$), faut-il n'en représenter qu'un seul, ou deux, et si oui, comment représenter deux fois le même objet sans confondre les représentations ? À propos des équations, et plus précisément des solutions d'équations (par exemple pour les solutions de $2x^2–8=0$ qui sont $x=2$ ou $x=–2$), comment les représenter, par deux points sur une droite ?

Nous avons décidé de représenter :

- les expressions polynomiales et rationnelles d'une variables par leur courbes en deux dimensions ;
- les équations d'une inconnue de la forme $f(x)=g(x)$ par les courbes de $x \rightarrow f(x)$ et de $x \rightarrow g(x)$ dans le même plan, avec une projection des points d'intersection des courbes (solutions de l'équation) sur une droite réelle à part ;

- les inéquations d'une inconnue de la forme $f(x)<g(x)$ par les courbes de $x \rightarrow f(x)$ et de $x \rightarrow g(x)$ dans le même plan, avec une projection des points d'intersection des courbes (borne des intervalles de solutions) sur une droite réelle à part, l'intervalle solution avec une représentation particulière ;
- les systèmes d'équations linéaires à deux inconnus et deux équations par le dessins de droites définies par les deux équations et le point d'intersection quand il existe.

Par ailleurs, l'élève pourra afficher autant de graphiques qu'il veut en choisissant pour chacun la couleur du trait, la largeur et la position (devant/derrière).

Conclusion

La description produite ici des représentations introduites dans Aplusix est très partielle. Dans les spécifications rédigées pour ReMath, ces descriptions occupaient plus de 30 pages. Cependant nous espérons que ces quelques pages auront servi à faire prendre conscience des différentes questions et réponses possibles à considérer lorsque dans un EIAH existant, pour telle ou telle raison, une nouvelle représentation doit être introduite.

La première, et plus importante question, porte sur la nature et la portée des éléments à introduire. Il y a continuité entre des éléments restreints au domaine de l'affichage (pour lesquels un effort minimal est suffisant) et de nouveaux objets à part entière (pour lesquels un travail bien plus consistant est bien sûr nécessaire). Les premiers, n'ajoutent pas réellement de nouvelles fonctionnalités à l'EIAH mais peuvent étendre son utilisation, ou permettre des travaux intéressants d'un point de vue didactique ou cognitif. Les seconds ne peuvent être introduits sans que l'on ajoute toutes les fonctionnalités nécessaires à la *gestion* de ces objets. L'EIAH peut s'en trouver profondément modifié, éventuellement, cela peut même donner naissance à un second EIAH partageant avec l'EIAH initial le reste de l'architecture. Entre les deux se trouvent bien sur les fonctionnalités d'édition, de sauvegarde... Mais de plus, peuvent s'ajouter de nouvelles activités (comme le passage d'une représentation à une autre, ou de nouvelles activités spécifiques à la nouvelle représentation), une intégration dans les modules de générations automatiques d'exercices, dans les modules de diagnostic…

Une aide importante nous est venue du cadre programmatique et contraignant du projet ReMath prévoyant d'effectuer en parallèle d'un travail de spécification et de conception de nouvelles représentations mathématiques un travail d'élaboration de scénarios d'expérimentation et la mise au point d'expérimentations croisées. Nous avons trouvé là une source de réponses et de cohérence face à toutes les questions relatives à l'introduction d'une nouvelle représentation. Penser aux expérimentations à venir, et mieux encore, en discuter avec nos collègues venant d'autres laboratoires fut un défi et, au final, servit le processus ; cela peut servir d'exemple pour de futurs travaux similaires.

Au cours de cette première année du projet ReMath, nous avons atteint nos objectifs. Deux spécifications de nouvelles représentations pour des expressions

algébriques en sont sorties. L'une d'elle, une représentation mixte Naturelle & Arbre donnant naissance à trois types d'arbres a été mise en œuvre dans un premier prototype. Ce prototype n'a pas encore rencontré de vrais utilisateurs, mais le résultat est profondément innovant et nous paraît très prometteur, nos collègues l'ont accueilli avec enthousiasme et il a été très positivement évalué lors de la réunion de fin de première année du projet ReMath par les experts européens. Ces nouvelles représentations s'intègrent harmonieusement dans notre micromonde algébrique et consolideront, nous l'espérons, les objectifs globaux que nous poursuivons : permettre un travail libre d'exploration d'expressions algébriques en ayant à sa disposition deux rétroactions fondamentales, l'une à propos de l'équivalence entre expressions, l'autre à propos de la forme des solutions recherchées des exercices, chacune étant renforcée par ces représentations.

Références

[ART-05] ARTIGUES M., (2005) Methodological tools for Comparison of learning theories in technology enhanced learning in mathematics, deliverable kaleidoscope-TELMA 20.4.1.

[BOU 01] BOUHINEAU D., NICAUD J.F., PAVARD X., SANDER E., (2001) Un micro-monde pour aider les élèves à apprendre l'algèbre. *Actes des sixièmes journées EIAO*, STE.

[CEG 05] TELMA Cross Experiment report form and Guideline (2005), www.itd.cnr.it/telma

[DUV 93] DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive,* (5). Strasbourg.

[DUV 06] DUVAL, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), pp.103-131.

[Kaleidoscope] http://www.noe-kaleidoscope.org

[LAB 89] LABORDE J.M. (1989). Designing Intelligent Tutorial Systems: the case of geometry and Cabri-géomètre, IFIP WG 3.1 Working Conference on Educational Software at the Secondary Education Level, Reykjavik.

[NIC 01] NICAUD J.F., BOUHINEAU D. (2001). Syntax and semantics in algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*. The University of Melbourne.

[NIC 02] NICAUD J.F., BOUHINEAU D., HUGUET T. (2002) The Aplusix-Editor: A New Kind of Software for the Learning of Algebra, *Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Tutoring Systems*, LNCS 2363, Biarritz, and San Sebastian.

[NIC 04] NICAUD J.F., BOUHINEAU D., CHAACHOUA H. (2004), Mixing Microworld and CAS Features for Building Computer Systems that Help Students to Learn Algebra, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (9), pp. 169-211.

[PRO 06] "Du numérique au littéral", Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques au collège, Avril 2006, eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm

[ReMath] http://remath.cti.gr

[Telma] http://telma.noe-kaleidoscope.org