



**HAL**  
open science

## Démonstration de la conjecture de Kepler

Christian Marchal

► **To cite this version:**

| Christian Marchal. Démonstration de la conjecture de Kepler. 2007, 42 p. hal-00160350

**HAL Id: hal-00160350**

**<https://hal.science/hal-00160350>**

Submitted on 5 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Démonstration de la conjecture de Kepler

---

Christian Marchal  
ONERA, Direction scientifique générale, BP 72, 92322 Châtillon cedex, France  
[christian.marchal@onera.fr](mailto:christian.marchal@onera.fr)

## *Demonstration of Kepler's conjecture*

*The Kepler's conjecture goes back to 1611 and was expressed in a letter answering to the British mathematician and astronomer Thomas Harriot : "The most compact packings of equal spheres are certainly the "compact face centered cubic lattice" and the equivalent ones. They give a proportion of occupation of space of  $\pi/\sqrt{18}$  , that is more than 74%" .*

*The demonstration of this conjecture has attracted many mathematicians including Gauss (who demonstrated that the conjecture is true for regular lattices) and Hilbert which listed it as the eighteenth problem of his list of 23 major mathematical problems.*

*In 1998 Thomas C. Hales presented a 250 pages proof associated with giant numerical computations. That proof was given to a team of twelve specialists that, after four years of examination, concluded that "they are 99% certain of the validity of the proof".*

*It is possible to simplify greatly this question and to give two simple independent demonstrations. The first demonstration is the subject of this paper (see also the English summary at the end).*

---

## Table des matières

### Résumé

### Introduction

#### 1. La conjecture de Kepler

#### 2. Méthode de démonstration

#### 3. La méthode des volumes partagés

##### 3. 1. Le découpage de l'espace

##### 3. 2. Le but intermédiaire

#### 4. La différence volume disponible moins volume demandé

##### 4. 1. La fonction $\varphi(r)$

##### 4. 2. Examen des quatre types de cellules

##### 4. 2. 1. Cellules du quatrième type

##### 4. 2. 2. Cellules du troisième type

##### 4. 2. 3. Cellules du deuxième type

##### 4. 2. 4. Cellules du premier type

#### 5. Une confirmation numérique

#### 6. Du but intermédiaire au but final

### Conclusion

### Références

### Annexe

### Remerciements

### *English Summary*

### Légendes des figures

## Résumé

En 1611 Kepler répond à une demande de Thomas Harriot : à son avis les rangements les plus compacts de sphères égales sont le réseau « cubique à faces centrées » et plus généralement les empilements « hexagonaux compacts » de compacité équivalente, mais il ne présente pas de démonstration.

Après un bref rappel historique de l'histoire de cette conjecture, la méthode de démonstration utilisée est présentée ; son principe est tout à fait classique : il faut associer à chaque sphère d'un rangement arbitraire étudié un volume voisin suffisant pour que le coefficient de remplissage de l'espace ne dépasse pas la valeur  $\pi/\sqrt{18}$  fournie par les rangements de Kepler.

Cependant cette méthode de découpage de l'espace, la « méthode des volumes partagés », doit tenir compte de quatre cas différents et l'étude est allongée d'autant, mais elle aboutit analytiquement à des résultats sans ambiguïté lesquels sont illustrés par les graphiques correspondant.

Une vérification numérique simple termine l'étude.

## Introduction

Paris, 1900

Au congrès international de Mathématiques, dont Henri Poincaré et David Hilbert sont les figures de proue, ce dernier présente une liste de 23 problèmes mathématiques majeurs « pour le nouveau siècle ». Le dix-huitième d'entre eux est la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact de sphères égales.

### 1. La conjecture de Kepler

« Combien de boulets de canon peut-on ranger dans un espace donné ? », telle est la question que Sir Walter Raleigh, navigateur et explorateur britannique du 16<sup>ème</sup> siècle, pose à son ami le mathématicien et astronome Thomas Harriot. La question n'est pas gratuite : quand on range les boulets l'un après l'autre, au hasard, ils ne remplissent que 62 à 65% de l'espace disponible, tandis qu'un rangement soigneux permet de dépasser 70%. Ceci peut être la différence entre victoire et défaite dans une bataille navale...

Thomas Harriot transmettra la question à Kepler qui répondra qu'à son avis les rangements les plus compacts sont le réseau « cubique à faces centrées » et les rangements « hexagonaux compacts » équivalents (réf. 1 et fig. 1A). Ils permettent d'atteindre 74,048 % de l'espace disponible (soit  $\pi/\sqrt{18}$ ). Ce résultat est admis depuis longtemps par les physiciens et les chimistes, mais l'absence de démonstration complète a longtemps tourmenté les mathématiciens. C'est une question difficile : il faut considérer tous les rangements possibles, certains sont plus compacts que ceux de Kepler sur de petits volumes, mais très vite ils obligent à laisser des trous.

Le premier résultat important est dû à Gauss en 1831 : « parmi les réseaux réguliers (où chaque sphère est entouré de la même façon par ses voisines), ceux de Kepler sont les plus compacts ». Puis Voronoï définira les « cellules de Voronoï », c'est-à-dire l'ensemble des points entourant une sphère donnée et situé plus près d'elle que des autres sphères voisines (fig. 1B), et l'astronome Delaunay définira les éléments conjugués des cellules de Voronoï.

En 1953, le hongrois Laszlo Fejes Toth montre la possibilité de construire une fonction dont le minimum indiquera, ou non, si la conjecture de Kepler est juste. Il émet aussi une autre conjecture : « La plus petite cellule de Voronoï est le dodécaèdre régulier circonscrit

à la sphère ». Cette conjecture est démontrée en 1998 par Sean Mac Laughin et comme la sphère occupe 75,47% du volume du dodécaèdre circonscrit on obtient ainsi un majorant du coefficient de remplissage. Ce majorant est très proche des 74,048% de Kepler ce qui fait que la conjecture est dès lors presque démontrée.

Thomas C. Hales construit la fonction de L. F. Toth en 1998 et présente une démonstration de la conjecture de Kepler, mais sa démonstration comporte 250 pages (réduite à 121 pages en 2005, réf 2) et s'appuie sur des calculs numériques gigantesques, à tel point qu'il a pu dire devant les sceptiques : « même s'il faut vingt ans j'y arriverai ! »...

Rendue prudente par les différents échecs qui ont ponctué l'étude de la conjecture de Kepler, la communauté mathématique confie à douze spécialistes particulièrement qualifiés le soin d'examiner le travail de Thomas C. Hales. Ceux-ci, après quatre années d'examen, concluent : « Nous sommes à 99% sûrs de la validité de cette démonstration... ».

Une approche plus simple n'est pas superflue !

## **2. Méthode de démonstration.**

Considérons un rangement quelconque de sphères égales et non sécantes. Nous prendrons le diamètre des sphères pour unité de longueur, leur volume est donc  $\pi/6$  et la distance de deux centres voisins est au moins égale à 1.

L'idée essentielle développée par maint chercheur, et en particulier dans la référence 3, est qu'il faut faire correspondre à chaque sphère d'un rangement concurrent de celui de Kepler un « volume associé » ayant les trois propriétés suivantes :

1°) Il est entièrement disjoint des volumes attribués aux autres sphères.

2°) Il est dans le voisinage immédiat de la sphère correspondante (pas question de jouer avec les paradoxes de l'infini).

3°) Sa mesure est toujours supérieure ou égale à  $\sqrt{0,5}$ .

Dans ces conditions, le volume de chaque sphère étant  $\pi/6$ , le coefficient de remplissage ne peut dépasser  $(\pi/6) / \sqrt{0,5}$ , soit  $\pi/\sqrt{18}$ , ce qui est la valeur de Kepler, et la conjecture est démontrée.

La cellule de Voronoï, l'ensemble des points plus proche de la sphère étudiée que des autres sphères voisines (fig. 1B), est l'exemple type d'un volume voisin associé à chaque sphère. Malheureusement elle ne satisfait pas tout à fait à la condition n° 3 ci-dessus. Il faut donc modifier un peu les conditions d'attribution, ce que nous avons tenté avec la « seconde cellule de Voronoï » et réalisé numériquement en référence 3.

Cependant une autre méthode, celle des « volumes partagés » est analytiquement plus efficace et c'est elle que nous allons présenter et étudier ici.

## **3. La méthode des volumes partagés.**

### **3.1 Le découpage de l'espace. Les quatre types de cellules.**

Comment partager efficacement l'espace entre sphères voisines pour satisfaire aux trois conditions de la section 2 ? La méthode suivante est certes complexe mais bien adaptée au problème posé.

Autour de chaque sphère du rangement étudié dessinons une « sphère élargie » concentrique et de rayon  $\sqrt{0,5}$  (fig. 2). Ces sphères élargies seront « ouvertes », c'est à dire que leur surface n'en fait pas partie.

Si ces sphères étaient « fermées » un point de l'espace pourrait appartenir à au maximum six d'entre elles (les six centres seraient à la distance  $\sqrt{0,5}$  du point étudié et à  $90^\circ$  ou  $180^\circ$  les uns des autres) mais, les sphères étant ouvertes, le maximum possible n'est que de quatre, ce qui est un résultat classique de géométrie : impossibilité pour cinq points sur une sphère d'être tous à plus de  $90^\circ$  les uns des autres et pour quatre points ainsi placés le tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets contient toujours le centre de la sphère.

Soit donc un petit volume appartenant à quatre sphères élargies voisines, ce petit volume est entièrement à l'intérieur du tétraèdre ABCD (fig. 3) dont les sommets sont les centres des quatre sphères voisines. Ces tétraèdres seront les « cellules du premier type ». Le volume de ce tétraèdre ABCD sera partagé en quatre d'une manière appropriée et sera attribué aux quatre sphères voisines. (Ce tétraèdre ABCD est classiquement dénommé « tétraèdre de Delaunay », mais avec ici en plus la propriété d'avoir un rayon de la sphère circonscrite inférieur à  $\sqrt{0,5}$ . Ceci, et la distance d'au moins un entre centres voisins, fait que deux tétraèdres de ce type ne se « mordent » jamais l'un l'autre, ils ont au plus une face commune (voir la démonstration ci-après à la fin de cette section 3.1).

Ces tétraèdres, s'ils existent, une fois ôtés, il peut rester des « zones triples » appartenant à trois sphères élargies (fig. 4). Le volume à partager entre les trois sphères voisines sera alors le plus petit convexe contenant la zone triple étudiée et les centres des trois sphères voisines. Ce volume est soit un tétraèdre – cellule du deuxième type - dont les quatre sommets sont les trois centres EFG des sphères voisines et le point H extrême de la zone triple – à la distance  $\sqrt{0,5}$  de ces trois centres -, soit deux tels tétraèdres accolés et symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du triangle EFG.

Ce dernier cas survient quand la zone triple étudiée est écartée des tétraèdres du premier type ABCD, l'autre cas apparaît quand le triangle EFG est aussi une face d'un tétraèdre ABCD du premier type.

Notons que le point limite H ne peut en aucun cas appartenir aussi à un tétraèdre du type ABCD. Si c'était le cas il serait à moins de  $\sqrt{0,5}$  d'au moins l'un des quatre sommets, par exemple A, et le tétraèdre AEFH serait du premier type et contiendrait la « zone triple » étudiée, zone qui aurait donc été déjà éliminée.

Ces tétraèdres EFGH du deuxième type ôtés à leur tour, le découpage de l'espace se poursuit à partir des « zones doubles » restantes appartenant à deux « sphères élargies ». On opère de même : le volume à partager - cette fois ci entre les deux sphères voisines - est le plus petit convexe contenant la zone double et les centres des deux sphères voisines. Ce volume – cellule du troisième type - n'est plus un tétraèdre ou bien deux tétraèdres symétriques accolés, il est constitué de deux cônes circulaires symétriques accolés par leur base et éventuellement limités par des plans méridiens qui sont des faces du type EFH de tétraèdres du second type (fig. 4).

Ce troisième découpage effectué il ne reste plus que deux types de volumes : A) Des secteurs sphériques appartenant à une seule « sphère élargie » (fig. 4) et évidemment attribués à la sphère correspondante - ce sont les cellules du quatrième type - B) Des zones hors de toute sphère élargie et de ce fait abandonnées.

Faire le découpage dans l'autre sens aide à bien démontrer l'individualité et l'absence de chevauchement des différentes cellules ci-dessus définies.

Soit donc un point P, appartenant à la « sphère élargie » de centre A. A quel découpage appartient-il ? Considérons le rayon AP, il aboutit à la sphère élargie en Q (fig. 5).

Si Q n'appartient à aucune autre sphère élargie il en est de même de tous les points du segment AQ et tous ces points font partie d'une cellule du quatrième type : un secteur

circulaire attribué à la sphère de centre A. Ce secteur a bien entendu A pour sommet et sa base est l'ensemble des points tels que Q, à la surface de la sphère élargie de centre A et hors des autres sphères élargies.

Si Q appartient à une autre sphère élargie, mettons de centre B, construisons dans le plan ABPQ, le triangle isocèle ARB contenant P et Q et tel que  $AR = RB = \sqrt{0,5}$ .

Si R n'appartient à aucune autre sphère élargie, il en est de même de tous les points du triangle ARB et tous ces points appartiennent à une cellule du troisième type et font partie des cônes circulaires, ou portions de cônes circulaires, de sommet A ou B et de base le cercle d'axe AB et passant par R. Les portions de ce cercle situées hors des autres sphères élargies correspondent aux portions de cônes circulaires du découpage considéré.

Si le point R appartient à une autre sphère élargie, mettons de centre C, on recommence la même construction avec une dimension de plus : on considère le tétraèdre ABCS contenant P, Q, R et tel que  $AS = BS = CS = \sqrt{0,5}$ .

Si le point S - à la limite des sphères élargies de A, B et C - n'appartient à aucune autre sphère élargie il en est de même de tous les points du tétraèdre ABCS et tous ces points appartiennent à une cellule du second type ; le tétraèdre ABCS est alors un tétraèdre « du second type » le type EFGH.

Enfin si le point S appartient à une quatrième sphère élargie, mettons de centre D, les points P, Q, R, S ainsi que tout le tétraèdre ABCD forment à une cellule du premier type. Il ne peut y avoir d'ambiguïté car S ne saurait appartenir à une cinquième sphère élargie et l'on vérifie aisément que le découpage est indépendant du point P initialement choisi.

### 3.2 Le but intermédiaire.

Comment faire le partage des différents volumes ainsi définis en « volumes associés » des sphères voisines ?

Conformément à la méthode exposée en section 2, le but est bien sûr que chaque sphère se voit associer au total un volume correspondant supérieur ou égal à  $\sqrt{0,5}$ . Mais nous allons d'abord viser un but intermédiaire.

Considérons une sphère quelconque du rangement étudié et classons les sphères voisines par ordre de distances croissantes (distance du centre de la sphère considérée au centre de la sphère voisine) :  $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_n$ , avec bien sûr  $1 \leq r_1$ . Il est inutile de dépasser la distance  $\sqrt{2}$  ce qui fait que n reste limité à au plus 25 (réf. 4).

Le but intermédiaire sera que chaque sphère se voit attribuer un « volume associé » W supérieur ou égal à l'expression suivante :

$$W \geq K - M \sum_{j=1}^n \varphi(r_j) \quad (1)$$

où K et M sont deux constantes positives appropriées et  $\varphi(r)$  une fonction décroissante simple que nous allons définir, avec  $\varphi(1) = 1$  et  $\varphi(\sqrt{2}) = 0$ .

Comment assurer la condition (1) ? Il suffit que dans chacune des cellules que nous avons défini ci-dessus les inégalités correspondantes soient satisfaites.

Considérons par exemple un tétraèdre ABCD du premier type à partager en quatre. En un sommet tel que A aboutissent les trois arêtes AB, AC, AD de longueurs  $r_b, r_c, r_d$  avec les angles dièdres **B, C, D** correspondants et l'angle spatial en A, de  $(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} - \pi)$  stéradians.

Si, dans ce tétraèdre ABCD, le volume  $V_A$  attribué à la sphère de centre A vérifie :

$$V_A \geq V_A' = (K / 4\pi) (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} - \pi) - (M / 2\pi) [\mathbf{B} \varphi(r_b) + \mathbf{C} \varphi(r_c) + \mathbf{D} \varphi(r_d)] \quad (2)$$

Si de même, dans un tétraèdre EFGH du second type avec le sommet E, les arêtes EF, EG, EH de longueur  $r_f$ ,  $r_g$ ,  $\sqrt{0,5}$  et d'angle dièdre  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ , le volume  $V_E$  attribué à la sphère de centre E vérifie :

$$V_E \geq V_E' = (K / 4\pi) (\mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{H} - \pi) - (M / 2\pi) [\mathbf{F} \varphi(r_f) + \mathbf{G} \varphi(r_g)] \quad (3)$$

et si chaque partage obéit à des conditions analogues, alors, puisqu'il y a dans l'espace  $4\pi$  stéradians autour de chaque point, la somme des volumes partiels attribués à une sphère donnée vérifiera la condition (1).

De cette façon l'analyse générale est réduite à une série d'analyses partielles beaucoup plus aisées.

Quelles valeurs choisir pour K et M ? C'est là qu'interviennent les empilements hexagonaux compacts de Kepler (ou, aussi bien, le réseau cubique à faces centrées).

Dans ces rangements, lorsque l'on effectue le découpage décrit en section 3.1, il n'apparaît que deux types de cellules à partager :

1° ) Des tétraèdres du premier type à partager en quatre (fig. 3) ; tétraèdres réguliers dont les six arêtes sont égales et ont la longueur 1, dont le volume est  $\sqrt{2}/12$  et dont les six angles dièdres valent  $\text{Arccos}(1/3)$  soit  $70^\circ,528\dots$

2° ) Des tétraèdres EFGH du second type à partager en trois (fig. 4). Ces tétraèdres sont des « huitièmes d'octaèdre régulier » avec un trièdre trirectangle en H, trois arêtes EF, FG et GE de longueur unité et les trois autres de longueur  $\sqrt{0,5}$ . Les angles dièdres voisins de H sont droits, les trois autres valent  $\text{Arctan}\sqrt{2}$ , soit  $54^\circ,736\dots$  et le volume du tétraèdre est  $\sqrt{2}/24$ .

Pour que les inégalités analogues à (2) et (3) soient toutes satisfaites il faut bien sûr que K et M vérifient les deux conditions suivantes :

A) Pour le premier tétraèdre :

$$V_A = \text{Volume ABCD} / 4 = \sqrt{2} / 48$$

$$\sqrt{2} / 48 \geq (K / 4\pi) [3 \text{Arccos}(1/3) - \pi] - (M / 2\pi) [3 \text{Arccos}(1/3)] \quad (4)$$

B) Pour le deuxième tétraèdre :

$$V_E = \text{Volume EFGH} / 3 = \sqrt{2} / 72$$

$$\sqrt{2} / 72 \geq (K / 4\pi) [2 \text{Arctan}\sqrt{2} + (\pi / 2) - \pi] - (M / 2\pi) [2 \text{Arctan}\sqrt{2}] \quad (5)$$

Mais, par ailleurs, il nous faut qu'en (1) le minimum du volume W soit au moins  $\sqrt{0,5}$

or dans les empilements de Kepler la quantité  $\sum_{j=1}^n \varphi(r_j)$  est toujours égale à 12. Les constantes K et M sont donc assujetties à une troisième condition :

$$K - 12 M \geq \sqrt{0,5} \quad (6)$$

Ces trois conditions (4)-(6) ne laissent qu'une seule possibilité pour les constantes K et M : les trois inégalités sont à leur limite et transformées en égalités, ce qui conduit à :

$$\begin{array}{l|l} \alpha = \text{Arccos}(1/3) = 1,230\ 959\ 417\dots\text{radian} & | \\ K = (3\alpha - \pi) \sqrt{2} / (12\pi - 30\alpha) = 1,012\ 080\ 868\dots & | \\ M = (18\alpha - 7\pi) \sqrt{2} / (144\pi - 360\alpha) = 0,025\ 414\ 507\dots & | \\ K - 12 M = \sqrt{0,5} & | \end{array} \quad (7)$$

## 4. La différence volume disponible moins volume demandé.

### 4.1 La fonction $\varphi(r)$ .

Les constantes K et M sont désormais définies, mais la fonction décroissante  $\varphi(r)$  de l'équation (1) ne l'est pas encore. Or que faut-il vérifier ? Il faut vérifier que les volumes disponibles sont toujours supérieurs ou égaux aux volumes demandés dans des expressions comme (2) ou (3).

Dans un tétraèdre ABCD, « du premier type », le volume disponible est précisément celui du tétraèdre, il faut et suffit donc que ce volume soit supérieur ou égal à la somme des quatre volumes analogues  $V_A', V_B', V_C', V_D'$ , le premier étant exprimé en (2).

Il nous faut donc vérifier que toujours :

$$\text{Volume « tétraèdre ABCD »} \geq V_A' + V_B' + V_C' + V_D' \quad (8)$$

avec :

$$V_A' + V_B' + V_C' + V_D' = (K/2\pi) \left[ \sum_{JK} D_{JK} \right] - K - (M/\pi) \left[ \sum_{JK} D_{JK} \varphi(r_{jk}) \right] \quad |$$

$$D_{JK} = \text{angle dièdre de l'arête JK} ; r_{jk} = \text{longueur de l'arête JK} ; \{J, K = A, B, C, D\} \quad | \quad (9)$$

(dans les  $\Sigma$  chacun des six dièdres est compté une fois et une seule).

De même pour un tétraèdre EFGH, « du second type », il faut vérifier que :

$$\text{Volume « tétraèdre EFGH »} \geq V_E' + V_F' + V_G' \quad (10)$$

avec :

$$V_E' + V_F' + V_G' = (K/4\pi) (2D_{EF} + 2D_{EG} + 2D_{FG} + D_{EH} + D_{FH} + D_{GH} - 3\pi) - (M/\pi) (D_{EF} \varphi(r_{ef}) + D_{EG} \varphi(r_{eg}) + D_{FG} \varphi(r_{fg})) \quad (11)$$

et des inégalités analogues pour les cellules des deux derniers types.

Pour être tranquille on aura tendance à prendre des valeurs de  $\varphi(r)$  élevées, mais d'un autre côté il faut aussi que  $\varphi(r)$  ne soit pas trop élevé pour que dans l'équation (1) le volume W ne soit jamais inférieur à  $\sqrt{0,5}$ . D'où la question : Quelles sont les plus petites valeurs de  $\varphi(r)$  compatibles avec les conditions (8)-(11) et analogues ?

Considérons par exemple un tétraèdre ABCD du premier type où cinq arêtes ont la longueur unité et la sixième, mettons l'arête AB, a la longueur r.

Dans ces conditions les angles dièdres  $D_{JK}$  sont les suivants (voir les expressions générales et leur démonstration en section 5):

$$\begin{aligned} D_{AB} &= \text{Arccos} [(2 - r^2) / (4 - r^2)] & ; & \quad D_{CD} = \text{Arccos} [1 - (2r^2 / 3)] \\ D_{AC} = D_{AD} = D_{BC} = D_{BD} &= \text{Arccos} [r / (12 - 3r^2)^{1/2}] & & \quad | \end{aligned} \quad (12)$$

et le volume V du tétraèdre ABCD est :

$$V = (\sin D_{CD}) / 8 = r (3 - r^2)^{1/2} / 12 \quad (13)$$

Donc, en prenant l'égalité dans (8)-(9), on obtiendrait une valeur  $\varphi_1(r)$  qui est nécessairement un minorant de  $\varphi(r)$  :

$$V = (K/2\pi) \left[ \sum_{JK} D_{JK} \right] - K - (M/\pi) [D_{AB} \varphi_1(r) + D_{AC} + D_{AD} + D_{BC} + D_{BD} + D_{CD}] \quad (14)$$

soit :

$$\varphi_1(r) = 1 + [(K/2M) - 1]G(r) - \{ \pi [12K + r (3 - r^2)^{1/2}] / 12M \text{Arccos} [(2 - r^2)/(4 - r^2)] \} \quad (15)$$

$$\text{avec :} \quad G(r) = \left[ \sum_{JK} D_{JK} \right] / D_{AB} = \quad |$$

$$= 1 + \{ 4 \text{Arccos} [r / (12 - 3r^2)^{1/2}] + \text{Arccos} [1 - (2r^2/3)] \} / \text{Arccos} [(2 - r^2)/(4 - r^2)] \quad | \quad (16)$$

Cette fonction  $\varphi_1(r)$  est présentée graphiquement en figure 6 et il se trouve que c'est la limite inférieure de  $\varphi(r)$ . Cependant la démonstration de ce dernier point est très longue et



difficile, nous ne la ferons pas ici et nous nous contenterons d'une fonction  $\varphi(r)$  plus élevée, à la fois simple et suffisamment efficace :

$$\varphi(r) = \sup \{ 0 ; 1 + (1 - r) / 0,3254 \} \quad (17)$$

donc  $\varphi(1) = 1$  et pour  $r \geq 1,3254$  la fonction  $\varphi(r)$  est nulle (fig. 6).

Le choix de 1,3254 est bien entendu déterminé par le fait que la fonction  $\varphi_1(r)$  s'annule pour  $r = 1,325\ 348\ 175\dots$

Il nous faut donc vérifier (8)-(11) et les conditions analogues pour les deux derniers types avec cette fonction  $\varphi(r)$ .

#### 4.2 Examen des quatre types de cellules.

Nous irons du plus simple au plus compliqué et commencerons donc par les cellules du quatrième type.

##### 4.2.1 Cellules du quatrième type.

La différence volume disponible moins volume demandé est-elle toujours positive ou nulle ?

Pour les cellules du quatrième type, les secteurs sphériques de rayon  $R = \sqrt{0,5}$ , (fig. 4), la démonstration est aisée.

Soit donc un secteur sphérique d'angle spatial  $S$ . Le volume  $V$  disponible est celui du secteur, soit  $V = S R^3 / 3 = S / 6\sqrt{2}$ , tandis que le volume demandé est seulement  $KS / 4\pi$  soit nettement moins :

$$1 / 6\sqrt{2} = 0,011\ 785\ 1\dots > K / 4\pi = 0,080\ 538\ 8\dots \quad (18)$$

##### 4.2.2 Cellules du troisième type.

Pour les cellules du troisième type, les deux cônes circulaires ou portions de cônes circulaires accolées par leur base et limitées par deux plans méridiens (fig. 4), la démonstration est à peine plus difficile.

Soit  $D$  l'angle dièdre des deux plans méridiens limites (avec éventuellement  $D = 2\pi$ ) et  $r$  la distance entre les sommets  $A$  et  $B$  qui sont les centres des deux sphères voisines.

La longueur des génératrices des cônes est  $\sqrt{0,5}$ , l'angle spatial en  $A$  ou en  $B$  est de  $D(1 - r\sqrt{0,5})$  stéradians et le volume total  $V$  des deux portions de cônes considérées est :

$$V = (2r - r^3) D / 24 \quad (19)$$

Ce volume  $V$  est le volume disponible à comparer au volume demandé  $V_1$  :

$$V_1 = [2KD(1 - r\sqrt{0,5}) / 4\pi] - [2MD\varphi(r) / 2\pi] \quad (20)$$

Il nous faut donc vérifier  $V \geq V_1$  quels que soient  $r$  et  $D$  (compte tenu de  $1 \leq r < \sqrt{2}$  et  $0 < D \leq 2\pi$ ). D'où, en multipliant par  $24\pi / D$  :

$$(2r - r^3) \pi \geq 12K(1 - r\sqrt{0,5}) - 24M\varphi(r) \quad (21)$$

soit :

$$\varphi(r) \geq j(r) = [12K(1 - r\sqrt{0,5}) - (2r - r^3)\pi] / 24M \quad (22)$$

Cette fonction polynomiale  $j(r)$  débute à  $j(1) = 0,681\ 348\dots$  et est négative pour  $1,091\ 108\dots < r < \sqrt{2}$ , elle est représentée sur la figure 6 avec les fonctions  $\varphi(r)$  et  $\varphi_1(r)$ . On

constate aisément qu'elle est effectivement toujours inférieure à ces deux dernières fonctions et même à  $0,681\ 348\ \varphi_1(r)$ .

### 4.2.3. Cellules du deuxième type.

Abordons maintenant les cellules du deuxième type.

Le volume  $V$  disponible est celui du tétraèdre EFGH (fig. 4), avec  $EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$  et il faut vérifier que ce volume est supérieur ou égal au volume demandé  $V_1 = V_E' + V_F' + V_G'$  dont l'expression est donnée en (11).

Une comparaison directe et complète est difficile, mais l'on peut aisément fractionner la comparaison en divisant le tétraèdre EFGH en trois morceaux selon le schéma de la figure 7 : le point  $H'$  est la projection normale de  $H$  sur le plan EFG et l'on considère séparément les trois tétraèdres EFHH', EGHH' et FGHH'.

Les trois arêtes EH, FH et GH étant égales, les trois angles HEH', HFH' et HGH' le sont aussi, leur mesure sera appelée  $h$ . D'autre part, dans le plan EFGH' (fig. 7) les trois triangles EFH', EGH' et FGH' sont isocèles, nous appellerons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les angles à la base correspondants avec :

$$b + c = \text{angle FEG} = e \quad ; \quad c + a = \text{angle EFG} = f \quad ; \quad a + b = \text{angle EFG} = g \quad (23)$$

On peut remarquer que les trois angles  $e$ ,  $f$  et  $g$  du triangle EFG sont aigus car les trois côtés sont supérieurs ou égaux à 1 et inférieurs à  $\sqrt{2}$ , en conséquence le point  $H'$ , le centre du cercle circonscrit, est à l'intérieur du triangle EFG. Mais d'autre part, puisque  $e + f + g = 180^\circ = 2(a + b + c)$  :

$$0^\circ < a = 90^\circ - e \quad ; \quad 0^\circ < b = 90^\circ - f \quad ; \quad 0^\circ < c = 90^\circ - g \quad ; \quad a + b + c = 90^\circ \quad (24)$$

Le volume et les angles dièdres du tétraèdre FGHH' dépendent seulement des angles  $a$  et  $h$  :

$$\begin{aligned} HH' &= \sqrt{0,5} \sin h \quad ; \quad FH' = \sqrt{0,5} \cos h \quad ; \quad \text{hauteur } H'A = \sqrt{0,5} \cos h \sin a \quad | \\ FG = r_{fg} &= 2 FA = \sqrt{2} \cos h \cos a \geq 1 \quad | \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{Volume « tétraèdre FGHH' »} = V = \sin h \cos^2 h \sin a \cos a / 6\sqrt{2} \quad (26)$$

$$\text{Angle dièdre } D_{FG} \text{ de l'arête } FG = \text{Arctan}(HH'/H'A) = \text{Arctan}(\tan h / \sin a) \quad (27)$$

et pour ce tétraèdre FGHH' :

$$\begin{aligned} \text{Angle dièdre des arêtes } FH' \text{ et } GH' &= 90^\circ \quad | \\ \text{Angle dièdre des arêtes } FH' \text{ et } GH' &= \text{Arctan}(\tan a / \sin h) \quad | \end{aligned} \quad (28)$$

On en déduit la différence  $D(h, a) = (\text{Volume disponible} - \text{Volume demandé})$  pour le tétraèdre FGHH' :

$$\begin{aligned} D(h, a) &= (\sin h \cos^2 h \sin a \cos a / 6\sqrt{2}) + \quad | \\ &+ \{ M \text{Arctan}(\tan h / \sin a) \cdot \varphi(\sqrt{2} \cos a \cos h) / \pi \} - \quad | \\ &- \{ K[\text{Arctan}(\tan h / \sin a) - \text{Arctan}(\sin h / \tan a)] / 2\pi \} \quad | \end{aligned} \quad (29)$$

et pour l'ensemble du tétraèdre EFGH cette différence  $\Delta$  est :

$$\Delta(h, a, b, c) = D(h, a) + D(h, b) + D(h, c) \quad (30)$$

Nous allons voir que la différence  $D(h, a)$  est parfois négative, mais l'essentiel est que  $\Delta$  soit toujours positive ou nulle compte tenu des diverses contraintes :

$$0^\circ < a, b, c, h \quad ; \quad a + b + c = 90^\circ \quad ; \quad r_{fg} = \sqrt{2} \cos h \cos a \geq 1 \quad (31)$$

et de même :

$$\sqrt{2} \cos h \cos b \geq 1 \quad ; \quad \sqrt{2} \cos h \cos c \geq 1 \quad (32)$$

en conséquence les angles a, b et c restent inférieurs à 45° et l'angle h est même limité supérieurement par  $\text{Arctan } \sqrt{0,5} = 35°,264\dots$  (cas limite obtenu pour a = b = c = 30° , avec  $\Delta = 0$ ).

La différence D(h, a) est présentée en figure 8 en fonction de l'angle a pour diverses valeurs de h. Pour h donné l'angle a est maximum lorsque  $a = a_M = \text{Arccos}(1/\sqrt{2} \cos h)$  qui correspond à  $r_{fg} = 1$ , et, puisque  $a + b + c = 90°$ , l'angle a est minimum à h donné pour  $a = a_m = 90° - 2 a_M$

On notera que pour  $h < 19°,2284$  la courbe D(h,a) présente un point anguleux, ce point correspond à  $r_{fg} = 1,3254$  et au point anguleux de la fonction  $\phi(r)$  ; d'autre part si  $h > 26°,5447$  la différence D(h,a) devient négative quand l'angle a est proche de son maximum  $a_M$ . Cependant, et fort heureusement, l'équation (30) et la condition  $a + b + c = 90°$  maintiennent  $\Delta$  positive ou nulle. La concavité des courbes de la figure 8 étant vers le bas, le minimum de  $\Delta$  pour h donné est obtenu lorsque  $\{a, b, c\} = \{a_M, a_M, a_m\}$ , ce qui conduit à :

$$\Delta \text{ minimum pour h donné} = 2 D(h, a_M) + D(h, a_m) \quad (33)$$

La courbe correspondante  $\Delta(h)$  est présentée en figure 9, et, pour les volumes du second type, la différence  $\Delta(h, a, b, c)$  entre le volume disponible et le volume demandé est donc effectivement toujours positive ou nulle, ce qu'il fallait démontrer.

#### 4.2.4 Cellules du premier type.

Il nous reste à examiner les volumes du premier type et les tétraèdres ABCD correspondants.

Pour simplifier l'analyse, nous reprendrons les notations de l'analyse précédente en appelant EFG le triangle ABC et donc DEFG le tétraèdre ABCD.

Le rôle joué par le point H est désormais joué par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre DEFG ; nous continuerons d'appeler H ce point, H' sa projection normale sur le plan EFG, h la mesure des angles HEH', HFH', HGH' et a celle des angles H'FG et H'GF (fig. 10) avec :

$$DH = EH = FH = GH = \rho < \sqrt{0,5} \quad (34)$$

Les six arêtes du tétraèdre DEFG ayant toutes au moins la longueur 1, on en déduit que H est toujours à l'intérieur du tétraèdre DEFG et que :

$$\rho \geq \sqrt{3/8} = 0,612\ 37\dots \text{ (égalité lorsque les six arêtes ont la longueur 1)} \quad (35)$$

Pour le petit tétraèdre HH'FG la différence D( $\rho, h, a$ ) entre le volume disponible et le volume demandé se déduit aisément de (29) :

$$D(\rho, h, a) = (\rho^3 \sin h \cos^2 h \sin a \cos a / 3) + \left. \begin{array}{l} + \{ M \text{ Arctan}(\tanh / \sin a) \cdot \phi(2 \rho \cos a \cos h) / \pi \} - \\ - \{ K[\text{Arctan}(\tan h / \sin a) - \text{Arctan}(\sin h / \tan a)] / 2 \pi \} \end{array} \right| \quad (36)$$

où  $(\rho^3 \sin h \cos^2 h \sin a \cos a / 3)$  est le volume disponible et :

$$\text{longueur } r_{fg} \text{ de l'arête FG} = 2 \rho \cos a \cos h \geq 1 \quad (37)$$

En particulier D( $\rho, h, a$ ) est identique à D(h, a) si l'on prend  $\rho = \sqrt{0,5}$ .

L'analyse de la différence « volume disponible moins volume demandé » pour l'ensemble du tétraèdre DEFG s'obtient donc en additionnant les résultats partiels correspondants aux douze petits tétraèdres analogues à HH'FG et l'on peut d'abord commencer en réunissant ces tétraèdres trois par trois comme HH'FG, HH'GE et HH'EF pour faire le tétraèdre HEFG. La différence  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  correspondante est donc :

$$\Delta(\rho, h, a, b, c) = D(\rho, h, a) + D(\rho, h, b) + D(\rho, h, c) \quad (38)$$

ce qui est tout à fait analogue à (30), et même identique si  $\rho = \sqrt{0,5}$ .

Là encore, exactement comme dans l'analyse précédente mais à un degré plus loin, la différence partielle  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  sera presque toujours positive ou nulle et très rarement négative, et, dans ce dernier cas, c'est la présence des trois autres tétraèdres analogue à HEFG qui sauvera la situation.

Les contraintes (31)-(32) deviennent :

$$0^\circ < a, b, c, h \quad ; \quad a + b + c = 90^\circ \quad ; \quad r_{fg} = 2 \rho \cos h \cos a \geq 1 \quad (39)$$

et de même :

$$2 \rho \cos h \cos b \geq 1 \quad ; \quad 2 \rho \cos h \cos c \geq 1 \quad (40)$$

Il y a aussi une contrainte supplémentaire liée aux trois inégalités :  $r_{de} \geq 1$ ,  $r_{df} \geq 1$  et  $r_{dg} \geq 1$ . Si ces trois arêtes ont leur valeur minimale on obtient  $2 \rho^2 (1 + \sin h) = 1$ , (voir figure 10) et dans le cas général :

$$2 \rho^2 (1 + \sin h) \geq 1 \quad (41)$$

De (39) et (40) on peut déduire aussi :

$$\sqrt{3} \rho \cos h \geq 1 \quad (42)$$

le cas limite étant obtenu pour  $a = b = c = 30^\circ$  et conduisant à  $r_{ef} = r_{eg} = r_{fg} = 1$

La condition  $\rho < \sqrt{0,5}$  et les deux conditions (41) et (42) délimitent le domaine des paramètres  $\rho$  et  $h$ , domaine présenté en figure 11 avec :

$$\sqrt{(3/8)} = 0,6123.. \leq \rho < \sqrt{0,5} = 0,707 1... \quad (43)$$

et :

$$0^\circ < h_m = \text{Arcsin} [(1/2\rho^2) - 1] \leq h \leq h_M = \text{Arccos} (1/\sqrt{3} \rho) < 35^\circ,264.. = \text{Arctan} \sqrt{0,5} \quad (44)$$

L'étude pour  $\rho$  et  $h$  donnés est très fructueuse et tout à fait analogue à celle des cas où  $\rho = \sqrt{0,5}$ , voir par exemple les cas où  $\rho = 0,69$  ;  $0,67$  ;  $0,65$  et  $0,63$  dans les figures 12 à 15.

On obtient ainsi :

A ) Le maximum  $a_M$  de l'angle  $a$  est obtenu pour  $r_{fg} = 2 \rho \cos h \cos a = 1$  soit :

$$a_M = \text{Arccos} (1 / 2 \rho \cos h) \quad ; \quad 30^\circ \leq a < 45^\circ \quad (45)$$

B ) Puisque  $a + b + c = 90^\circ$ , le minimum  $a_m$  de l'angle  $a$  est donné par :

$$a_m = 90^\circ - 2 a_M \quad ; \quad 0^\circ < a_m \leq 30^\circ \quad (46)$$

C) Puisque  $a + b + c = 90^\circ$  et  $0^\circ < a, b, c < 45^\circ$ , la somme  $(\cos a + \cos b + \cos c)$  est maximale quand les trois angles  $a, b, c$  sont égaux et minimale quand ils sont le plus écartés possible, d'où :

$$2 \rho \cos h (2 \cos a_M + \cos a_m) \leq r_{ef} + r_{eg} + r_{fg} \leq 3 \sqrt{3} \rho \cos h \quad (47)$$

D ) De même, les courbes des figures 12 à 15 étant concaves vers le bas, la différence  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  entre le domaine disponible et le domaine demandé dans le tétraèdre EFGH est encadrée par :

$$2 D(\rho, h, a_M) + D(\rho, h, a_m) \leq \Delta(\rho, h, a, b, c) \leq 3 D(\rho, h, 30^\circ) \quad (48)$$

On en déduit les figures 16 à 19 pour les mêmes valeurs de  $\rho$ .

On voit donc que le « domaine dangereux », celui pour lequel la fonction  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  est négative, est très petit, cela est particulièrement net sur la figure 11 où est tracée en pointillé la courbe limite  $h = h_L(\rho)$  avec :

$$\begin{aligned} 2D(\rho, h_L, a_{ML}) + D(\rho, h_L, a_{mL}) &= 0 \\ a_{ML} = \text{Arccos} (1/2 \rho \cos h_L) \quad ; \quad a_{mL} = 90^\circ - 2 a_{ML} \end{aligned} \quad (49)$$

Encore faut-il être sûr que la réunion des quatre tétraèdres EFGH, DEFH, DEGH et DFGH donnera toujours une somme  $D$  positive ou nulle, somme égale à la différence totale « volume disponible moins volume demandé » :

$$D_{DEFG} = D(\text{tétraèdre total DEFG}) = \Delta_{EFG} + \Delta_{DEF} + \Delta_{DEG} + \Delta_{DFG} \quad (50)$$

Considérons donc un cas où  $\rho$  est donné et  $h_{EFG}$  supérieur à la « limite dangereuse » tracée sur la figure 11 et à partir de laquelle la fonction  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  peut être négative. Quelles sont alors les valeurs possibles des trois autres angles  $h$  et des distances mutuelles  $r_{de}$ ,  $r_{df}$ ,  $r_{dg}$  ?

Notons tout d'abord que les trois arêtes du triangle EFG ont toutes une longueur très proche de 1 comme l'indique la figure 20 où, en fonction de  $\rho$ , est donnée la limite supérieure issue de (47) de la somme  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  (cette limite supérieure est toujours très proche de 3, tandis que les trois arêtes ont au moins la longueur 1) :

$$r_{ef} + r_{eg} + r_{fg} \leq 3\sqrt{3} \rho \cos h_L(\rho) \quad (51)$$

Nous appellerons  $h'$  la mesure du plus petit des trois angles  $h_{DEF}$ ,  $h_{DEG}$ ,  $h_{DFG}$  et  $r'$  la plus grande des trois distances mutuelles  $r_{de}$ ,  $r_{df}$ ,  $r_{dg}$  :

$$h' = \inf \{ h_{DEF}, h_{DEG}, h_{DFG} \} ; \quad r' = \sup \{ r_{de}, r_{df}, r_{dg} \} \quad (52)$$

On obtient la limite supérieure de  $h'$  et la limite inférieure de  $r'$ , pour  $\rho$  et  $h_{EFG}$  donnés, lorsque les trois distances mutuelles  $r_{ef}$ ,  $r_{eg}$ ,  $r_{fg}$  sont égales et que les trois distances mutuelles  $r_{de}$ ,  $r_{df}$ ,  $r_{dg}$  le sont aussi, ce qui conduit aux cas limites suivant :

$$\begin{array}{l} h_{EFG} = h_L \quad ; \quad h' \leq h'_M = \text{Arctan} [ \cos h_L / 2(1 + \sin h_L) ] \\ r' \geq r'_m = \rho \sqrt{2 + 2 \sin h_L} \end{array} \quad (53)$$

On peut noter que la somme  $(r'+2)$  dépasse toujours la limite donnée en (51) et en figure 20, donc les deux triangles associés à l'arête de longueur  $r'$  (la plus grande arête) n'ont jamais un  $\Delta$  négatif et les figures 16 à 19 permettent de donner un minorant de la somme de leur deux  $\Delta$ .

Il y a deux cas :

1° )  $\rho \geq 0,64793\dots$

Le minorant de  $D_{DEFG}$  correspond aux deux extrémités de la courbe  $\Delta_{\text{minimum}}$  c'est à dire à un tétraèdre DEFG dont cinq arêtes ont la longueur 1, la sixième ayant la longueur  $r$  qui donne la valeur de  $\rho$  étudiée { soit  $r = [(12\rho^2 - 4) / (4\rho^2 - 1)]^{1/2}$  }, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} D_{DEFG} \text{ minimal à } \rho \text{ donné} &= 2 \Delta(\rho, h_M, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ) + 2 \Delta(\rho, h_m, a_{Mm}, a_{Mm}, a_{mm}) = \\ &= 6 D(\rho, h_M, 30^\circ) + 4 D(\rho, h_m, a_{Mm}) + 2 D(\rho, h_m, a_{mm}) \end{aligned} \quad (54)$$

Les paramètres  $h_M$  et  $h_m$  sont donnés en fonction de  $\rho$  en (44), et les paramètres  $a_{Mm}$  et  $a_{mm}$  sont donnés en fonction de  $\rho$  et de  $h_m$  en (45) et (46), c'est à dire :

$$a_{Mm} = \text{Arccos} ( 1 / 2 \rho \cos h_m ) \quad ; \quad a_{mm} = 90^\circ - 2 a_{Mm} \quad (55)$$

Ce  $D_{DEFG}$  minimal à  $\rho$  donné est représenté par la courbe en trait plein sur la figure 21, avec un point anguleux correspondant à  $r = 1,3254$  et au point anguleux de la fonction  $\varphi(r)$  tracée en figure 6.

2° )  $\rho \leq 0,64793\dots$

Le minorant de  $D_{DEFG}$  ne correspond plus aux deux extrémités de la courbe  $\Delta_{\text{minimum}}$ , mais à l'extrémité droite (pour les deux  $\Delta$  négatifs) et à un point intermédiaire le plus à droite possible, pour minimiser les deux  $\Delta$  positifs.

Ce point le plus à droite possible correspond à l'angle  $h_N$  tel que  $r'_m + 2$  soit égal à  $S(h_N)$  où  $S$  est la somme  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  maximum  $= 3\sqrt{3} \rho \cos h$ , donc  $h_N$  est défini par :

$$r'_m + 2 = 3\sqrt{3} \rho \cos h_N \quad ; \quad h_N = \text{Arccos} [ (r'_m + 2) / 3\sqrt{3} \rho ] \quad (56)$$

et donc, comme en (54)-(55), mais pour  $\rho \leq 0,64793\dots$  :

$$\begin{aligned} D_{DEFG} \text{ à } \rho \text{ donné} &\geq 2 \Delta(\rho, h_M, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ) + 2 \Delta(\rho, h_N, a_{MN}, a_{MN}, a_{mN}) = \\ &= 6 D(\rho, h_M, 30^\circ) + 4 D(\rho, h_N, a_{MN}) + 2 D(\rho, h_N, a_{mN}) \end{aligned} \quad (57)$$

$$a_{MN} = \text{Arccos} ( 1 / 2 \rho \cos h_N ) \quad ; \quad a_{mN} = 90^\circ - 2 a_{MN} \quad (58)$$

Cette deuxième partie de la limite est présentée en pointillé sur la figure 21, elle aussi est toujours positive ou nulle.

Notons que (54)-(55) correspond à un cas réel, c'est donc la limite inférieure de  $D_{DEFG}$  pour la valeur de  $\rho$  correspondante, tandis que (56)-(58) ne donne qu'un minorant. On peut montrer, avec l'aide de l'angle  $h'_m$  de (53), que même si  $\rho \leq 0,647\ 93\dots$  la limite inférieure de  $D_{DEFG}$  est donnée par (54)-(55) ; cependant cette longue démonstration est inutile dans le cadre de la présente étude et nous ne la ferons pas.

On peut aussi remarquer que quel que soit  $\rho$  donné, si l'on utilisait la fonction  $\varphi_1(r)$  de la figure 6 au lieu de la fonction  $\varphi(r)$  on obtiendrait, par construction, que le minimum de la différence  $D_{DEFG}$  entre le volume disponible et le volume demandé serait toujours nul.

Le but intermédiaire est donc atteint : la différence  $D_{DEFG}$  entre le volume disponible et le volume demandé est toujours positive ou nulle et la méthode des volumes partagés peut s'appliquer.

## 5. Une confirmation numérique

Il est toujours bon de vérifier ses résultats par une deuxième méthode la plus indépendante possible.

Appelons  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , les quatre sommets du tétraèdre ABCD ou DEFG et  $r_{jk}$  la longueur de l'arête  $S_j S_k$ .

La surface  $S_{123}$  du triangle  $S_1 S_2 S_3$ , est donnée par l'expression classique :

$$S_{123} = (1/4) [ (r_{12} + r_{13} + r_{23}) (r_{12} + r_{13} - r_{23}) (r_{23} + r_{12} - r_{13}) (r_{13} + r_{23} - r_{12}) ]^{1/2} \quad (59)$$

mais cette surface est aussi le demi-produit de la base  $r_{12}$  par la hauteur  $h_{312}$  (lire hauteur  $h_{312}$  issue du sommet  $S_3$  et dirigée vers l'arête  $r_{12}$ ). D'où la longueur de cette hauteur  $h_{312}$  :

$$h_{312} = 2S_{123} / r_{12} = (1/2r_{12}) \cdot [ (r_{12} + r_{13} + r_{23}) (r_{12} + r_{13} - r_{23}) (r_{23} + r_{12} - r_{13}) (r_{13} + r_{23} - r_{12}) ]^{1/2} \quad (60)$$

Par permutation des indices on obtient de même les longueurs des douze hauteurs apparaissant sur les faces du tétraèdre.

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir l'angle dièdre  $A_{12}$  dont l'arête est  $S_1 S_2$ .

En projection sur un plan perpendiculaire à l'arête  $S_1 S_2$ , le tétraèdre donne un triangle dont les côtés sont les hauteurs  $h_{312}$ ,  $h_{412}$  et la projection de l'arête  $S_3 S_4$ . Cependant cette arête n'est pas nécessairement dans un plan perpendiculaire à  $S_1 S_2$  car les deux hauteurs sont séparées par une distance  $D_{12}$  le long de l'arête :

$$\text{au signe près : } D_{12} = (r_{23}^2 + r_{14}^2 - r_{13}^2 - r_{24}^2) / 2 r_{12} \quad (61)$$

D'où le cosinus de l'angle dièdre  $A_{12}$  :

$$\cos A_{12} = (h_{312}^2 + h_{412}^2 - r_{34}^2 + D_{12}^2) / 2 h_{312} h_{412} ; \quad 0^\circ \leq A_{12} \leq 180^\circ \quad (62)$$

Le volume  $V$  du tétraèdre n'est pas compliqué non plus :

$$V = (r_{12} \cdot h_{312} \cdot h_{412} \sin A_{12}) / 6 \quad (63)$$

On obtient ainsi tous les éléments du problème avec un minimum de lignes trigonométriques.

La différence  $D$ , dont on espère qu'elle sera toujours positive ou nulle dans les conditions de l'étude, est donc :

$$D = V + K + \sum_{1 \leq j < k \leq 4} \{ A_{jk} [(M / \pi) \varphi(r_{jk}) - K/2\pi] \} \quad (64)$$

avec :  $V$  est le volume du tétraèdre  $S_1, S_2, S_3, S_4$

$K$  est une constante :  $K = 1,012\ 080\ 868\ 3\dots$

$M$  est une autre constante :  $M = 0,025\ 414\ 507\ 26\dots$

$K - 12 M = 0,707\ 106\ 781\ 187\dots = \sqrt{0,5}$  ; ces deux constantes ont déjà été présentées en (7).

Les six angles  $A_{jk}$  sont exprimés en radians.

La fonction  $\varphi(r)$  est définie par :

$$\varphi(r) = \sup \{ 0 ; 1 + q - qr \} \quad ; \quad \text{avec } q = 1/0,3254$$

autrement dit  $\varphi(1) = 1$  et pour  $r \geq 1,3254$  la fonction  $\varphi(r)$  est nulle. (65)

Une propriété intéressante de la différence  $D$ , propriété qu'il est difficile de faire apparaître dans l'étude analytique de la section 4 précédente, est qu'une homothétie de rapport  $(1 + \varepsilon)$  du tétraèdre étudié, avec  $\varepsilon$  petit et positif, va faire augmenter  $D$ . En effet :

1° ) Les angles dièdres et donc les termes en  $K$  sont inchangés.

2° ) Le volume  $V$  est multiplié par  $[1 + 3\varepsilon + O(\varepsilon^2)]$

3° ) Les termes en  $M$  subissent une baisse de  $(Mq \varepsilon / \pi) \sum_{1 \leq j < k \leq 4} [A_{jk} \cdot f(r_{jk})]$

avec  $f(r) = 1$  si  $r < 1,3254$  et  $f(r) = 0$  si  $r \geq 1,3254$

4° ) Il est aisé de vérifier que l'on a toujours  $3V \geq (Mq / \pi) \sum_{1 \leq j < k \leq 4} [A_{jk} \cdot f(r_{jk})]$  (66)

Pour cela on vérifie successivement que :

A ) Deux dièdres adjacents  $A_{jk}$  et  $A_{kl}$  sont toujours tels que  $A_{jk} + A_{kl} \leq 180^\circ$

B ) En conséquence  $\sum A_{jk} \leq 540^\circ$  soit  $3\pi$  radians.

C ) Dans l'expression du volume  $V$ , le produit  $r_{12} \cdot h_{312} \cdot h_{412}$  est toujours supérieur ou égal à  $\sqrt{0,5}$ .

D ) Donc, pour vérifier (66) il suffit que :

$$(3 / 6 \sqrt{2}) \sin A_{12} \geq 3\pi (Mq / \pi) \quad (67)$$

soit :

$$\sin A_{12} \geq 6Mq \sqrt{2} = 0,662 \, 720 \, 483 \quad (68)$$

Bien entendu cette propriété est aussi vraie pour chacun des six dièdres, il n'y a donc plus aucune difficulté si un ou plusieurs des six dièdres est compris entre les angles correspondant :  $41^\circ,508\dots$  et  $138^\circ,492\dots$

Sinon la somme  $\sum A_{jk}$  est réduite à au maximum  $360^\circ + 2 \times 41^\circ,508 = 443^\circ,016 = 7,73208$  radians, ce qui permet d'améliorer (68) jusqu'à :

$$\sin A_{jk} \geq 0,543 \, 696\dots \quad ; \quad 32^\circ,936 \leq A_{jk} \leq 147^\circ,064 \quad (69)$$

Pour les angles dièdres supérieurs à  $147^\circ$  l'arête correspondante est toujours de longueur supérieure ou égale à  $\{2 - [2 / \tan^2(147^\circ/2)]\}^{1/2} = 1,382 \, 844\dots$  soit davantage que  $1,3254$  ; l'angle dièdre correspondant disparaît donc de la somme  $\sum [A_{jk} \cdot f(r_{jk})]$ , ce qui permet d'achever la démonstration. (Le cas limite  $1,382 \, 844$  est obtenu lorsque les quatre arête adjacentes ont la longueur 1 et l'arête opposée la longueur  $\sqrt{2}$ ).

Donc une homothétie du tétraèdre  $S_1, S_2, S_3, S_4$  de rapport  $(1+\varepsilon)$ , avec  $\varepsilon$  positif, fait augmenter la différence  $D$ . En conséquence de cette propriété, et puisque nous recherchons le minimum de cette différence  $D$ , il nous suffit d'étudier les cas où la plus petite arête est de longueur minimale, c'est à dire 1, nous supposons qu'il s'agit de l'arête  $r_{34}$  et cela fait toujours un paramètre de gagné.

Les six longueurs  $r_{ij}$ , toujours entre 1 et  $\sqrt{2}$ , peuvent être choisies comme paramètres de base, la plus petite étant égale à 1. Le seul élément délicat est l'expression du rayon  $\rho$  de la sphère circonscrite.

Heureusement il est inutile d'exprimer ce rayon  $\rho$ , il suffit d'exprimer les conditions pour que l'inégalité  $\rho \leq \sqrt{0,5}$  soit satisfaite. Pour cela posons :

$$r_{ij}^2 - 1 = u_{ij} \quad ; \quad 0 \leq u_{ij} \leq 1 \quad ; \quad u_{34} = 0 \quad (70)$$

Les conditions à vérifier sont alors :

$$u_{13}^2 + u_{14}^2 \leq 1 \quad ; \quad u_{23}^2 + u_{24}^2 \leq 1 \quad (71)$$

et :

$$0 \leq u_{12} \leq [ (1 - u_{13}^2 - u_{14}^2) (1 - u_{23}^2 - u_{24}^2) ]^{1/2} - u_{13} u_{23} - u_{14} u_{24} \quad (72)$$

Ces conditions s'obtiennent aisément en considérant le cas limite où  $\rho = \sqrt{0,5}$ . Dans ce cas on peut placer le point  $S_4$  au pôle sud de la sphère de rayon  $\sqrt{0,5}$ , ses coordonnées sont donc  $(0, 0, -\sqrt{0,5})$ , de même  $S_3$ , à la distance 1 de  $S_4$ , peut être placé en  $(0, -\sqrt{0,5}, 0)$ . Le point  $S_1$  est alors en  $(x_1, u_{13}\sqrt{0,5}, u_{14}\sqrt{0,5})$  pour que ses distances à  $S_3$  et  $S_4$  soient  $r_{13}$  et  $r_{14}$ , de même le point  $S_2$  est en  $(x_2, u_{23}\sqrt{0,5}, u_{24}\sqrt{0,5})$ . Il reste à exprimer la distance  $S_1, S_2$  égale à  $r_{12}$  et qui conduit à la condition (72), compte tenu bien sûr de la relation  $(x_1^2 + u_{13}^2/2 + u_{14}^2/2 = 1/2)$  et des relations analogues.

Il faut donc étudier la différence  $D$  exprimée en (64) compte tenu des conditions (70)-(72). L'étude numérique confirme que cette différence entre le volume disponible et le volume demandé est toujours effectivement positive ou nulle. Pour  $D$  inférieure à  $10^{-5}$  il y a quatre minimums locaux, trois d'entre eux correspondent aux minimums de la figure 21 :

A ) Les deux minimums extrêmes avec  $D = 0$ , le premier avec les six arêtes de longueur 1, le second avec une arête de longueur  $\sqrt{2}$  et les cinq autres de longueur 1.

B ) Le minimum intermédiaire avec  $D = 3,0159 \times 10^{-7}$  et avec une arête de longueur 1,3254 les cinq autres ayant la longueur 1.

Le quatrième minimum local est logique et ne contredit pas la figure 21, il est obtenu avec deux arêtes opposées de longueur  $\sqrt{2}$  et les quatre autres de longueur 1 : le tétraèdre  $S_1, S_2, S_3, S_4$  est réduit à un carré. Ce dernier minimum conduit à  $D = V = 0$ ; deux dièdres  $A_{jk}$  valent  $\pi$  et les quatre autres sont nuls.

## 6. Du but intermédiaire au but final.

La méthode des volumes partagés conduit donc à associer à chaque sphère d'un rangement quelconque un volume  $W$  proche, entièrement disjoint des volumes attribués aux autres sphères et vérifiant la condition (1) reproduite ci-dessous où les  $r_j$  sont les distances des centres des sphères voisines au centre de la sphère considérée :

$$W \geq K - M \sum_{j=1}^n \varphi(r_j) \quad (73)$$

Cependant le but final est d'obtenir des volumes associés  $W$  tous supérieurs ou égaux à  $\sqrt{0,5}$ , et d'autre part les constantes  $K$  et  $M$ , données en (7), vérifient  $K - 12M = \sqrt{0,5}$ . La constante  $M$  étant positive, la condition  $W \geq \sqrt{0,5}$  est donc équivalente à :

$$\sum_{j=1}^n \varphi(r_j) \leq 12 \quad (74)$$

La fonction  $\varphi(r)$  a été définie en (17) :

$$\varphi(r) = \sup \{ 0 ; 1 + (1 - r) / 0,3254 \} \quad (75)$$

cette fonction est nulle pour les distances  $r$  supérieures à 1,3254 et donc la condition (74) est équivalente à l'analyse suivante :

A ) Numérotions de 1 à  $n$  les sphères voisines dont les centres sont à au plus 1,3254 du centre de la sphère étudiée. Le nombre  $n$  est au plus 22 (réf. ).

B ) Appelons  $r_j$  la distance du centre de la  $j$ -ième sphère et classons ces distances par ordre croissant :

$$1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_j \leq \dots \leq r_n \leq 1,3254 \quad (76)$$



C ) Il nous suffit alors de vérifier que quel que soit le rangement considéré, avec bien sûr des distances toujours supérieures ou égales à 1 entre centres de sphères voisines, on a toujours :

$$\sum_{j=1}^n r_j \geq 12 + 1,3254 (n - 12) \quad (77)$$

Avec (76) cette condition est toujours vérifiée si  $n \leq 12$ , et c'est donc pour  $n$  supérieur à 12 que la question se pose.

Pour  $n = 13$  le minimum de la somme  $\sum_{j=1}^n r_j$  est connu, si du moins on ne tient pas compte de la limite supérieure 1,3254 imposée en (76). Ce minimum est  $12 + (7\sqrt{3}/9) = 13,347\ 150\ 6\dots$  et est donc effectivement supérieur à la quantité 13,3254 donnée en (77) pour  $n = 13$ .

Le rangement correspondant possède deux plans de symétrie que l'on peut prendre pour plan équatorial et plan de méridien origine. Douze des treize sphères voisines sont tangentes à la sphère étudiée, et les coordonnées polaires des treize centres des sphères voisines sont alors :

A ) Pour les douze sphères tangentes à la sphère étudiée :

$$1 = r_1 = r_2 = \dots = r_j = \dots = r_{12} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Deux centres sont l'un au pôle Nord, l'autre au pôle Sud, les dix autres sont} \\ \text{aux latitudes } \pm 30^\circ \text{ et aux longitudes } 0^\circ, \pm \alpha, \pm 2\alpha, \text{ avec } \cos \alpha = 1/3 \end{array} \right. \quad (78)$$

B ) Le treizième centre a pour coordonnées polaires :

$$r_{13} = (7\sqrt{3}/9) = 1,347\ 150\ 6\dots ; \quad \varphi_{13} = 0^\circ ; \quad L_{13} = 180^\circ \quad (79)$$

Cette treizième sphère est tangente aux quatre dernières sphères précédentes, celles de longitude  $\pm 2\alpha$ .

Les coordonnées cartésiennes correspondantes sont :

$$\begin{array}{l} (0 ; 0 ; \pm 1) ; \quad (\sqrt{3}/2 ; 0 ; \pm 1/2) ; \quad (\sqrt{3}/6 ; \pm \sqrt{6}/3 ; \pm 1/2) \\ (-7\sqrt{3}/18 ; \pm 2\sqrt{6}/9 ; \pm 1/2) ; \quad (-7\sqrt{3}/9 ; 0 ; 0) \end{array} \quad \left| \quad (80) \right.$$

Pour  $n > 13$  les rangements correspondant aux minimums de  $\sum_{j=1}^n r_j$  ne sont pas connus, mais l'on sait déjà qu'ils s'écartent de plus en plus des conditions qui invalideraient (76)-(77). C'est d'ailleurs logique : si déjà pour  $n = 13$  le minimum de  $\sum_{j=1}^n r_j$  a un rayon  $r_n$  dépassant 1,3254 il est normal qu'il en soit, à fortiori, de même pour  $n$  supérieur à 13. Or, d'autre part, si l'on pose  $S_n = \text{minimum de } \sum_{j=1}^n r_j$  et si effectivement pour  $n \geq 13$  on a toujours  $r_n \geq 1,3254$ , alors, en supprimant la sphère la plus éloignée, on voit que :

$$S_{n-1} \leq S_n - r_n \leq S_n - 1,3254 \quad (81)$$

Si donc la condition (77) est vérifiée pour  $(n - 1)$  elle le sera aussi pour  $n$ , et comme elle est déjà vérifiée pour  $n \leq 13$  elle le sera pour tout  $n$ .

Pour  $n = 14$ , le meilleur cas minimal connu donne  $r_{14} = 1,379\ 55\dots$  et  $S_{14} = 12 + 2 r_{14} = 14,759\ 1\dots$

Certes, obtenir le rangement pour lequel  $\sum_{j=1}^n r_j$  est minimal pour un  $n$  donné n'est pas simple, mais il nous suffit en fait de vérifier (76)-(77) pour  $n$  de 13 à 22. Par exemple il

suffit de vérifier que lorsque (77) n'est pas satisfaite, il y a toujours  $r_n > 1.3254$  et/ou deux sphères voisines dont la distance des centres est inférieure à 1.

Ceci ne demande qu'une vérification numérique d'une précision limitée (par exemple  $2 \cdot 10^{-4}$  pour  $n = 13$ ). En conséquence : le nombre de calculs à faire est **fini** et il est relativement aisé de vérifier rigoureusement ce dernier point de la démonstration, même si ce n'est pas aussi joli qu'une démonstration purement analytique.

Bien entendu l'utilisation de la fonction  $\varphi_1(r)$  présentée en (15)-(16) et en figure 6, au lieu de la fonction  $\varphi(r)$ , ne ferait que conduire à des volumes  $W$  plus élevés ce qui renforcerait encore le résultat.

## Conclusion

Une méthode nouvelle, complexe mais bien adaptée au problème posé, permet de démontrer la conjecture de Kepler en une quinzaine de pages et une vingtaine de figures seulement. Elle permet même d'obtenir le résultat suivant : considérons un rangement quelconque et le découpage correspondant utilisé dans cette étude. Dans ce découpage seules les cellules apparaissant dans les rangements de Kepler peuvent conduire à l'optimum : le tétraèdre régulier et le « huitième d'octaèdre régulier » (avec des arêtes de longueur minimale). Toute cellule différente de ces deux types optimaux constitue une perte. En conséquence seuls atteindront le coefficient de remplissage maximal, les rangements pour lesquels les cellules écartées des deux cas optimaux demeurent exceptionnelles. Ces rangements sont toujours, pour l'essentiel, extrêmement proches d'empilements hexagonaux compacts de Kepler, ces empilements dont le réseau cubique à faces centrées constitue un cas particulier.

## Références

1. **Kepler Johannes** *Strena sue de nive sexangula*. 1611.
2. **Hales Thomas C.** *The Kepler conjecture*. *Annals of mathematics*, 162, n°3, pages 1065-1185, 2005.
3. **Marchal C. et Hoynant G.** *La conjecture de Kepler et la méthode des cellules de Voronoï d'ordres un et deux*. To appear.
4. **Conway J. H. and Sloane N. J. A.** "Nice arrangements of points on a sphere in various dimensions". In : *Sphere Packings, Lattices and Groups (Third edition)*. Springer-Verlag, New-York 1998.  
E-mail : <http://www.research.att.com/~njas/packings/>

## Remerciements

Je remercie tout particulièrement Monsieur Georges Hoynant pour son enthousiasme, ses conseils avisés et ses nombreux calculs de vérification de toutes sortes. Il a été le numéricien sans lequel cette étude n'aurait pas aboutit.

## Annexe

Considérons la figure 1A et les deux premières couches d'un empilement « hexagonal compact ». Nous supposons ces deux couches horizontales.

On a depuis longtemps remarqué que, pour poser la troisième couche sur les deux premières, on dispose de deux possibilités : soit dans les trous de la deuxième couche à la verticale des sphères de la première couche, soit dans les autres trous.

Ce choix se répétant pour chacune des couches successives on obtient ainsi la variété des empilements hexagonaux compacts et s'il y a une périodicité verticale de trois couches l'empilement obtenu est le célèbre réseau « cubique à faces centrées » si fréquent en cristallographie.

S'il y a une périodicité verticale de deux couches seulement l'empilement obtenu peut être qualifié de « plus simple des rangements hexagonaux compacts ». Ce rangement est lui aussi un réseau et chaque sphère y est entourée d'une manière identique par ses voisines proches ou lointaines.

Il semblerait que ce dernier réseau ait la propriété d'avoir des couronnes successives au contact les plus fournies possibles : 12 sphères pour la première couronne, 44 pour la seconde, 96 pour la troisième et « partie entière de  $10,5 n^2 + 2$  » pour la n-ième couronne. Ceci est à comparer avec le réseau cubique à faces centrées où la n-ième couronne n'a que  $10n^2 + 2$  sphères seulement. De ce point de vue le plus simple des rangements hexagonaux compacts est donc 5% meilleur que le réseau cubique à faces centrées ce qui pourrait avoir des applications en électronique et en informatique.

## English summary

### *Demonstration of Kepler's conjecture*

#### *Introduction and section 1 : Kepler's conjecture*

*A short description of the history of Kepler's conjecture on the most compact packings of equal spheres, with the famous "Voronoi cells" (fig.1B).*

#### *Section 2 : Method of demonstration.*

*The method used in this study is "the method of shared volumes". Its principle is classical : construction of suitable disjoint volumes surrounding each spheres and large enough in order to give a sufficiently small upper limit on the coefficient of occupation of space.*

#### *Section 3. The method of shared volumes.*

##### *3.1. The sharing of space.*

*Description of the method : How to share space ? The spheres of interest have a diameter equal to the unit of length and hence the distances between nearby centers are always at least one. We consider first concentric "enlarged spheres" with a diameter equal to  $\sqrt{2}$  and the intersections of these enlarged spheres (fig. 2). Regions belonging to four nearby spheres define the "first type of cells" that are tetrahedrons with tips at the four nearby centers (fig. 3). These cells will be shared in a suitable way between the four nearby spheres.*

*The second type of cells are also tetrahedrons, but shared between only three nearby spheres (fig. 4). The third and fourth types (fig. 4) are no more tetrahedrons and concern only two or one nearby spheres. The figure 5 present the same division of space into cells but in the opposite succession of types.*

##### *3.2. The intermediate goal.*

*The volume of each initial sphere is  $\pi/6$  and the true goal of this study is to associate to each sphere a corresponding volume (disjoint from all other volumes) of at least  $\sqrt{0.5}$ . The coefficient of occupation of space will be then at most  $\pi / (6 \times \sqrt{0.5})$ , that is the Kepler ratio  $\pi / \sqrt{18}$ . However that final goal is too difficult to reach directly and the study begins with the intermediate goal expressed in equation (1) : We must associate to each sphere a volume  $W$  at least equal to the expression given in (1), with  $K$  and  $M$  given in (7), with the  $r_j$  being the*

distances from the center of the sphere of interest to the centers of nearby spheres and with the function  $\varphi(r)$  presented in (17) and in figure 6.

*Section 4. The difference between the available volume and the required volume.*

*Is it possible to associate a suitable volume  $W$  to each sphere ? Or, in other words, is the difference between the available volume and the required volume always positive or zero? We study that difference separately in all cells of space and that division into cells lead to a much simpler analysis.*

*This section 4 begins in 4.1. by the choice of a simple and efficient function  $\varphi(r)$  and then analyses the difference between the available volume and the required volume for the four types of cells (sections 4.2.1 to 4.2.4). That difference has always the right sign and is related to the results presented in figures 7-21. The “ method of shared volume ” can be applied.*

*Section 5. A numerical confirmation.*

*The above analytical results are confirmed by a simple numerical analysis.*

*Section 6. From the intermediate goal to the final goal.*

*The demonstration of the conjecture and the final goal, a sufficiently large volume  $W$  associated to each sphere, are easily related to the intermediate goal of section 3.2 and section 4.*

*Conclusion. References. Acknowledgments. Appendix.*

### **Légendes des figures (figures captions).**

Figure 1. A Deux couches successives d'un empilement « hexagonal compact ».

B Un rangement arbitraire, une sphère centrale et sa « cellule de Voronoï »

*A Two successive layers of a “compact hexagonal packing”.*

*B An arbitrary packing, a central sphere and its “Voronoi cell”.*

Figure 2. Les sphères étudiées et leurs « sphères élargies » concentriques.

*The spheres of interest and their concentric “enlarged spheres”.*

Figure 3. Une cellule du premier type : le tétraèdre ABCD. Dans les rangements de Kepler cette cellule est un tétraèdre régulier d'arête de longueur 1.

*A cell of the first type : the tetrahedron ABCD. In the Kepler's packing this cell is a regular tetrahedron with edges of length 1.*

Figure 4. Des cellules des deuxième, troisième et quatrième types (tétraèdres tel EFGH, double cônes ou doubles portions de cônes accolés par leur base, secteur sphérique).

Dans les rangements de Kepler les cellules du second type sont des « huitièmes d'octaèdre régulier » :  $EF = EG = FG = 1$  ;  $EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$ . Les angles en H sont droits.

*Cells of the second, third and fourth types (tetrahedrons as EFGH, double cones or part of double cone with a common circular basis, spherical sectors).*

*In the Kepler's packings the cells of the second type are “eighths of regular octahedron” :  $EF = EG = FG = 1$  ;  $EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$ . The angles at H are straight.*

Figure 5. Construction des quatre types de cellules dans le sens opposé : du quatrième type au premier.

*Construction of the four types of cells in the opposite direction : from the fourth type to the first.*

Figure 6. Les fonctions  $\varphi(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  et  $j(r)$  définies en (17), (15)-(16) et (22).  
*The functions  $\varphi(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  et  $j(r)$  defined in (17), (15)-(16) et (22).*

Figure 7. Décomposition du tétraèdre EFGH.  
*Decomposition of the tetrahedron EFGH*

Figure 8. La fonction  $D(h, a)$  définie en (29).  
*The function  $D(h, a)$  defined in (29).*

Figure 9. En fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$   
*In terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$*

Figure 10. Analyse des cellules du premier type.  
*Analysis of cells of the first type.*

Figure 11. Le domaine des paramètres  $h$  et  $\rho$ .  
*The domain of parameters  $h$  and  $\rho$ .*

Figure 12. La fonction  $D(\rho, h, a)$ , définie en (36), pour  $\rho = 0.69$   
*The function  $D(\rho, h, a)$ , defined in (36), for  $\rho = 0.69$*

Figure 13. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.67$   
*The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.67$*

Figure 14. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.65$   
*The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.65$*

Figure 15. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.63$   
*The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.63$*

Figure 16. Pour  $\rho = 0,69$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$   
*For  $\rho = 0.69$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .*

Figure 17. Pour  $\rho = 0,67$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$   
*For  $\rho = 0.67$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .*

Figure 18. Pour  $\rho = 0,65$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$   
*For  $\rho = 0.65$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .*

Figure 19. Pour  $\rho = 0,63$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$

*For  $\rho = 0.63$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  .*

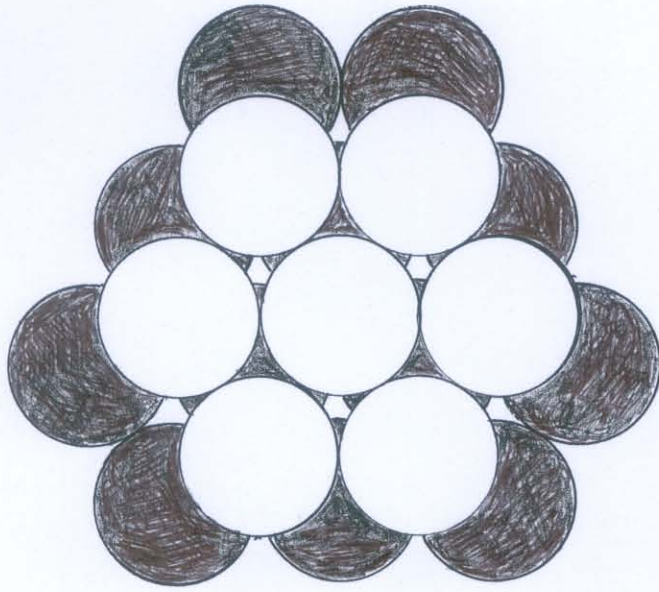
Figure 20. Les fonctions  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  et  $r'_m + 2$  dans les cas « dangereux » (les cas où  $\Delta(\rho, h, a, b, c) < 0$ ).

*The functions  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  and  $r'_m + 2$  in the “dangerous” cases (the cases in which  $\Delta(\rho, h, a, b, c) < 0$  ).*

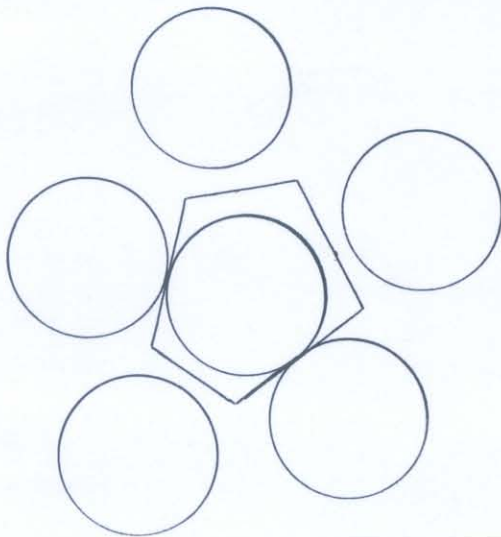
Figure 21. En fonction de  $\rho$ , la limite inférieure et un minorant de la différence  $D$  entre le volume disponible et le volume demandé.

*In terms of the length  $\rho$ , the lower limit and a lower bound of the difference  $D$  between the available volume and the required volume.*

---



A



B

Figure 1. A) Deux couches successives d'un empilement « hexagonal compact »  
B) Un rangement arbitraire, une sphère centrale et sa « cellule de Voronoï »

A) Two successive layers of a "compact hexagonal packing".  
B) An arbitrary packing, a central sphere and its "Voronoi cell".

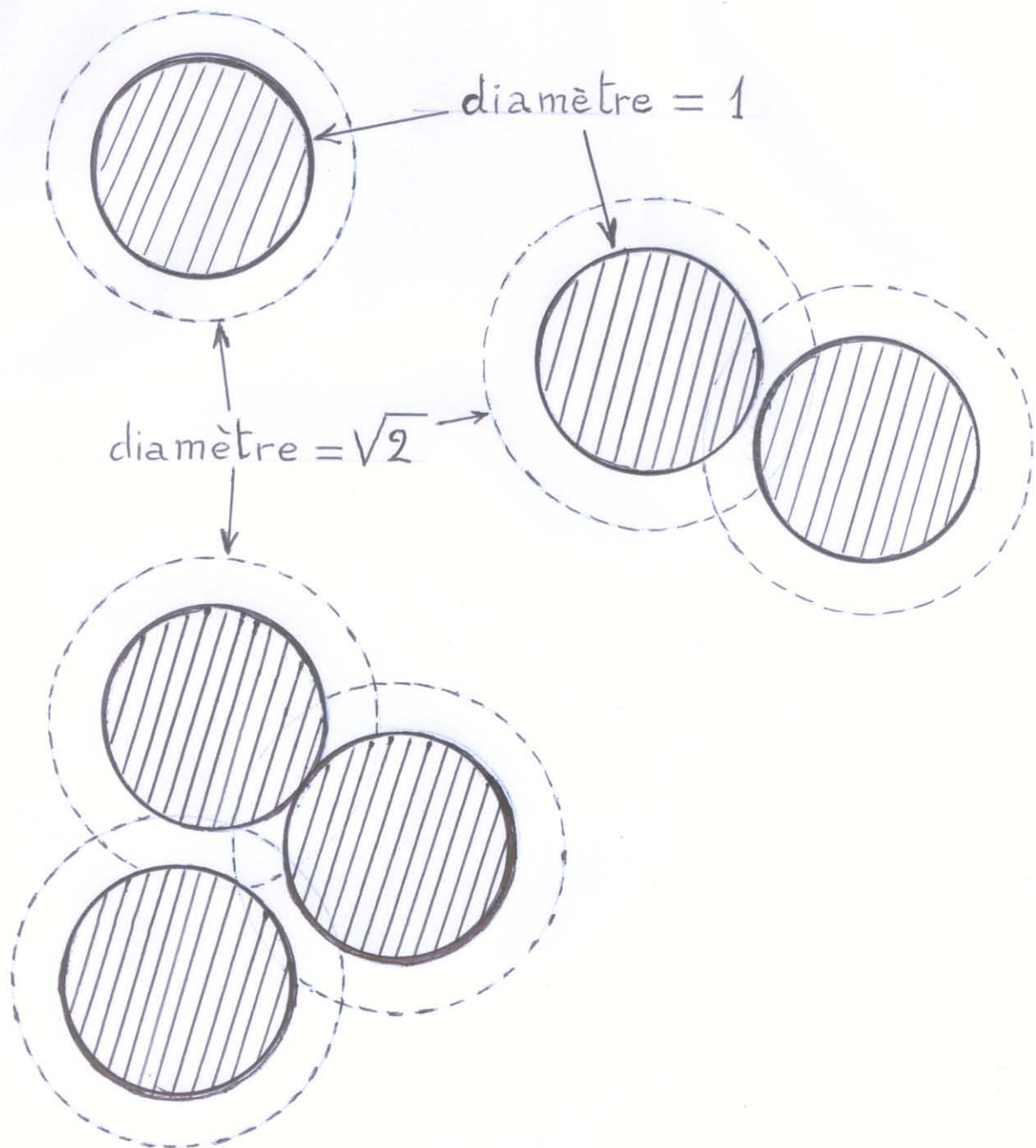


Figure 2. Les sphères étudiées et leurs « sphères élargies » concentriques.

*The spheres of interest and their concentric "enlarged spheres".*



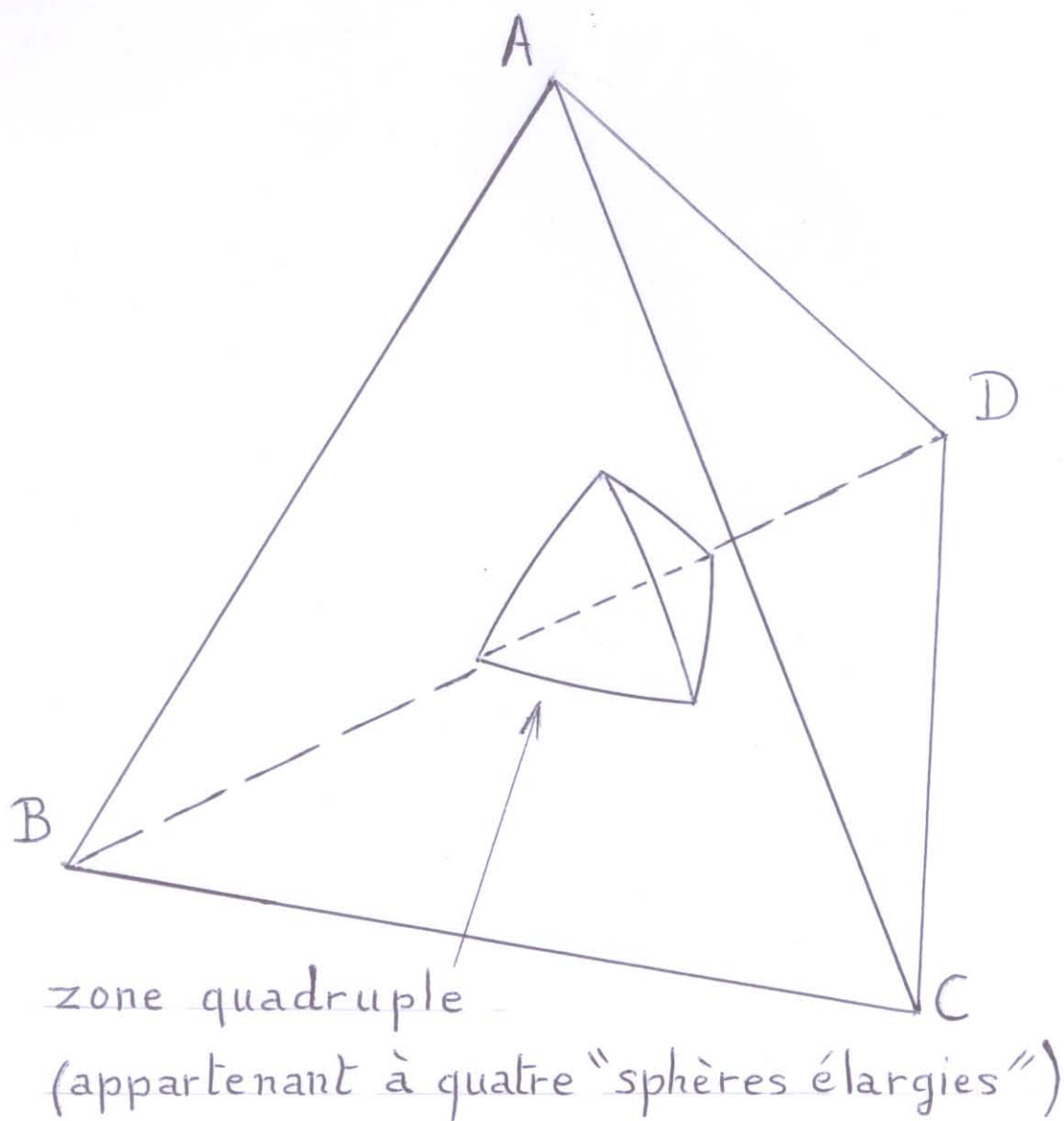
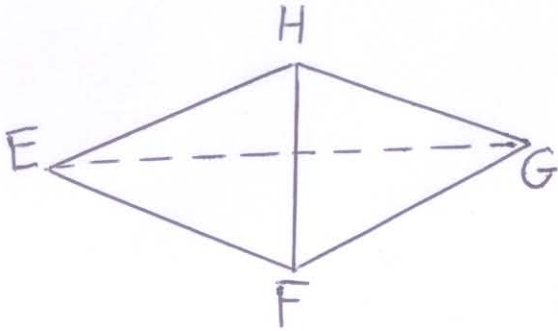
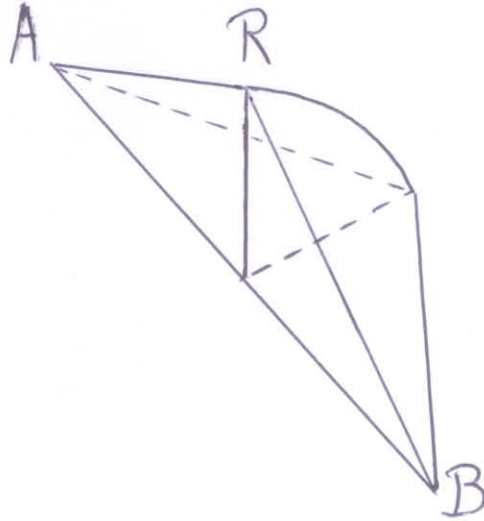


Figure 3. Une cellule du premier type : le tétraèdre ABCD. Dans les rangements de Kepler cette cellule est un tétraèdre régulier d'arête de longueur 1.

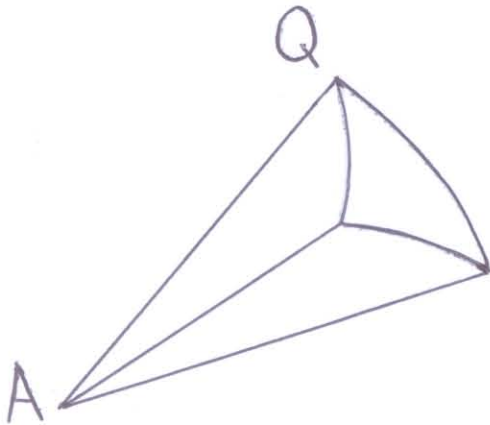
*A cell of the first type : the tetrahedron ABCD. In the Kepler's packing this cell is a regular tetrahedron with edges of length 1.*



Type 2.  $EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$   
 $EF \geq 1 ; EG \geq 1 ; FG \geq 1$



Type 3.  $AR = BR = \sqrt{0,5}$  ;  $AB \geq 1$



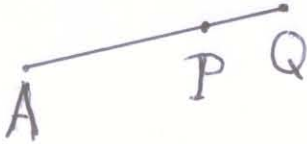
Type 4.  $AQ = \sqrt{0,5}$

Figure 4. Des cellules des deuxième, troisième et quatrième types (tétraèdres tel EFGH, double cônes ou doubles portions de cônes accolés par leur base, secteur sphérique).

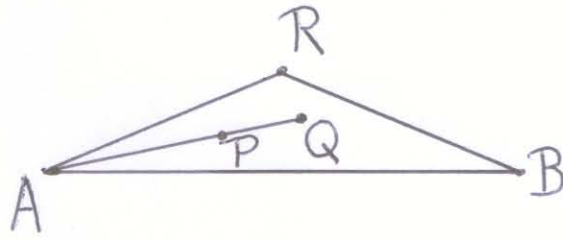
Dans les rangements de Kepler les cellules du second type sont des « huitièmes d'octaèdre régulier » :  $EF = EG = FG = 1$  ;  $EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$ . Les angles en H sont droits.

*Cells of the second, third and fourth types (tetrahedrons as EFGH, double cones or part of double cone with a common circular basis, spherical sectors).*

*In the Kepler's packings the cells of the second type are "eighths of regular octahedron":  $EF = EG = FG = 1$  ;  $EH = FH = GH = \sqrt{0.5}$ . The angles at H are straight.*

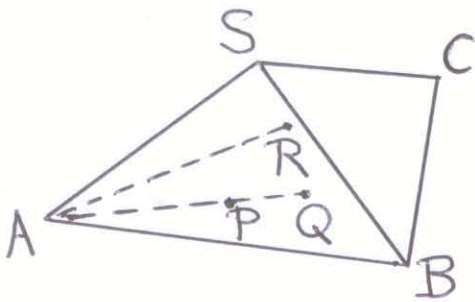


Type 4.  $AQ = \sqrt{0,5}$  ; Q isolé



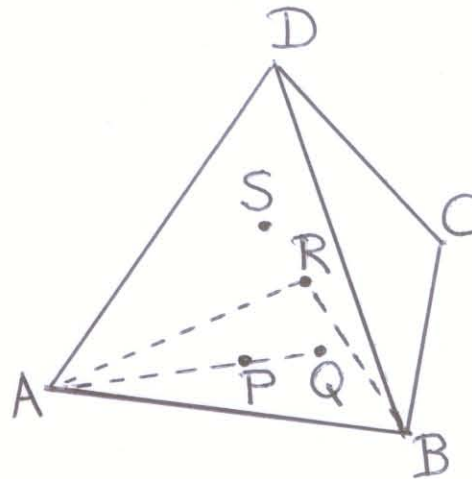
Type 3.  $AQ = AR = BR = \sqrt{0,5}$

$BQ < \sqrt{0,5} \leftrightarrow Q$  non isolé ; R isolé



Type 2.  $AQ = AR = BR = AS = BS = CS = \sqrt{0,5}$

$RC < \sqrt{0,5} \leftrightarrow R$  non isolé ; S isolé



Type 1.  $AQ = AR = BR = AS = BS = CS = \sqrt{0,5}$

$SD < \sqrt{0,5} \leftrightarrow S$  non isolé

Figure 5. Construction des quatre types de cellules dans le sens opposé : du quatrième type au premier.

*Construction of the four types of cells in the opposite direction : from the fourth type to the first.*

$$\varphi_1 = 0 \text{ en } r = 1,325\,348\,175\dots$$

Pentes finales en  $\{\sqrt{2}; 0\}$

$$d\varphi/dr = 0$$

$$d\varphi_1/dr = 0,143\,441\dots$$

$$dj/dr = 6,522\,816\dots$$

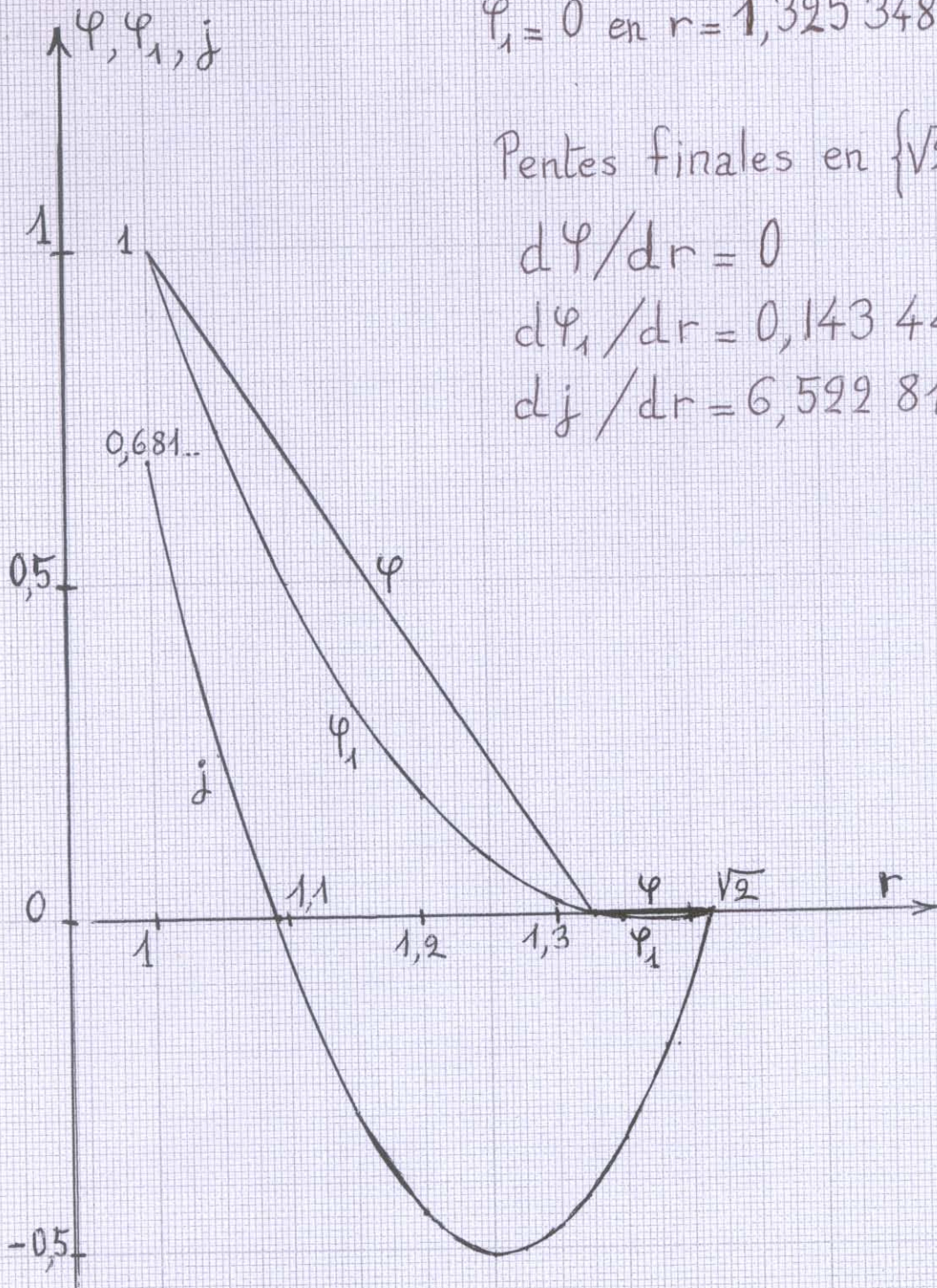
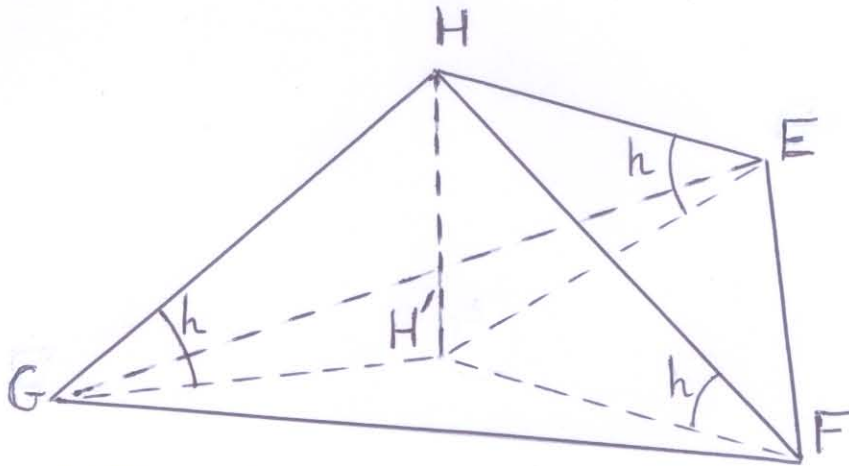


Figure 6. Les fonctions  $\varphi(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  et  $j(r)$  définies en (17), (15)-(16) et (22).  
 The functions  $\varphi(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  et  $j(r)$  defined in (17), (15)-(16) et (22).

$$EH = FH = GH = \sqrt{0,5}$$



$$EF \geq 1$$

$$EG \geq 1$$

$$FG \geq 1$$

$$EH' = FH' = GH' < \sqrt{0,5}$$

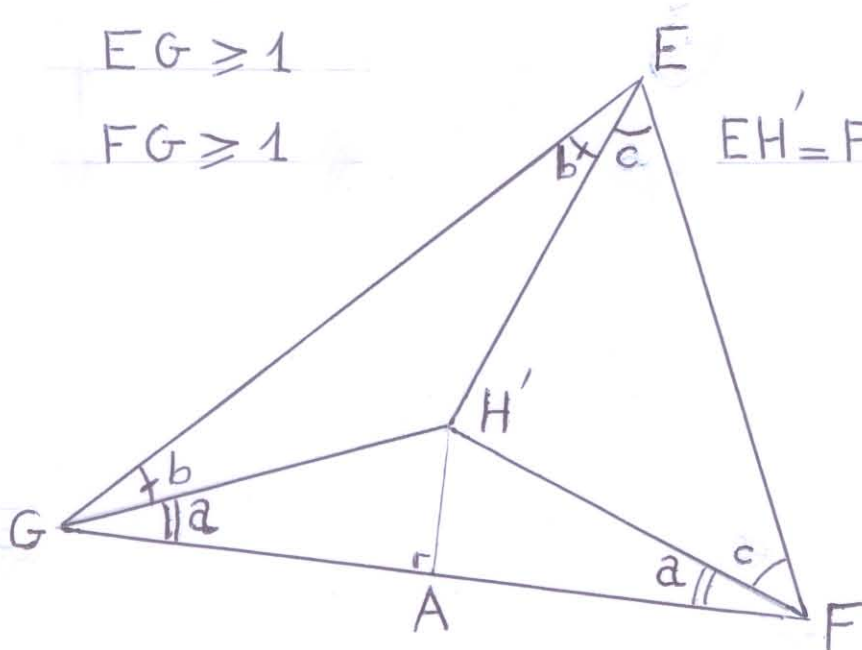


Figure 7. Décomposition du tétraèdre EFGH.  
Decomposition of the tetrahedron EFGH.

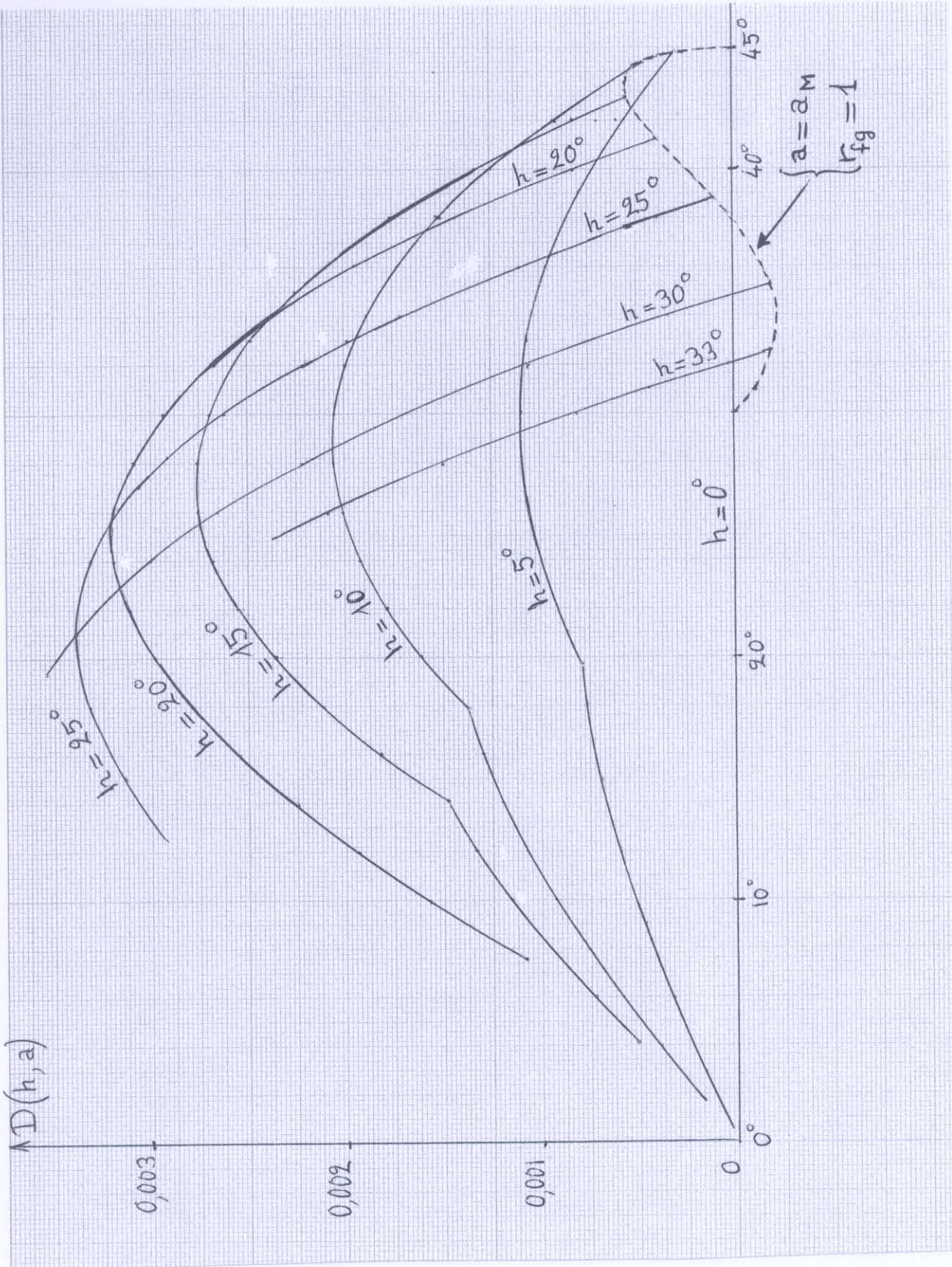


Figure 8. La fonction  $D(h, a)$  définie en (29).  
 The function  $D(h, a)$  defined in (29).

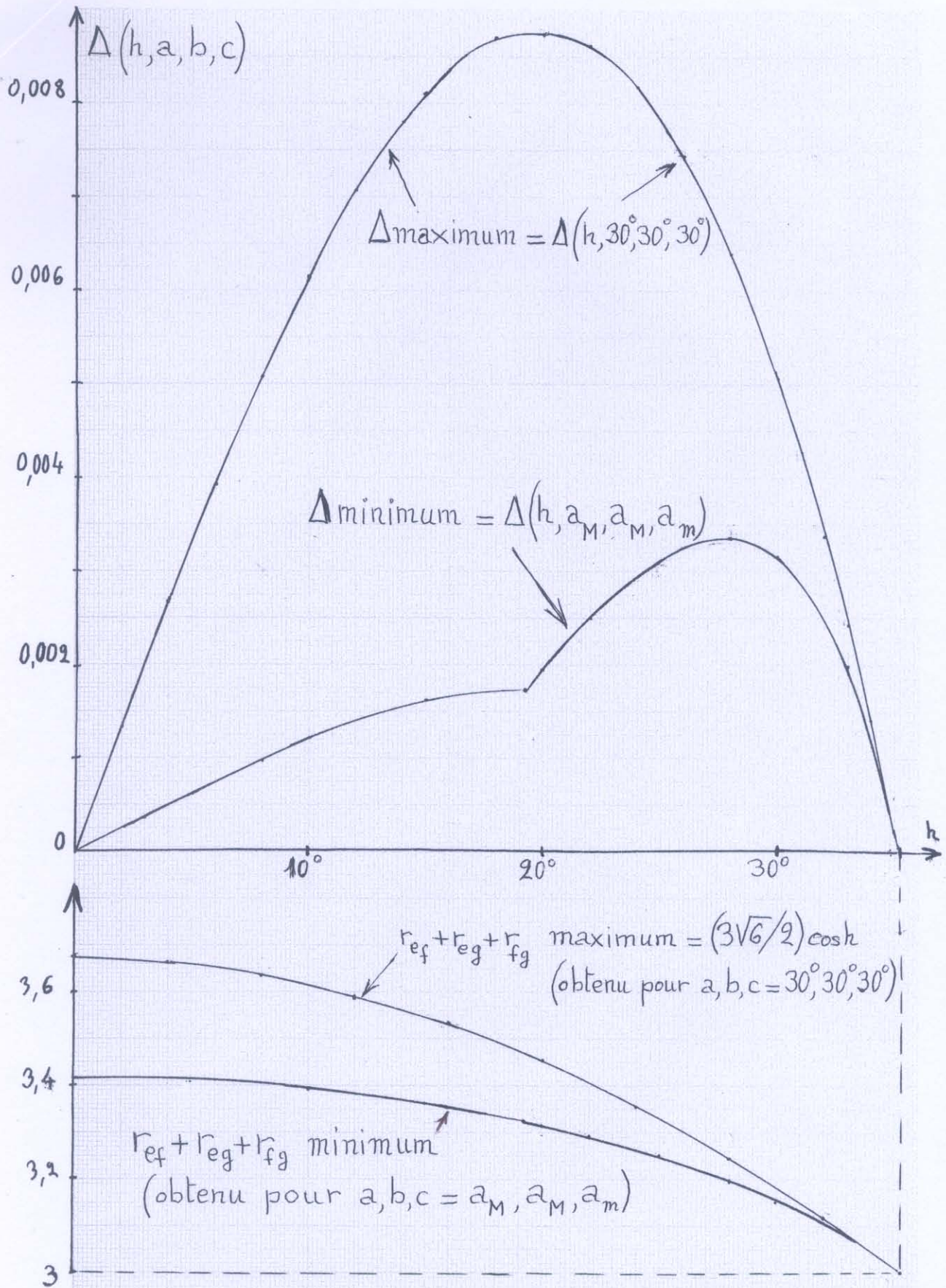
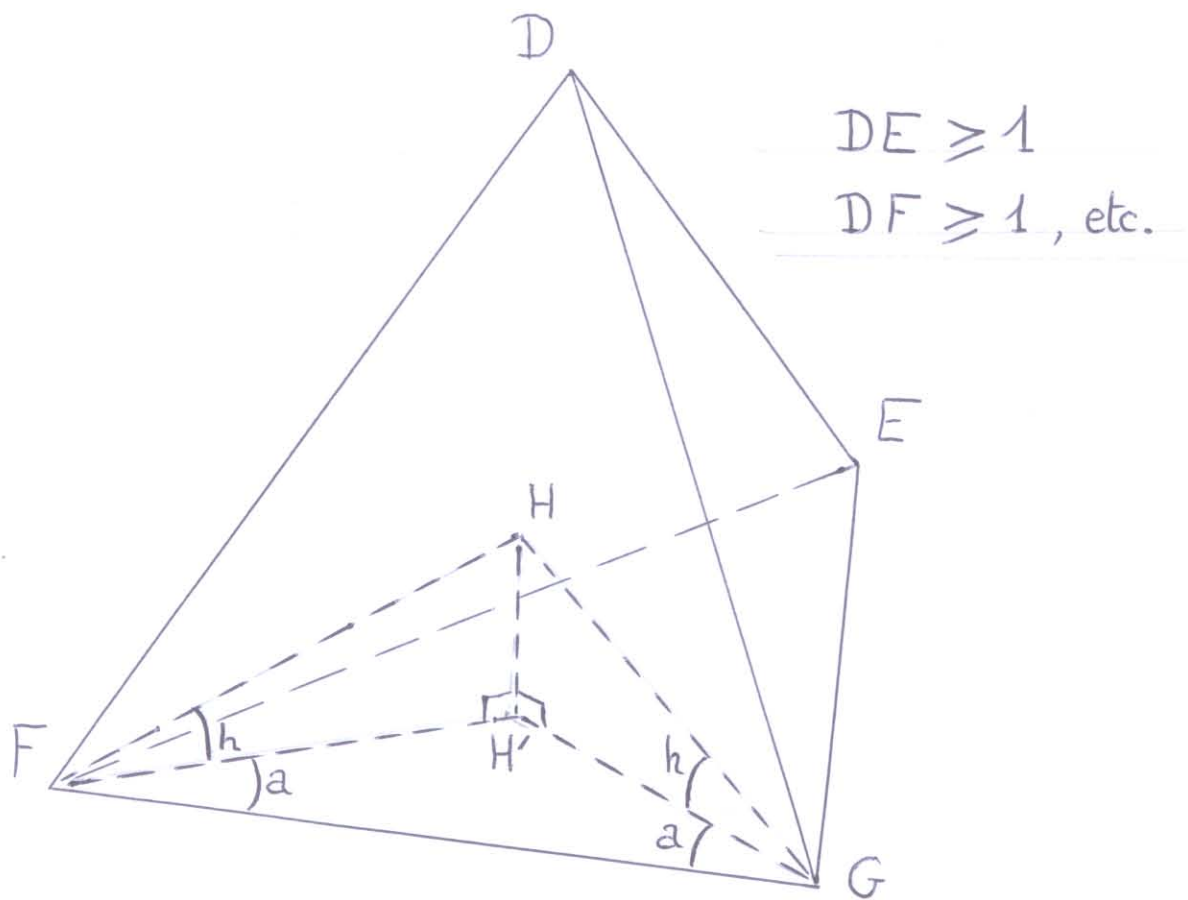


Figure 9. En fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$   
*In terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .*



$$DH = EH = FH = GH = \rho < \sqrt{0,5}$$

Pour  $\rho$  donné,  $h$  est minimum  
 quand  $DE = DF = DG = 1$ , et maximum  
 quand  $EF = EG = FG = 1$ .

Figure 10. Analyse des cellules du premier type.  
*Analysis of cells of the first type.*



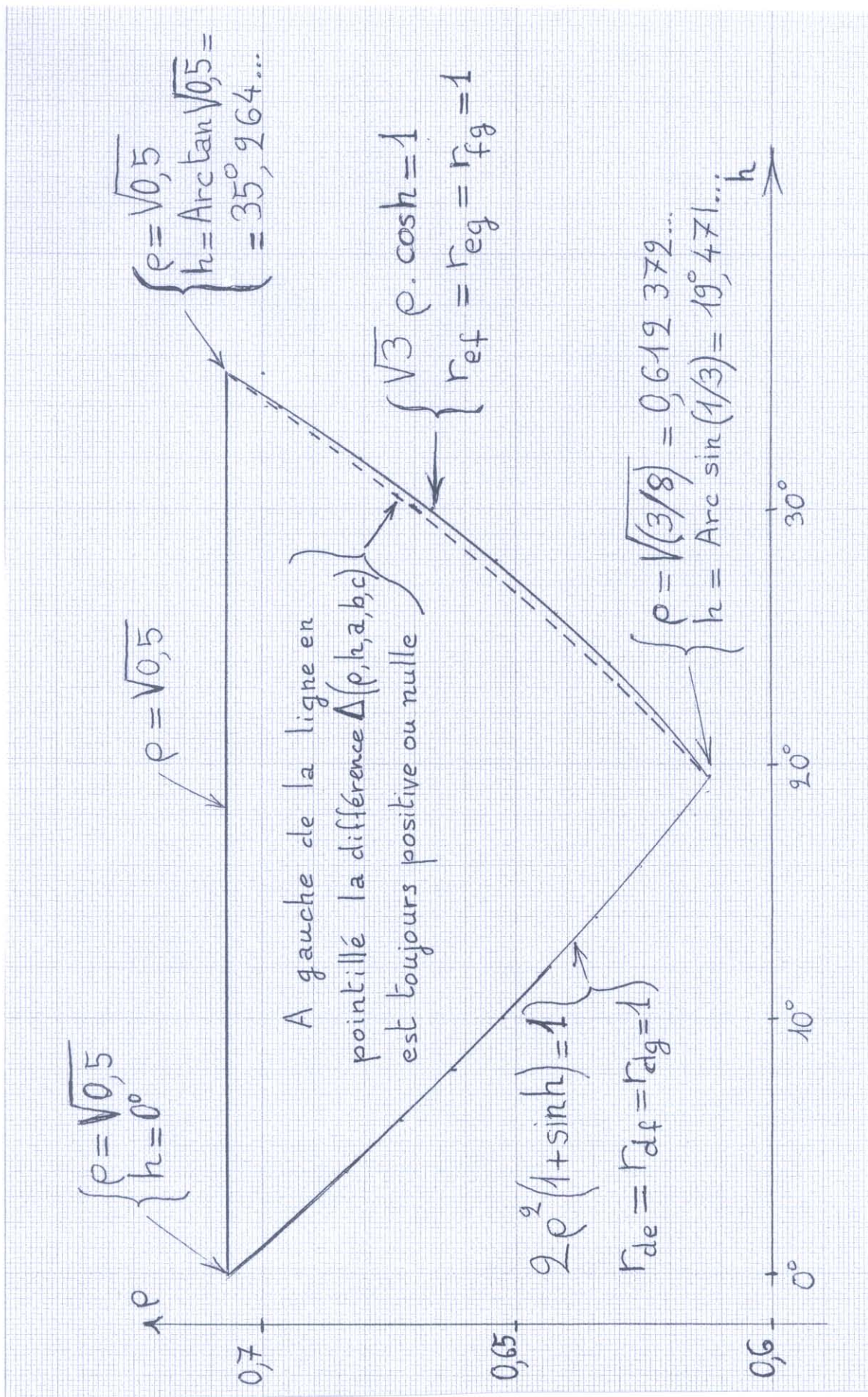


Figure 11. Le domaine des paramètres h et rho.  
 The domain of parameters h and rho.

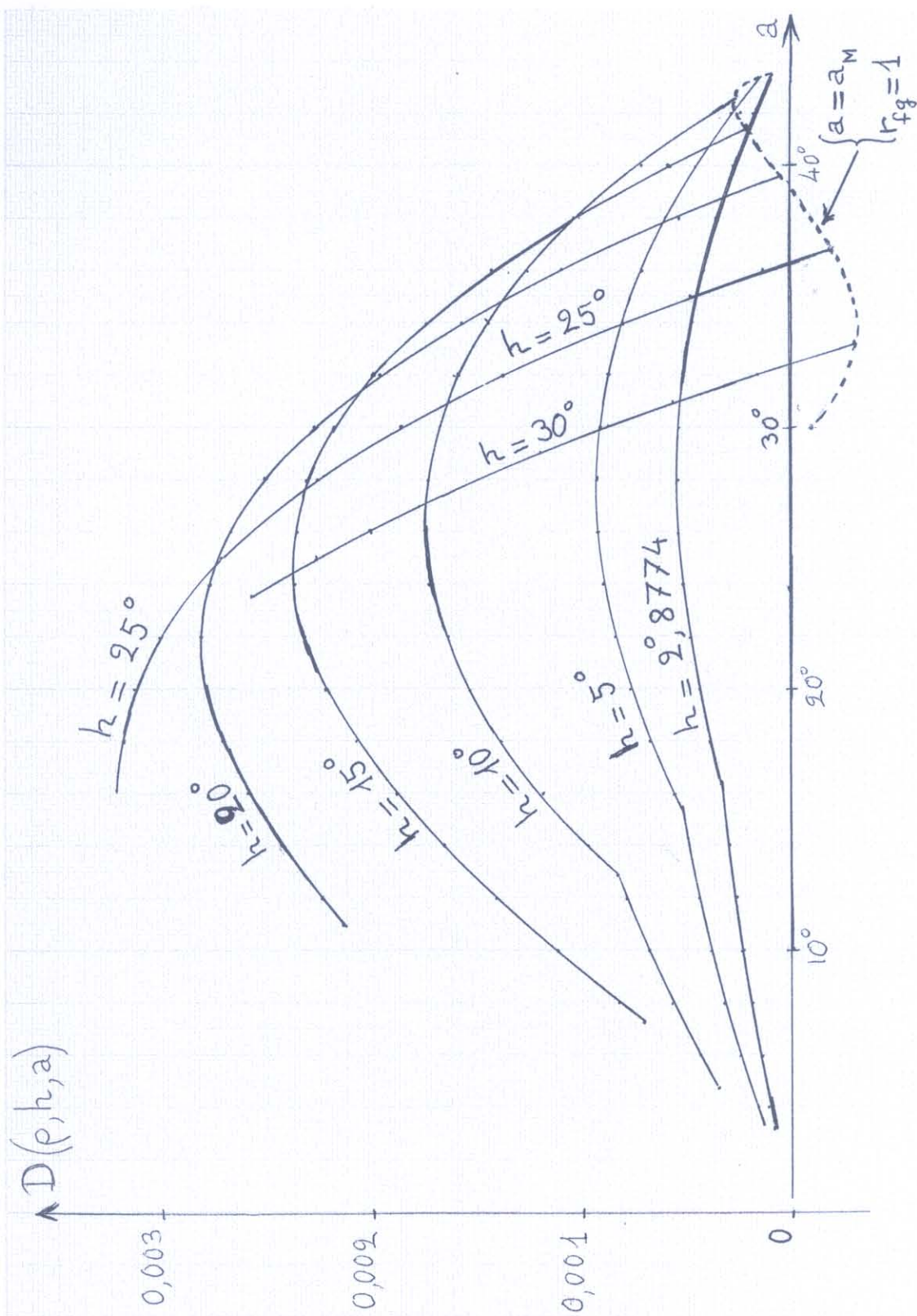


Figure 12. La fonction  $D(\rho, h, a)$ , définie en (36), pour  $\rho = 0.69$   
 The function  $D(\rho, h, a)$ , defined in (36), for  $\rho = 0.69$

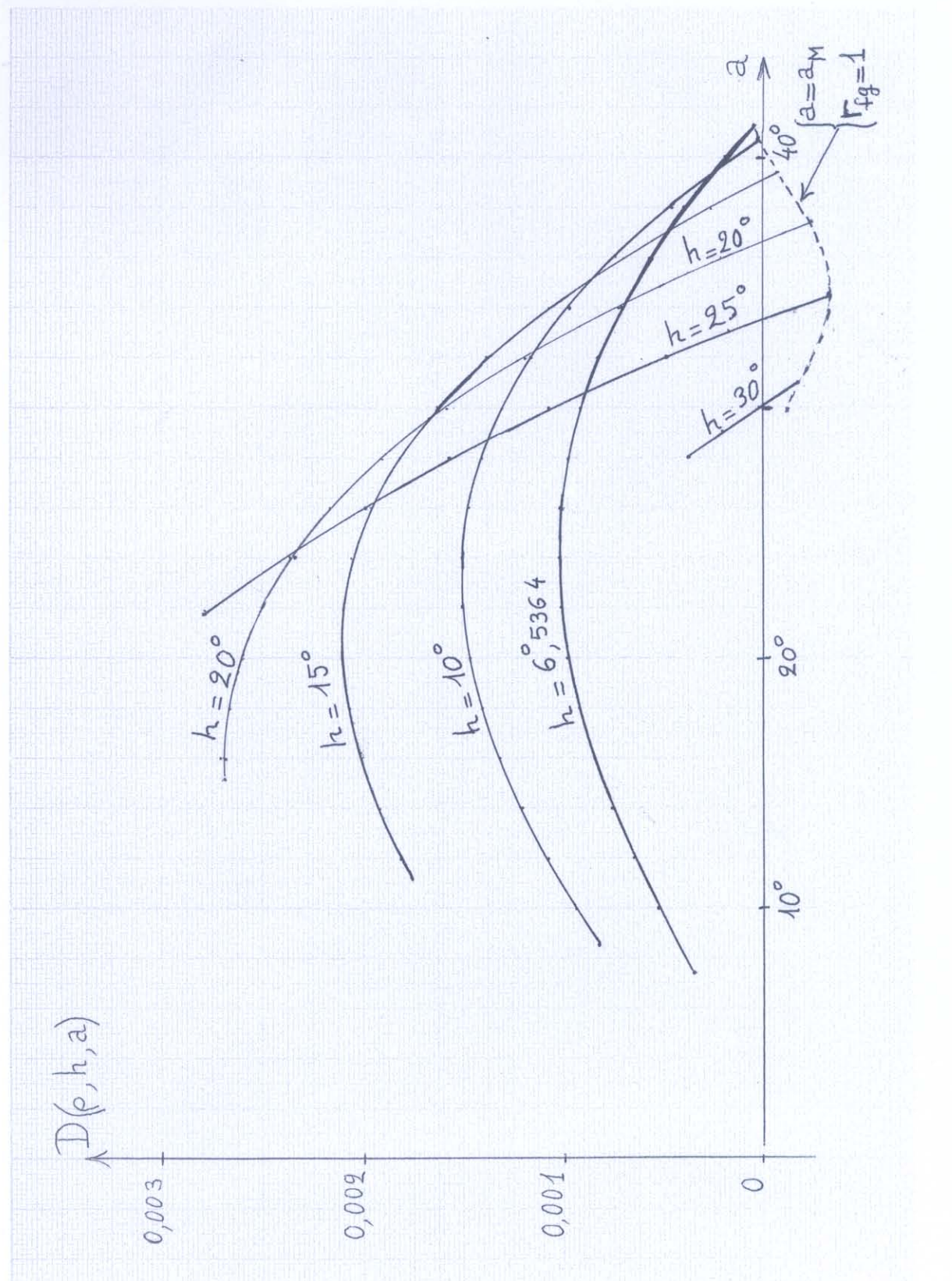


Figure 13. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.67$   
 The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.67$

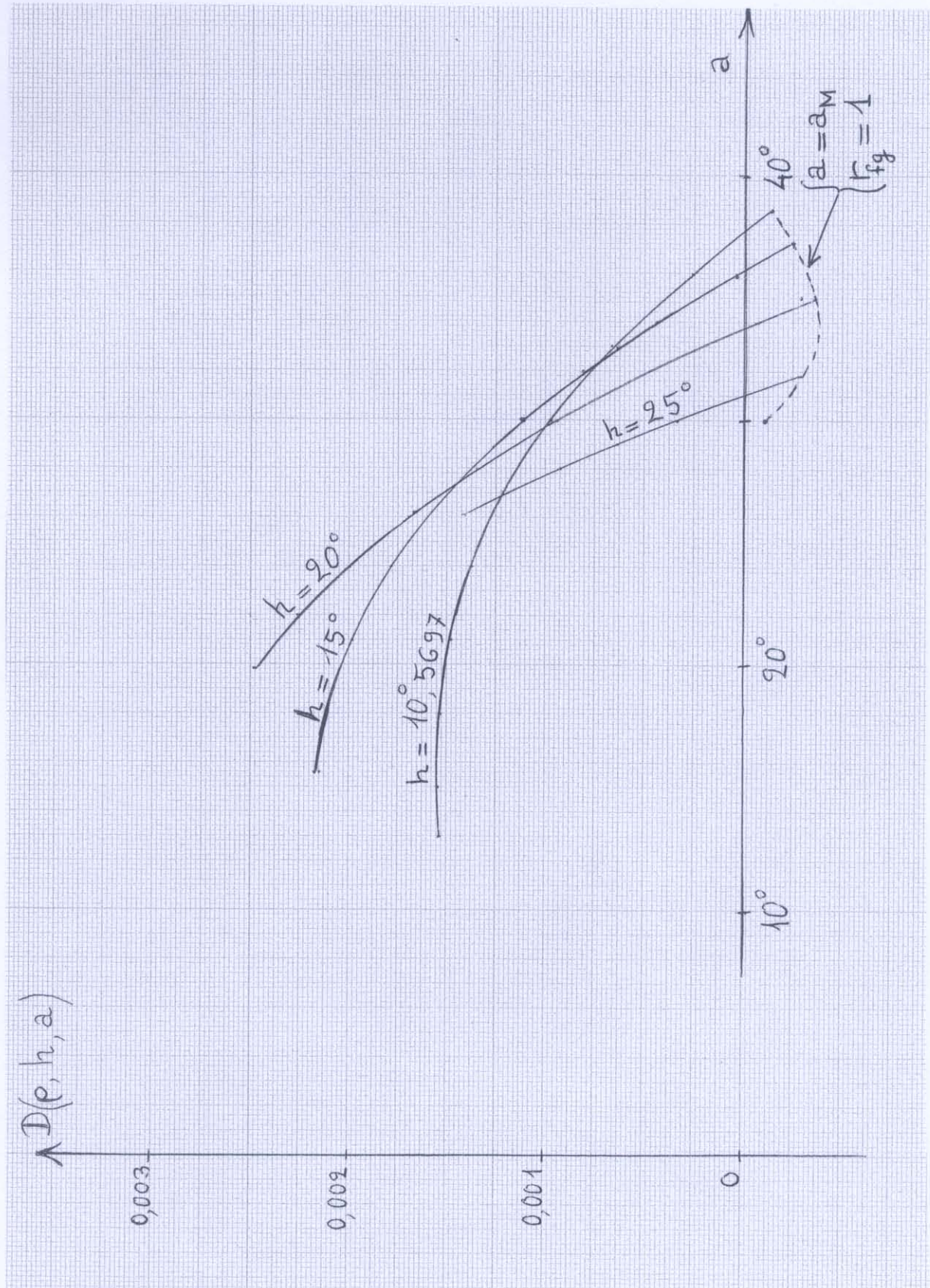


Figure 14. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.65$   
 The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.65$

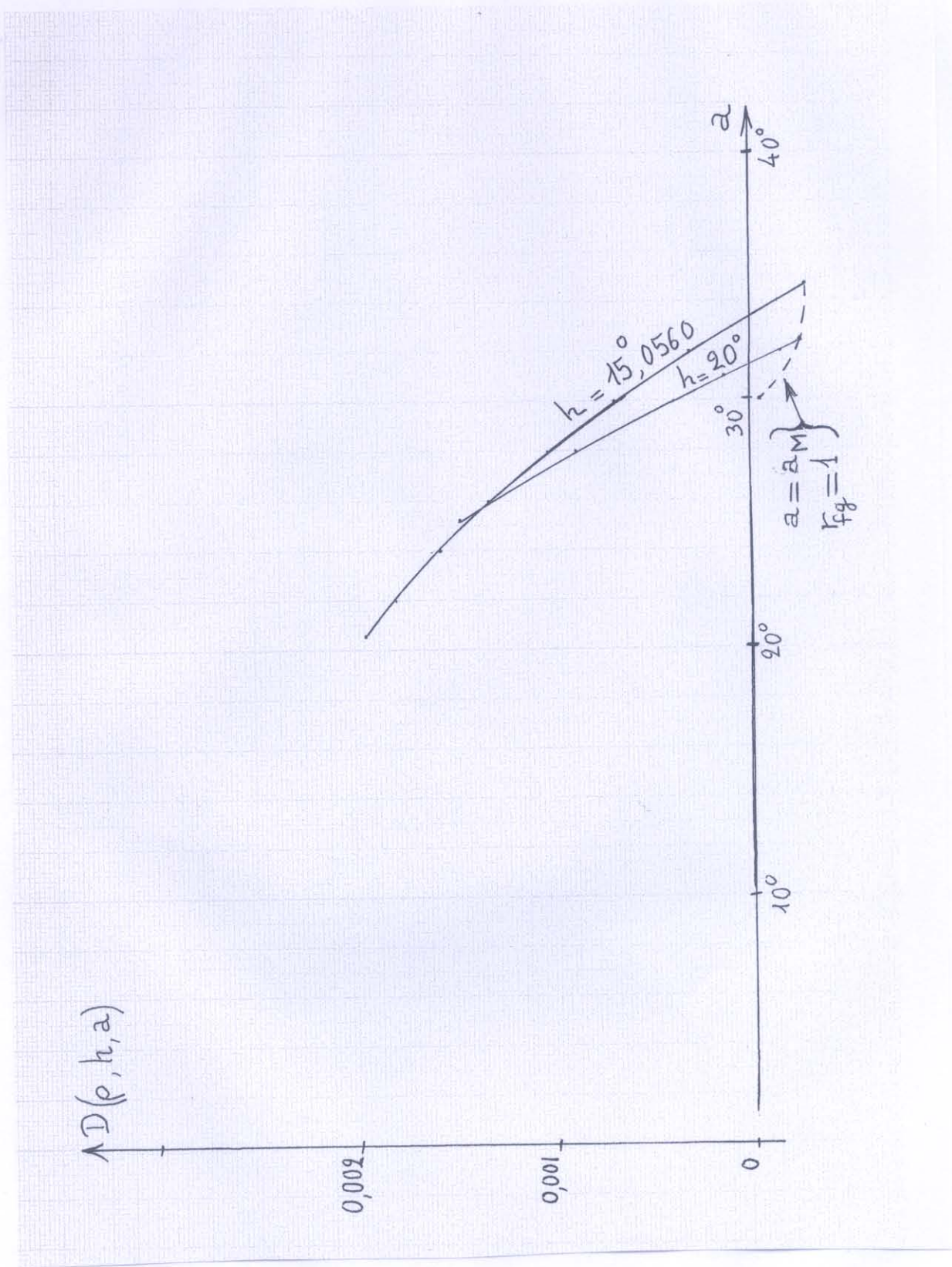


Figure 15. La fonction  $D(\rho, h, a)$  pour  $\rho = 0.63$   
 The function  $D(\rho, h, a)$  for  $\rho = 0.63$

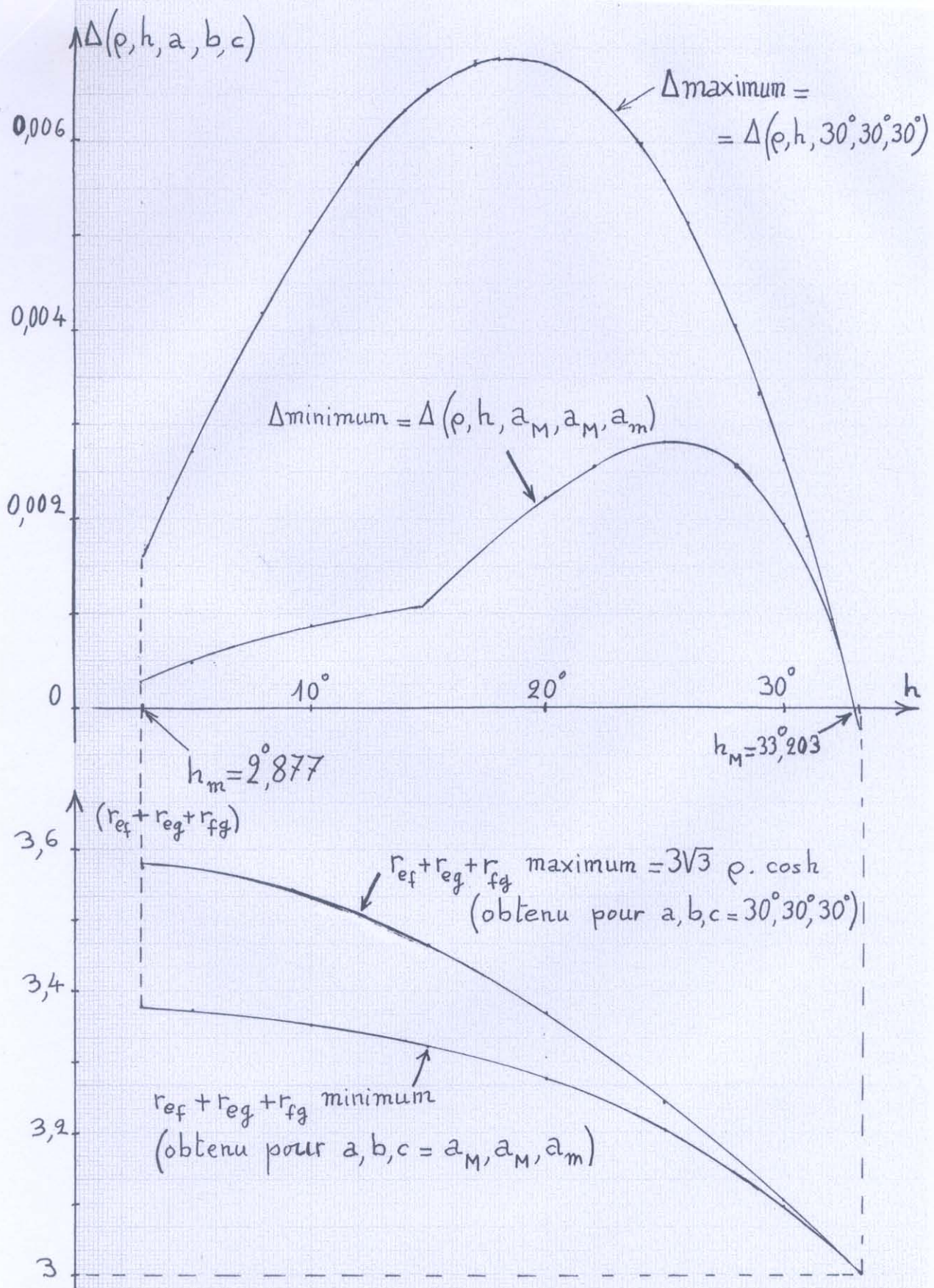


Figure 16. Pour  $\rho = 0,69$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$

For  $\rho = 0.69$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .

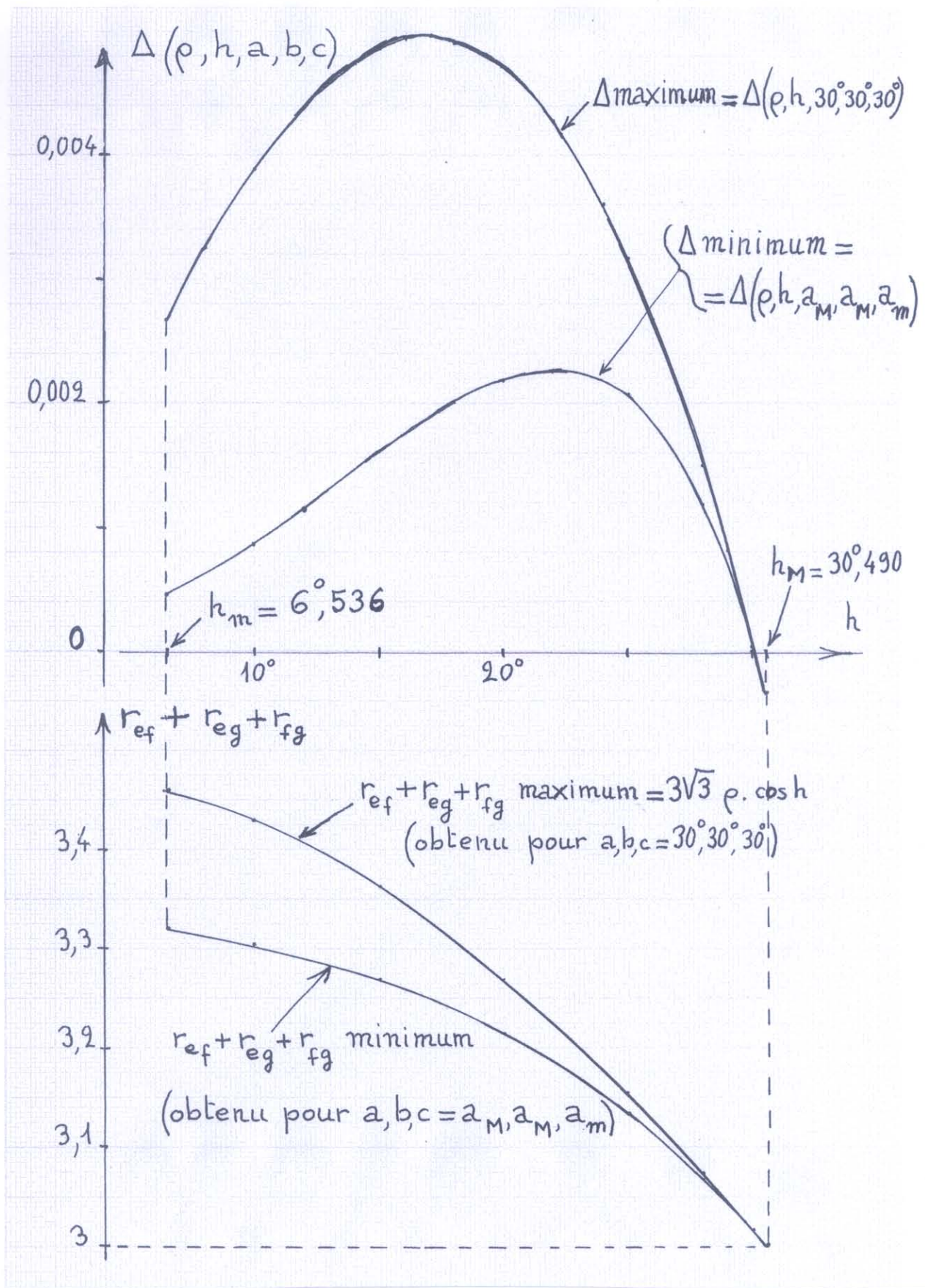


Figure 17. Pour  $\rho = 0,67$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$

For  $\rho = 0.67$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .

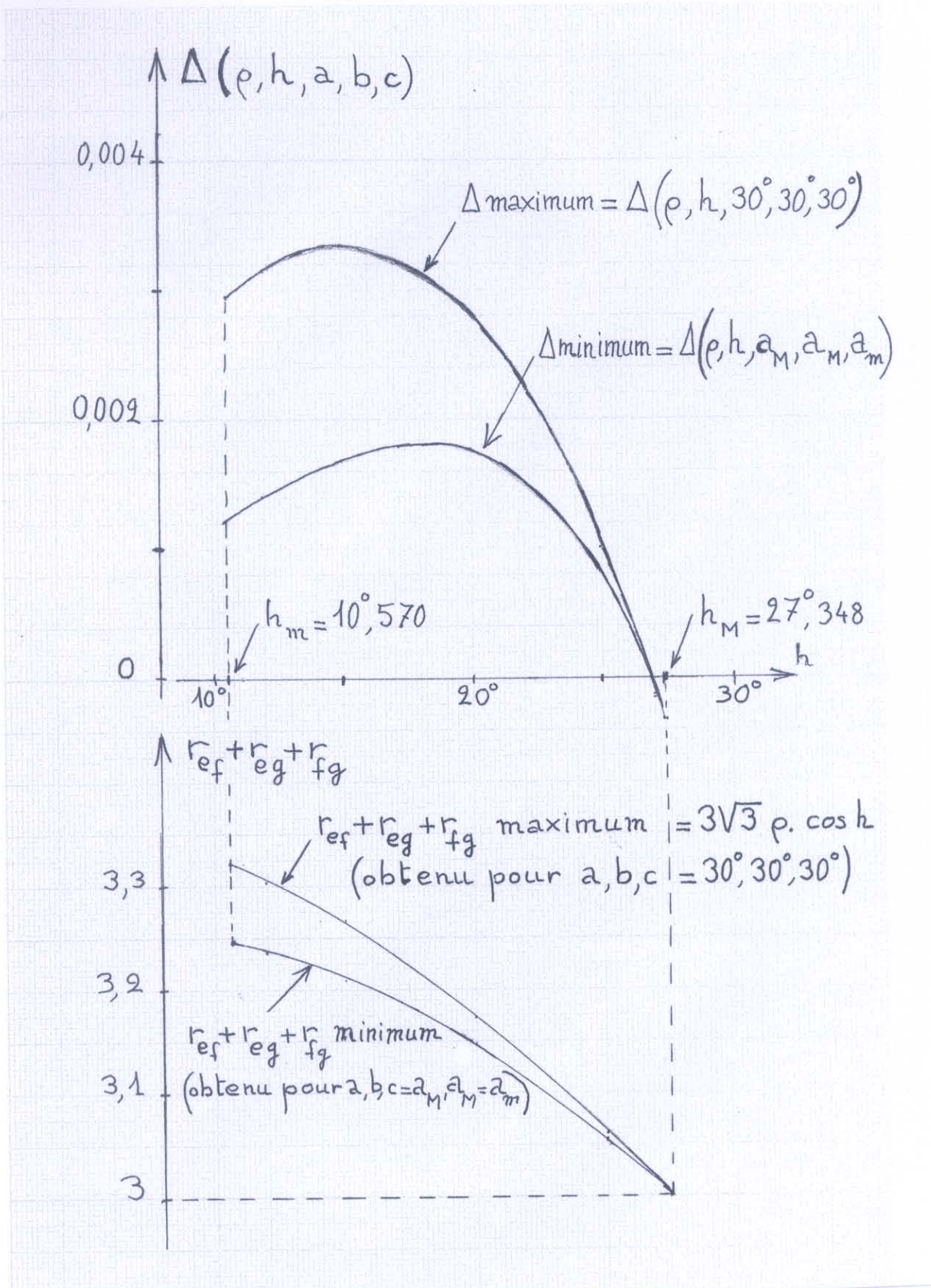


Figure 18. Pour  $\rho = 0,65$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$

For  $\rho = 0.65$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .



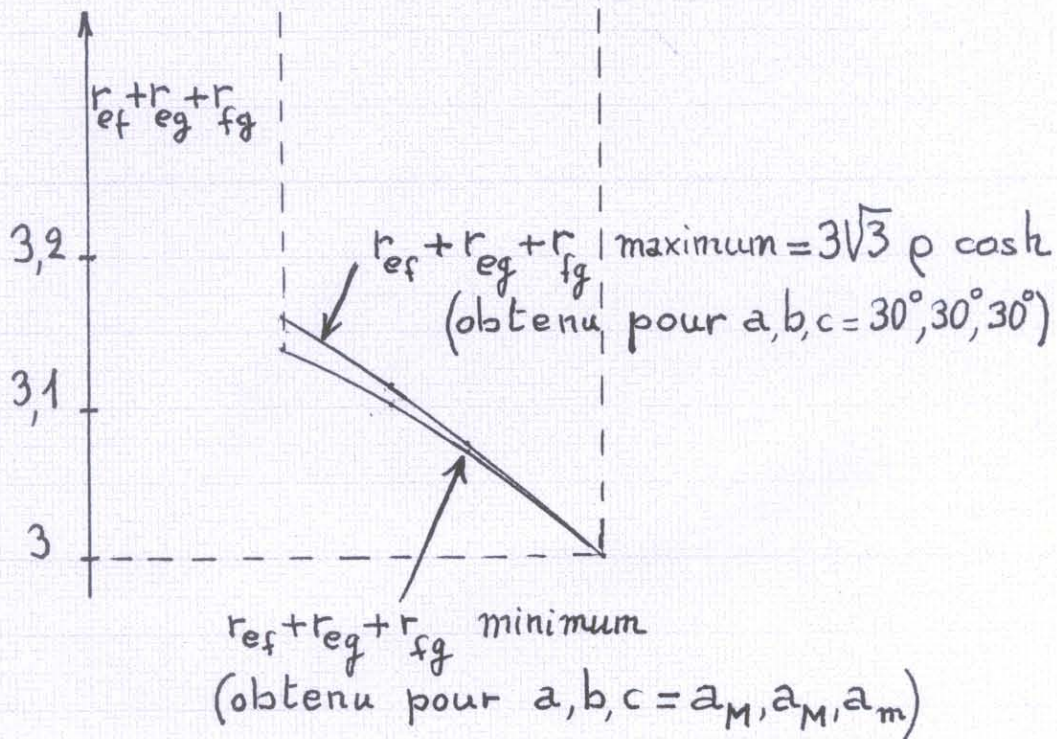
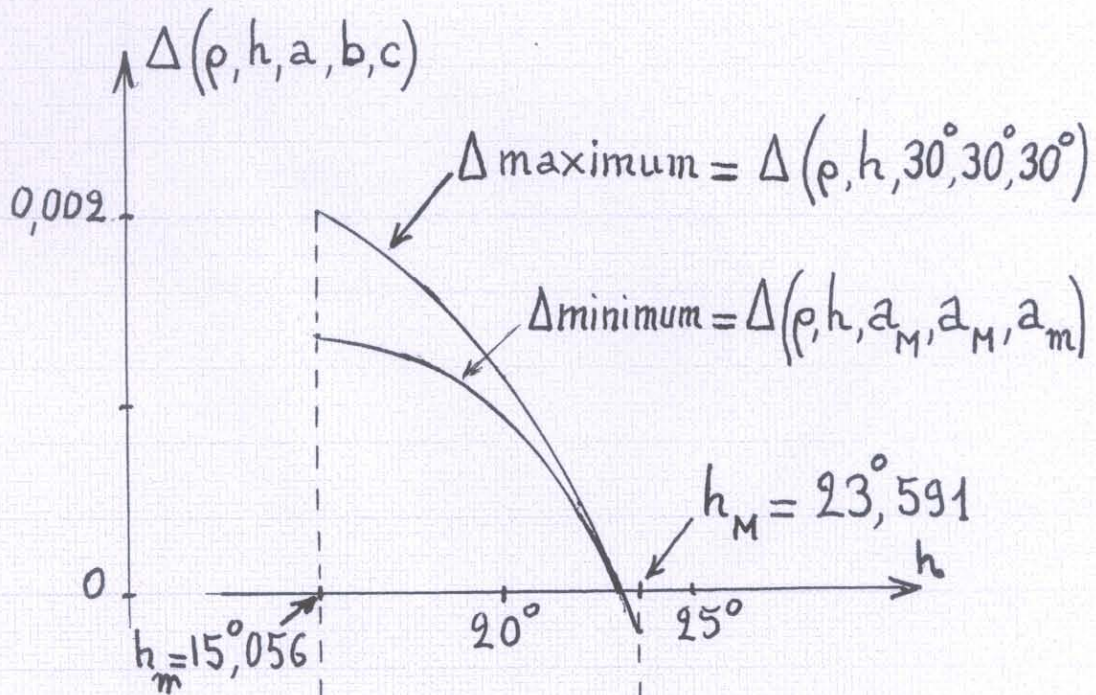


Figure 19. Pour  $\rho = 0,63$  et en fonction de l'angle  $h$ , le minimum et le maximum des fonctions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  et  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$

For  $\rho = 0.63$  and in terms of the angle  $h$ , the minimum and the maximum of the functions  $\Delta(\rho, h, a, b, c)$  and  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$ .

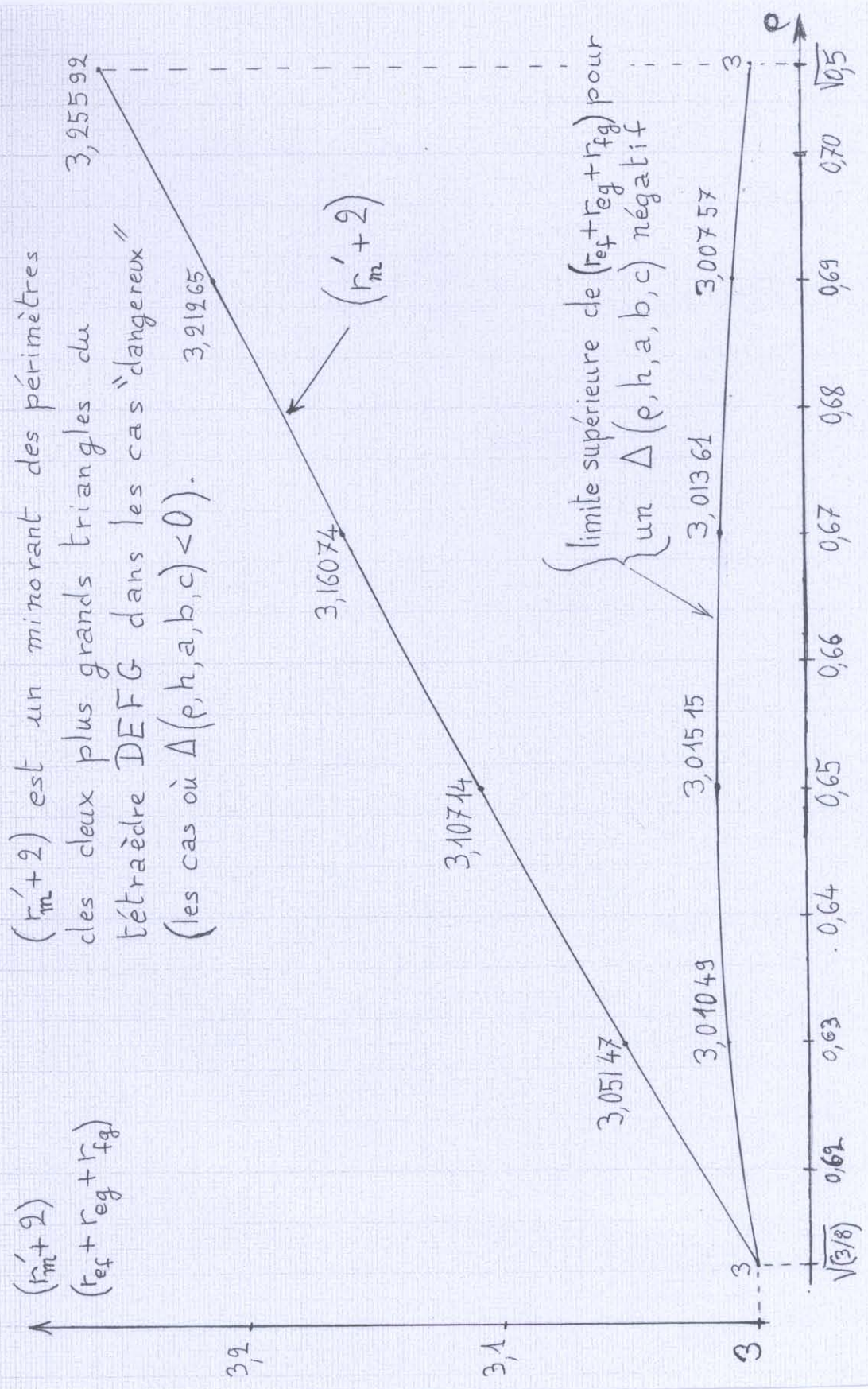


Figure 20. Les fonctions  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  et  $r'_m + 2$  dans les cas « dangereux » (les cas où  $\Delta(\rho, h, a, b, c) < 0$ ).

The functions  $r_{ef} + r_{eg} + r_{fg}$  and  $r'_m + 2$  in the "dangerous" cases (the cases in which  $\Delta(\rho, h, a, b, c) < 0$ ).

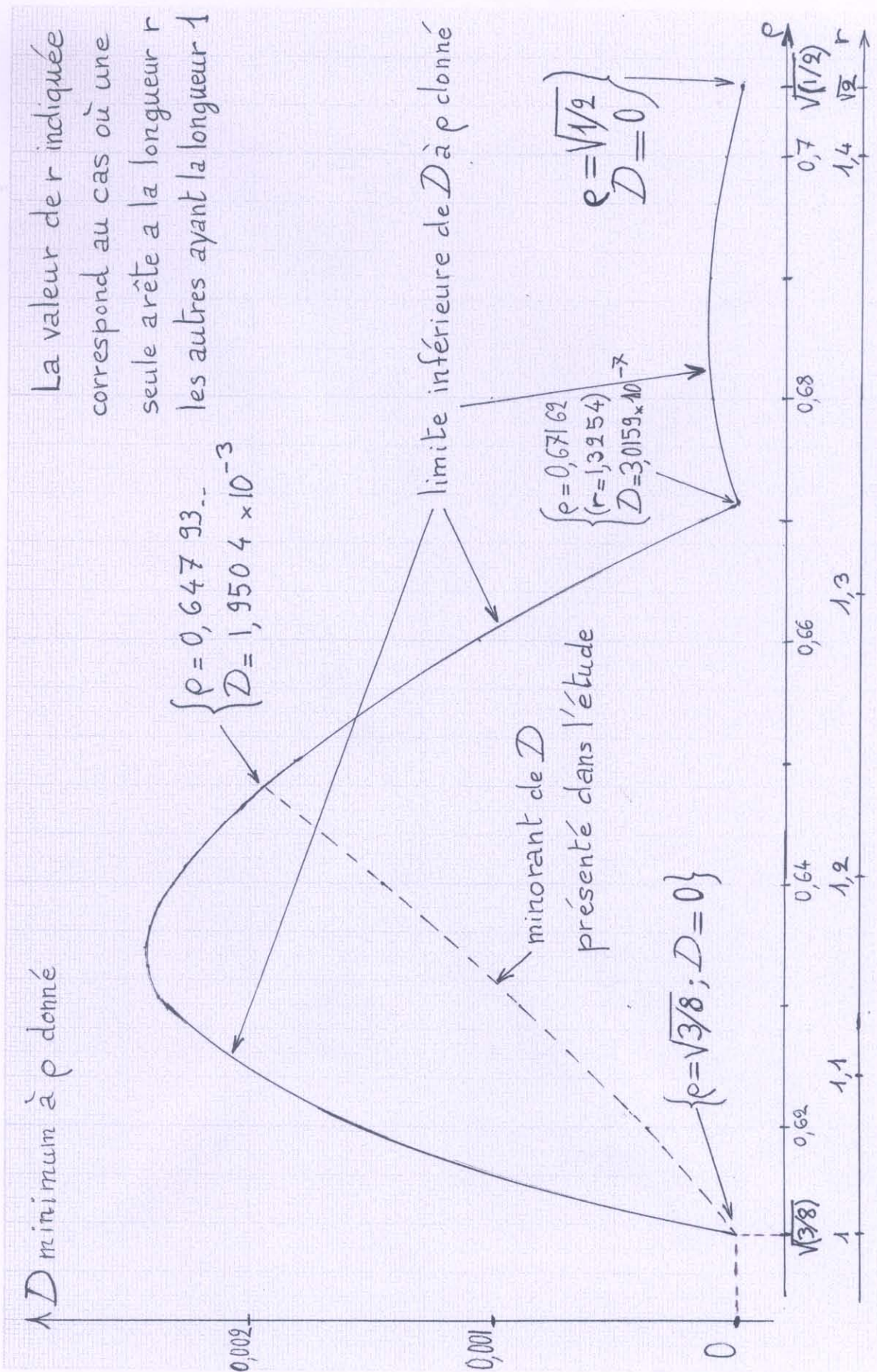


Figure 21. En fonction de  $\rho$ , la limite inférieure et un minorant de la différence  $D$  entre le volume disponible et le volume demandé.

*In terms of the length  $\rho$ , the lower limit and a lower bound of the difference  $D$  between the available volume and the required volume.*