



HAL
open science

Convection naturelle dans une cavité horizontale occupée par deux fluides non miscibles : solution analytique et numérique

Fakhreddine Oueslati, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Ali Belghith

► **To cite this version:**

Fakhreddine Oueslati, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Ali Belghith. Convection naturelle dans une cavité horizontale occupée par deux fluides non miscibles : solution analytique et numérique. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. 5p. hal-00158373

HAL Id: hal-00158373

<https://hal.science/hal-00158373>

Submitted on 29 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE HORIZONTALE OCCUPEE PAR DEUX FLUIDES NON MISCIBLES: SOLUTION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

F. S. OUESLATI⁽¹⁾, R. BENNACER⁽²⁾, H. SAMMOUDA⁽³⁾ and A. BELGHITH⁽¹⁾

(1) LETTM, Département de physique, Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie.

(2) LEEVAM, Rue d'Eragny-Neuville sur Oise 95031 Cergy-Pontoise Cedex – France

(3) Faculté des Sciences de Monastir, Tunisie.

Fakhreddine.Oueslati@fst.rnu.tn

Résumé: La convection naturelle, dans le cas de deux fluides non miscibles superposés dans une cavité horizontalement allongée, est étudiée numériquement et analytiquement. Les frontières horizontales sont soumises à des flux thermiques croisés. La solution analytique, basée sur l'approximation d'écoulements parallèles, s'avère en bon accord avec la solution numérique. L'existence d'écoulements naturels et antinaturels est démontrée. Les solutions multiples d'état d'équilibre sont possibles dans une gamme du rapport des viscosités.

Mots-clés: Convection naturelle, écoulements parallèles, fluides non miscibles, écoulement naturel, écoulement antinaturel.

1. INTRODUCTION

La stabilité et la convection naturelle, dans un système composé de deux fluides superposés non miscibles, sont étudiées numériquement et analytiquement. Nous considérons une cavité horizontale allongée. Les frontières horizontales sont soumis à des flux thermiques uniformes q' alors que celles verticales sont exposés à un flux d'intensité aq' . Dans la formulation du problème, nous employons les équations de Naviers-Sokes. Des résultats sont donnés pour une gamme des valeurs de chacun des paramètres régissant. La solution analytique, basée sur l'approximation d'écoulements parallèles, s'avère en bon accord avec la solution numérique des équations régissantes. L'existence des écoulements naturels et antinaturels est démontrée. En effet, le nombre de Rayleigh critique dépend de l'intensité latérale de chauffage. Dans ces conditions, des solutions analytiques approximatives pour la convection unicellulaire dans la région centrale de la cavité peuvent être obtenues en utilisant une prétention de flux parallèle. Des résultats sont présentés pour des nombres de Rayleigh critiques comme l'effet de l'intensité de chauffage latéral, du rapport des viscosités cinématique et d'autres paramètres sur l'écoulement et le transfert de chaleur convectifs. Les solutions multiples d'état d'équilibre sont possibles dans une gamme de la du rapport des viscosités cinématiques, qui dépend fortement de l'intensité de la viscosité cinématique du fluide supérieur. Le fait qu'un des deux fluides est plus conducteur affecte non seulement les transferts thermiques produits par l'un ou l'autre mais également le nombre critique de Rayleigh.

2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME

La géométrie du système et le problème physique sont montrés dans fig. 1. L'approximation de Boussinesq est adoptée: la densité varie linéairement avec la température, comme:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T'_0)] \quad (1)$$

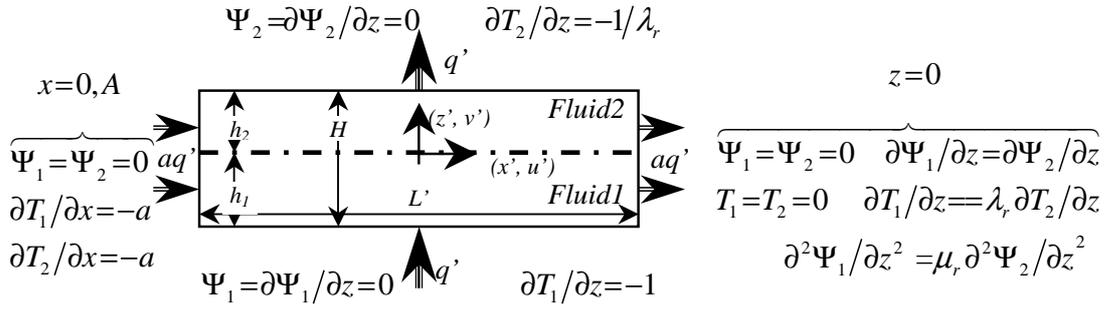


Figure 1: configuration du problème et system coordonnée

Les équations adimensionnelles qui décrivent le problème, sont:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi_1}{\partial t} + \mathfrak{S}(\Psi_1, \nabla^2 \Psi_1) = \text{Pr}_1 \nabla^4 \Psi_1 - \text{Pr}_1 Ra_T \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathfrak{S}(\Psi_1, T_1) = \nabla^2 T_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi_2}{\partial t} + \mathfrak{S}(\Psi_2, \nabla^2 \Psi_2) = \nu_r \text{Pr}_1 \nabla^4 \Psi_2 - \beta_r \text{Pr}_1 Ra_T \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \mathfrak{S}(\Psi_2, T_2) = \alpha_r \nabla^2 T_2 \quad (5)$$

$$\text{avec : } \mathfrak{S}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \alpha_r = \alpha_2 / \alpha_1, \nu_r = \nu_2 / \nu_1, \beta_r = \beta_2 / \beta_1$$

Les fonctions de courant sont définies comme : $u_{1,2} = \partial \Psi_{1,2} / \partial z$ and $w_{1,2} = -\partial \Psi_{1,2} / \partial x$.

Le nombre de Rayleigh thermique est donné par: $Ra_T = g \beta_1 q' H^4 / \lambda_1 \alpha_1 \nu_1$.

3. SOLUTION NUMERIQUE

La méthode des volumes finis est utilisée. L'algorithme SIMPLER est employé pour résoudre les équations. Les critères de convergence doivent conserver la masse et l'énergie globalement et localement. Afin d'assurer que les résultats soient indépendants, différentes mailles sont examinées. Des maillages non uniformes très fins près des frontières sont adoptées. On assume que la solution est convergée quand l'erreur est moins de 10^{-7} .

4. SOLUTION ANALYTIQUE

Dans la limite d'une cavité peu profonde ($A \gg 1$), les équations gouvernant le présent problème peut être considérablement simplifié et résolu analytiquement en utilisant l'approximation d'écoulement parallèle $\Psi_{1,2}(x, z) \approx \Psi_{1,2}(x)$, $T_{1,2}(x, z) \approx C_T x + \theta_{1,2}(x)$ et dans la partie centrale de la cavité. C_T est la constante inconnue du gradient de la température, respectivement dans la direction de x (voir par exemple la référence. (Mamou *et al.* 1998)). Avec ces approximations, la forme des équations régissantes (2)–(5) peut être réduite à:

$$\partial^4 \Psi_1 / \partial z^4 = E \quad (6)$$

$$d^2\theta_1/dz^2 = C_T d\Psi_1/dz \quad (7)$$

$$\partial^4\Psi_2/\partial z^4 = (\beta_r/\nu_r) E \quad (8)$$

$$d^2\theta_2/dz^2 = (C_T/\alpha_r) d\Psi_2/dz \quad (9)$$

Où $E = C_T Ra_T$. Les équations ci-dessus peuvent être résolues avec les conditions aux limites, pour rapporter les distributions de fonctions de courant et de températures. Les bilans énergétiques à chaque section verticale de la cavité donnent l'expression de C_T (voir par ex. Kalla *et al.* 2001).

5. RESULTATS ET DISCUSSION

La solution analytique prédise de l'approximation d'écoulements parallèles a été comparée avec la solution numérique obtenue par un code aux volumes finis. Le problème actuel est régi par six paramètres sans dimensions notamment, Ra_T , α_r , β_r , λ_r , ν_r et A . Figure 2 (a) et (b) illustre les profils verticaux de la vitesse, et de la température. On remarque que les résultats numériques sont en bon accord avec la solution analytique. On observe que le mouvement des deux fluides est dans le sens des aiguilles d'une montre et de même intensité et les gradients thermiques sont de même importance, ce qui est illustré par les isolignes de la fonction de courant et de température, Figure 2(c) et (d).

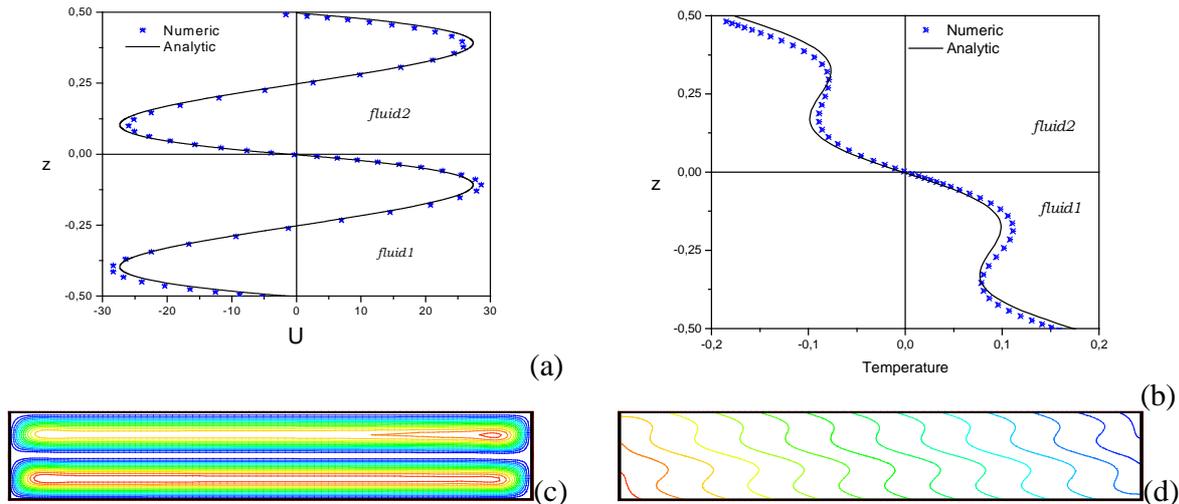


Figure 2: résultats analytique et numérique pour la distribution de: (a) composante des vitesses horizontales (b) température. Isolignes: (c) fonction de courant (d) température pour $A=8$, $\nu_r = \alpha_r = \beta_r = \lambda_r = Pr = 1$ et $Ra_T = 10^{+5}$

Le mouvement convectif considéré est induit par des forces de poussée thermiques résultant des conditions aux frontières appliquées. La présence de deux fluides non miscibles superposés dans la même cavité, engendre une structure d'écoulement composé de deux cellules, chacune révèle l'intensité de l'écoulement de chaque fluide. Toutefois, en tenant compte des propriétés thermophysique et à cause du cisaillement au niveau de l'interface entre les deux fluides, chaque fluide a tendance à imposer le sens d'écoulement dans tout le domaine.

Figure 3 montre l'effet du chauffage latéral (a) sur l'intensité de l'écoulement et le transfert thermique. On note, la présence de diagramme bifurcation fourche et ce pour les deux fluides, ce qui explique la multiplicité des solutions. En plus, l'existence de solution naturelle et solution

anti-naturelle. On remarque, que l'accroissement de a n'affecte pas le Rayleigh critique (Ra_{Tcr}) mais plutôt affecte le Rayleigh supercritique (Ra_{Tsup}) pour lequel apparition d'une troisième cellule, pour assurer la liaison au niveau de l'interface, Fig. 3(a). En plus, les gradients thermiques sont plus accentués ce qui révèle un transfert thermique plus important, Fig. 3(b).

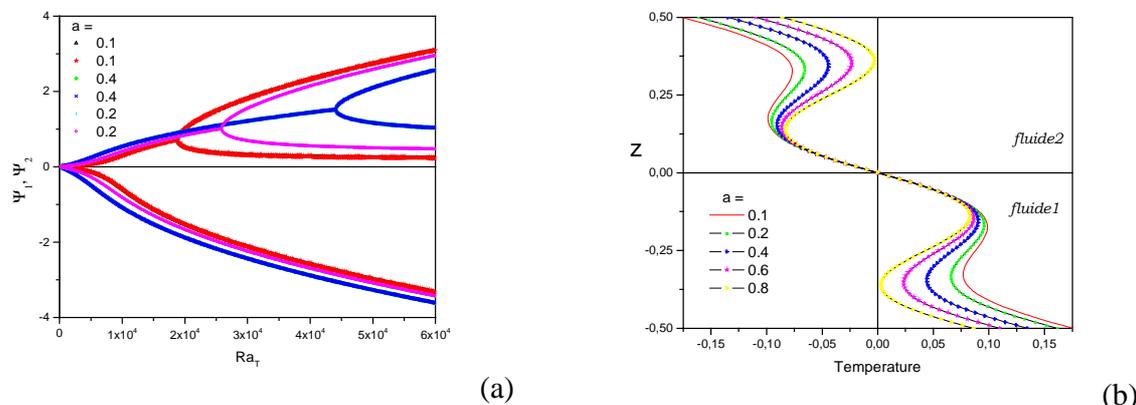


Figure 3: effet de a : $\alpha_r = \beta_r = \lambda_r = \nu_r = 1$ et $A=8$, (a) Diagramme de bifurcation (b) profils de température au plan médian vertical pour $Ra_T = 10^{+5}$

Le paramètre le plus important dans ce problème est le rapport des viscosités (ν_r). On expose sur la Figure 4, l'effet de ν_r sur l'intensité de l'écoulement et le transfert thermique. On note, en plus de la présence de diagramme de bifurcation fourche, que l'intensité de l'écoulement décroît avec l'accroissement de la viscosité, inversement le mouvement du fluide 2 est plus intense lorsque sa viscosité est plus faible, ce qui est illustré par la figure 4(a). Les profils des vitesses horizontales dans le plan médian vertical illustrent bien ce constat, Fig. 4(b). Également, l'accroissement de ν_r affecte non seulement le (Ra_{Tcr}) mais aussi le (Ra_{Tsup}). En effet, le fait de croître ν_r , fait translaté la valeur du (Ra_{Tsup}), ce qui est conséquence de l'affaiblissement de l'intensité de l'écoulement.

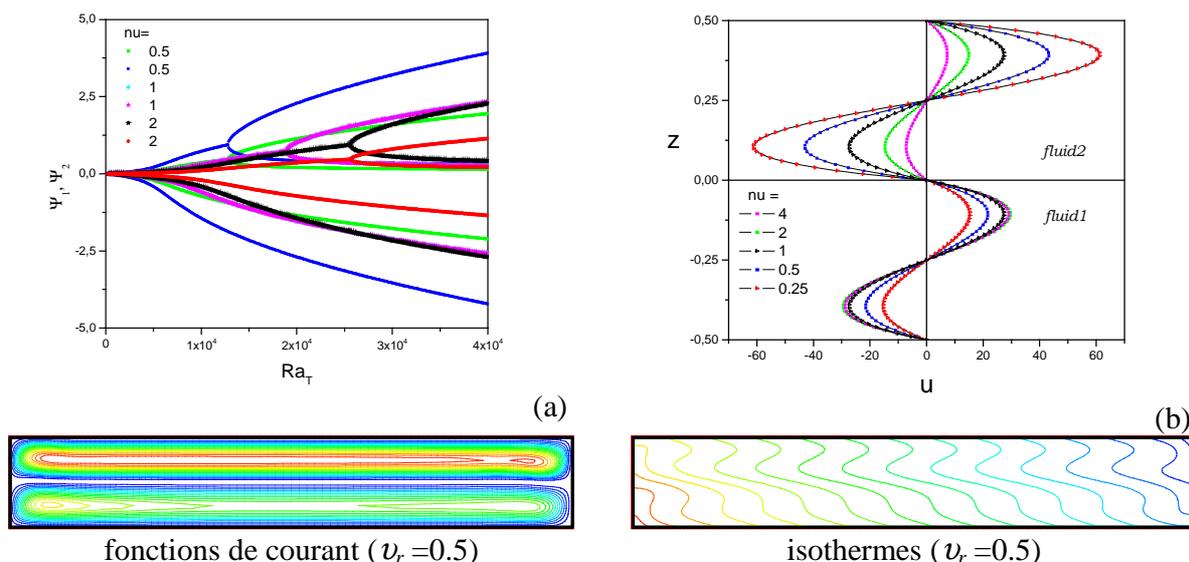


Figure 4: effet de ν_r : $a=0.1$, $\beta_r = \lambda_r = \nu_r = 1$ et $A=8$, (a) Diagramme de bifurcation (b) profils de vitesses horizontales dans le plan médian vertical pour $Ra_T = 10^{+5}$

6. CONCLUSION

Le problème de la convection naturelle dans un domaine horizontal, occupé par deux fluides non miscible superposés, soumis aux flux croisés de chaleur a été étudié. Des solutions analytiques pour la fonction de courant et la température, dans la région centrale de chaque fluide, sont obtenues en utilisant une approximation d'écoulements parallèles. Les résultats analytiques indiquent que pour la convection supercritique, quand les contributions de cisaillement et thermiques déstabilisent, plus de trois solutions différentes, un de ces solutions étant instables, sont possibles à un ensemble donné de paramètres régissant à condition que la droite soit rendue plus haute qu'une valeur critique qui dépend de a , de v_r et de Ra_T . L'existence de solutions multiples à proximité de $a=0$ a été également démontrée. On observe une bonne concordance entre les prévisions analytiques et les simulations numériques.

Nomenclature

A	aspect ratio of the enclosure, L'/H'
g	gravitational acceleration
q'	constant heat flux, per unit area
t	dimensionless time, $t'/(σ H'^2/α)$
T	dimensionless temperature
(x, z)	dimensionless coordinate system
$(u_{1,2}, w_{1,2})$	dimensionless velocity terms

Greek symbol

$α_{1,2}$	thermal diffusivity (fluid _{1,2}),
$α_r$	ratio of thermal diffusivity
$β_{1,2}$	thermal expansion coefficient fluid _{1,2}
$β_r$	ration of the thermal expansion coefficient,
$β_2/β_1$	

$λ_{1,2}$	thermal conductivity of the fluid _{1,2}
$λ_r$	ration of the thermal conductivity
$ν_{1,2}$	kinematics viscosity of the fluid _{1,2}
$ν_r$	ration of the kinematics viscosity, $ρ_{1,2}$
	density of the fluid _{1,2}
$ρ_r$	ration of the density, $ρ_2/ρ_1$

Superscript

'	dimensionless variable
---	------------------------

Subscript

0	refers to the center of the cavity
T	temperature
$1,2$	fluid 1 or 2
r	ratio

References

- [1] Kalla, L., Vasseur, P., Bennacer, R., Beji, H. and Duval, R. (2001) "Double diffusive convection in a horizontal porous layer salted from the bottom and heated horizontally", *International communication of Heat and Mass Transfer*, Vol 28, pp. 1-10.
- [2] Lauriat, G. and Prasad, V. (1987) "Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for Brinkman-extended Darcy formulation", *Journal of Heat Transfer*, Vol 109, pp. 688-696.
- [3] Mohamad, A. A. and Bennacer, R. (2001) "Natural convection in a confined saturated porous medium with horizontal temperature and vertical solutal gradients", *International Journal of thermal Science*, Vol 40, pp. 82-93.
- [4] Mamou, M., Vasseur, P. and Bilgen, E. (1998) "Double-diffusive convection instability in a vertical porous enclosure", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 368, pp. 263-289.
- [5] Vasseur, P., Robillard L. and Anochiravani, I. (1986) "Natural convection in a shallow cavity heated from the side with a uniform heat flux", *Chemical Engineering Communication*, Vol 46, pp. 129-146.