



**HAL**  
open science

## Convection naturelle instationnaire dans une enceinte bidimensionnelle carrée - Bifurcation vers le chaos -

Salah Laouar, Lamia Abada, El-Hacene Mezaache, Michel Daguenet

► **To cite this version:**

Salah Laouar, Lamia Abada, El-Hacene Mezaache, Michel Daguenet. Convection naturelle instationnaire dans une enceinte bidimensionnelle carrée - Bifurcation vers le chaos -. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. 5p. hal-00157423

**HAL Id: hal-00157423**

**<https://hal.science/hal-00157423>**

Submitted on 29 Aug 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CONVECTION NATURELLE INSTATIONNAIRE DANS UNE ENCEINTE BIDIMENSIONNELLE CARREE

## -Bifurcation vers le chaos-

Salah LAOUAR<sup>1</sup>, Lamia ABADA<sup>1</sup>, El-hacene MEZAACHE<sup>1</sup>, Michel DAGUENET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire LRPCSI, Université de Skikda, BP 26, Algérie

<sup>2</sup>Université de Perpignan, 52 Avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan Cedex, France  
*saidalahdz@yahoo.fr*

### Résumé :

Dans ce travail numérique on se propose d'identifier la route vers le chaos empruntée par le système au sein d'une cavité carrée contenant de l'air. Les parois verticales sont différentiellement mais nonuniformément chauffées. Les parois horizontales sont adiabatiques. Les équations sont en formulation « fonction de courant-vorticité » et intégrées à l'aide des différences finies. Nous étudions le comportement thermique du système par variation du nombre de Rayleigh. L'observation des trajectoires dans un plan de phase approprié et la coupe de Poincaré ont permis la caractérisation des régimes d'écoulements.

### Mots clés :

Convection naturelle / Bifurcation / cycle limite / quasi-périodicité / chaos / Lyapunov

## 1. INTRODUCTION

Dans le domaine de l'ingénierie, les enceintes fermées et différentiellement chauffées présentent un intérêt particulier. Le cas du refroidissement des circuits électroniques ou électriques dans des boîtes fermées sont d'excellents exemples. Les premières études ont porté sur les écoulements en régime permanent [1-2]. Le cas de régimes convectifs transitoires est dû principalement à l'existence d'instabilités dynamiques et thermiques aux voisinages des parois [3]. En ce qui concerne l'identification des routes vers le chaos, on peut consulter [4-6]. Le cas d'une paroi non uniformément chauffée (c'est le cas par exemple, d'un radiateur mis sous la fenêtre d'une chambre de maison) a été mentionné par Küblbeck *et al.* [7]. Sous certaines conditions, ils ont observé le régime oscillatoire caractérisé par deux cellules convectives changeant de places périodiquement.

A notre connaissance, le cas de parois non uniformément chauffées n'a pas fait l'objet de travaux suffisants, pourtant cette configuration nous paraît particulièrement intéressante dans les systèmes énergétiques. Dans ces mêmes conditions, Laouar *et al.* [8] ont identifié un scénario à 3 fréquences incommensurables. Ce travail corrige et complète certaines données de [8], par la caractérisation des différents régimes observés, à savoir, le traçage des sections de Poincaré, l'étude de la sensibilité aux conditions initiales (SCI) et le calcul du plus grand exposant de Lyapunov.

## 2. ANALYSE DU PROBLEME

Nous considérons une enceinte carrée. Avant l'instant initial l'air est à une température moyenne  $T=(T_c+T_f)/2$ . A l'instant initial, les températures imposées et constantes sur les parois verticales sont indiquées sur la *figure 1*. Les parois horizontales sont adiabatiques.

Nous supposons l'air incompressible et s'adapte au model de Boussinesq. On néglige le rayonnement, le travail dû à la variation de volume et la dissipation visqueuse.

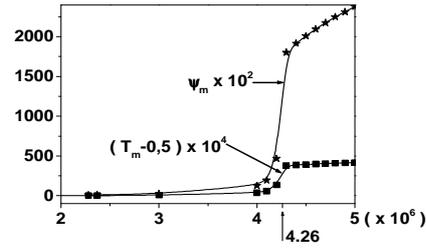
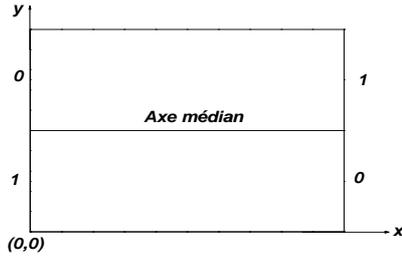


Figure 1 : Détails de l'enceinte  
 Figure 2 : Diagramme de bifurcation  
 En formulation fonction de courant-vorticité, les équations adimensionnées sont :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \omega - \text{Pr} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \omega - \text{Pr} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \text{Ra} \cdot \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u T - \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v T - \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \text{ Avec } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\text{Sur les frontières : } \begin{cases} T = 1 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \text{ et } 0 \leq y < 1/2 \\ x = 1 \text{ et } 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \text{ et } T = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \text{ et } 1/2 < y \leq 1 \\ x = 1 \text{ et } 0 \leq y < 1/2 \end{cases} \\ T = 1/2 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \text{ } y = 1/2 \\ x = 1 \text{ } y = 1/2 \end{cases} \text{ et } T = 1/2 \text{ à l'instant initial} \\ u = v = \psi = 0 \text{ et sur les parois adiabatiques, } \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0,1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

### 3. RESOLUTION NUMERIQUE

Nous avons choisi un maillage uniforme de sorte que le nœud (1,1) se trouve à l'origine des coordonnées et le nœud (n,m) est de coordonnées (1,1). Les équations précédentes sont discrétisées en approchant les dérivées partielles par des différences finies. Les équations du mouvement et de l'énergie sont intégrées par la méthode implicite des directions alternées (ADI). L'équation de la vorticité est résolue par la méthode de sur-relaxation successive (SOR). Pour l'évaluation de la vorticité sur les frontières, nous avons procédé à une extrapolation à partir des nœuds voisins intérieurs. Concernant le critère de convergence des solutions, nous avons opté pour une variation inférieure à  $10^{-5}$  sur tous les nœuds.

Une étude préliminaire sur la stabilité des solutions numériques nous a conduit à choisir un maillage de (111x111) et un pas de temps de  $10^{-5}$ , pour les solutions relatives à  $\text{Ra} \leq 5 \cdot 10^6$  et un maillage de (141x141) et un pas de temps de  $2 \cdot 10^{-6}$ , pour les solutions relatives à un nombre de Rayleigh autour de  $10^7$ . Le code de calcul développé est validé à moins de 1% à partir des résultats stationnaires [9].

### 4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

#### 4. 1. Du point limite au cycle limite

Pour Rayleigh inférieur à la valeur critique de bifurcation point limite-cycle limite, les solutions tendent à grand temps vers le régime stationnaire stable, caractérisé par deux courants symétriques par rapport à l'axe médian et tournant dans les sens horaire et anti-horaire. La convection est oscillante au voisinage du point de bifurcation.

A partir de  $Ra = 4,2 \cdot 10^6$ , la solution commence à subir une transformation brutale caractéristique d'une bifurcation de Hopf sous critique<sup>1</sup>. L'analyse graphique des variations de l'amplitude maximale des signaux  $\psi_m$  et  $T_m - 0,5$  en fonction de Rayleigh donne une valeur critique du paramètre de contrôle très voisine de  $4,26 \cdot 10^6$ , *figure 2*.

Le cycle limite stable persiste jusqu'à  $Ra \approx 9,7 \cdot 10^6$ . Pour  $Ra \approx 9,8 \cdot 10^6$  le spectre de Fourier comporte en plus du pic fondamental à la fréquence adimensionnelle 234,98 et de ses harmoniques de rangs impairs, des pics de très faibles amplitudes, annonçant le début du régime quasi périodique. Sur les *figures 3-4* on a représenté le plan de phase ( $\psi_m, d\psi_m/dt$ ) pour  $Ra = 9,7 \cdot 10^6$  et  $9,8 \cdot 10^6$ . Noter que pour la dernière valeur, la trajectoire est plus épaisse.

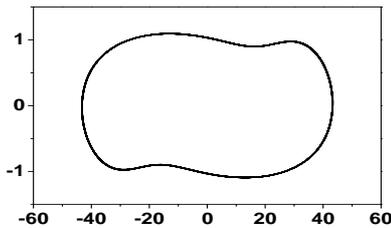


Figure 3 : plan de phase ( $\psi_m, d\psi_m/dt$ )

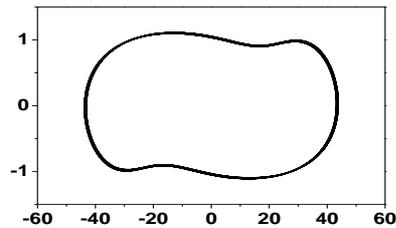


Figure 4 : plan de phase ( $\psi_m, d\psi_m/dt$ )

#### 4. 2. La quasi périodicité et l'accrochage

La coupe de Poincaré relative à  $Ra = 9,8 \cdot 10^6$ , *figure 5*, est une stroboscopie des valeurs de  $\psi_m$  et de  $d\psi_m/dt$  à la fréquence la plus énergétique. Il s'agit d'une bifurcation de Hopf supercritique, tableau 1. La deuxième fréquence apparaît avec une amplitude relativement nulle, alors qu'au voisinage de la bifurcation, les deux fréquences restent inchangées.

La *figure 6* est caractéristique d'un régime quasi-périodique à deux fréquences, le rapport  $f_1/f_2$  est irrationnel. L'augmentation de Rayleigh, fait apparaître un phénomène d'accrochage. Sur la *figure 7*, on observe les principaux paliers d'accrochages. A partir de  $Ra = 14,00 \cdot 10^6$ , un faible bruit annonciateur du chaos fait son apparition dans le spectre d'amplitude de la *figure 8*.

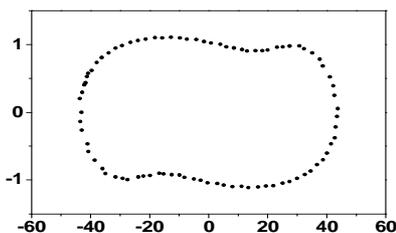


Figure 5 : Coupe de Poincaré  $Ra = 9,8 \cdot 10^6$

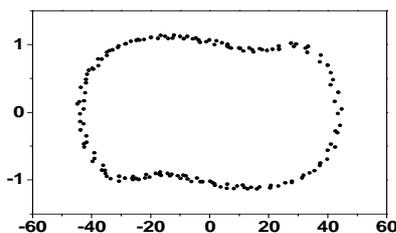


Figure 6 : Coupe de Poincaré  $Ra = 9,9 \cdot 10^6$

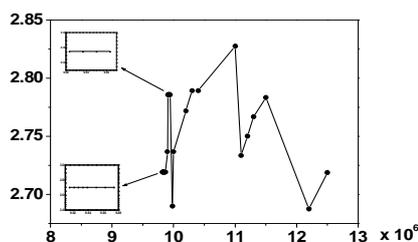


Figure 7 : Evolution du rapport  $f_1/f_2$

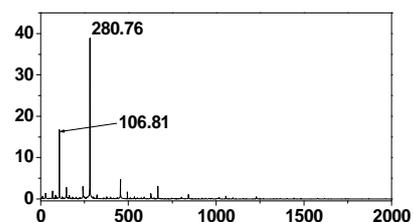


Figure 8 : Spectre d'amplitude  $Ra = 14,0 \cdot 10^6$

<sup>1</sup> Se reporter à l'ouvrage de P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, « L'ordre dans le chaos », édition Hermann

Ra x 10 <sup>-6</sup>	Fréquences : (f <sub>1</sub> est la plus énergétique)	Observations
2,20		Stationnaire
2,28	f <sub>1</sub> = 117,80 + harmoniques de rangs impairs	Cycle limite instable
2,28 < Ra < 4,26	Idem avec variation croissante de f <sub>1</sub>	
<b>4,26</b>	<b>Nombre de Rayleigh critique, correspondant à une bifurcation de Hopf sous critique</b>	
4,40	f <sub>1</sub> = 161,13 + harmoniques de rangs impairs	Cycle limite stable
4,40 < Ra ≤ 9,81	Idem avec variation croissante de f <sub>1</sub>	
<b>9,81 &lt; Ra &lt; 9,82 Zone de transition cycle limite stable-tore T<sup>2</sup></b>		
9,82 ≤ Ra ≤ 9,87	f <sub>1</sub> = 236,51 ; f <sub>2</sub> = 86,98 + les harmoniques : 2f <sub>1</sub> - f <sub>2</sub> , 2f <sub>1</sub> + f <sub>2</sub> , 3f <sub>1</sub> , 4f <sub>1</sub> - f <sub>2</sub> , 4f <sub>1</sub> + f <sub>2</sub> , 5f <sub>1</sub> , ...	Bifurcation de Hopf super critique (Stabilité marginale)
9,90 ≤ Ra ≤ 14,00	Idem avec variations croissantes de f <sub>1</sub> et f <sub>2</sub>	Succession de régimes quasi-périodiques et périodiques
>14,00	<b>spectre entouré de bruit</b>	<b>Attracteur étrange</b>

Tableau 1: Résultats de l'analyse spectrale des signaux T<sub>m</sub>-0,5 et ψ<sub>m</sub>

### 4. 3. Le chaos et la sensibilité aux conditions initiales

Au delà de Ra = 14,00 10<sup>6</sup>, l'écoulement est chaotique. Les figures 9-10 sont relatives à un tel comportement. Notez le désordre du nuage de points dans l'espace de coupe de Poincaré de la figure 10. La grande sensibilité aux conditions initiales (CI) est mise en évidence pour Ra=30.10<sup>6</sup>. En effet, la solution numérique change qualitativement suite à un changement infinitésimal dans la condition initiale sur la température de l'ordre de 10<sup>-8</sup>. La figure 11 illustre ce changement. Le calcul du plus grand exposant de Lyapunov donne une valeur positive de l'ordre de 300, figure 12. Cependant le calcul de la dimension fractale de l'attracteur comporte des risques d'erreurs à cause de l'importance du niveau de bruit.

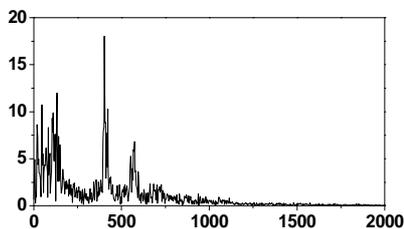


Figure 9 : Spectre d'amplitude Ra = 30.10<sup>6</sup>

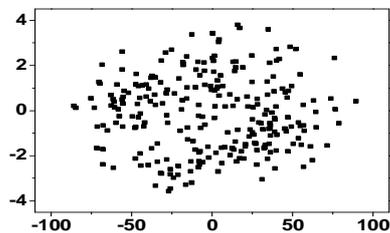


Figure 10 : Coupe de Poincaré (ψ<sub>m</sub>, dψ<sub>m</sub>/dt)

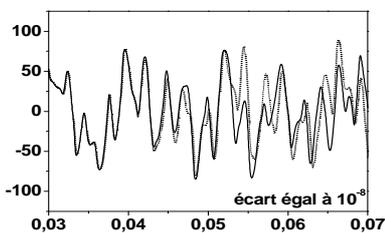


Figure 11 : Sensibilité aux CI

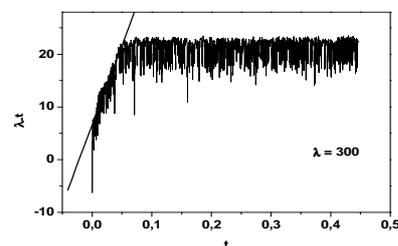


Figure 12 : Evolution de l'écart initial

## CONCLUSION

La variation du paramètre de contrôle a conduit le système d'une solution stationnaire (attracteur : point limite) à une solution périodique (attracteur : cycle limite) via une bifurcation de Hopf sous-critique. Le nombre de Rayleigh critique est égal à 4,26 10<sup>6</sup> dans le

sens croissant. Une seconde bifurcation, cette fois ci, super-critique transforme la solution périodique en une solution quasi-périodique à deux fréquences (attracteur : Tore  $T^2$ ). Une suite de régimes quasi-périodiques et périodiques à cause du phénomène d'accrochage est observée. Le régime est franchement chaotique, pour  $Ra > 14,00 \cdot 10^6$ . En effet, pour  $Ra=30 \cdot 10^6$ , un bruit caractéristique des régimes chaotiques envahit le spectre d'amplitude.

## Nomenclature

$T$	Température adimensionnelle $T=(T^*-T_f)/(T_c-T_f)$	Symboles grecs	$\omega$	Vorticité adimensionnelle ( $\omega = \omega^* L^2/a$ )
$(x, y)$	Coordonnées cartésiennes adimensionnées $(x,y)=(x^*,y^*)/L$	$\Psi$	Fonction de courant adimensionnelle ( $\psi = \psi^*/a$ )	
$t$	Temps adimensionnel ( $t=t^* a/L^2$ )	$\beta$	Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$	
$u$	Vitesse adimensionnelle suivant l'axe $x$ ( $u=u^* L/a$ )	$\nu$	Viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$	
$v$	Vitesse adimensionnelle suivant l'axe $y$ ( $v=v^* L/a$ )	Indices		
$Ra$	Nombre adimensionnel de Rayleigh ( $Ra=g\beta(T_c-T_f)L^3/\nu a$ )	$c$	Chaud	
$Pr$	Nombre adimensionnel de Prandtl ( $Pr=\nu/a$ )	$f$	Froid	
$g$	Accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$	$m$	centre de l'enceinte	
$a$	Diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$	Exposant		
$L$	Hauteur de l'enceinte carrée, $m$	*	grandeurs dimensionnées	

## Références

- [1] S. Ostrach, Natural convection in enclosures, *Advances in Heat Tr.*, Vol. 8, pp. 161-227, 1972.
- [2] A. Bejan, *Convection heat transfer*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [3] V. F. Nicolette, K. T. Yang, J. R. Lloyd, Transient cooling by natural convection in a two-dimensional square enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, N° 9, pp. 1721-1732, 1985.
- [4] J. P. Gollub, S. V. Benson, Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.* Vol. 100, part 3, pp. 449-470, 1980.
- [5] S. Paolucci, D. R. Chenoweth, Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity, *J. Fluid Mech.*, vol. 201, pp. 379-410, 1989.
- [6] A. Skouta, M. A. Randriazanamparany, M. Daguénet, Etude Numérique de la Convection Naturelle Instationnaire Bidimensionnelle dans une Enceinte Allongée, de Grand Axe Horizontale et de Section Carrée, Incliné eu égard au Plan Horizontal et Chauffée par deux cotés opposés, *Int. J. Therm. Sci.*, 40, 352-365, 2001.
- [7] K. Küblbeck, G. P. Merker, J. Straub, Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 203-217, 1980.
- [8] S. Laouar, E. Mezaache, M. Daguénet, Bifurcation to chaos in a non-uniformly heated vertical square cavity, *International Meeting on Heat Transfer*, Tanger, Morocco, Vol. 1, pp. 263-266, (November, 15-17, 2005).
- [9] G. De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.