HAL
open science

Modèle réduit pour une équation d'advection-diffusion par modes de branche

Frédéric Joly, Olivier Quemener, Alain Neveu

▶ **To cite this version:**

Frédéric Joly, Olivier Quemener, Alain Neveu. Modèle réduit pour une équation d'advection-diffusion par modes de branche. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. 5p. hal-00156727

HAL Id: hal-00156727

https://hal.science/hal-00156727

Submitted on 29 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODELE REDUIT POUR UNE EQUATION D'ADVECTION-DIFFUSION PAR MODES DE BRANCHE

Frédéric JOLY, Olivier QUEMENER, Alain NEVEU

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
40 rue du Pelvoux ,CE1455 Courcouronnes 91020 Evry Cédex
f.joly@iut.univ-evry.fr, o.quemener@iut.univ-evry.fr, a.neveu@iut.univ-evry.fr

Résumé : Nous proposons ici une méthode originale permettant de réduire un problème d'advection diffusion dans un solide en rotation, dans lequel les paramètres peuvent être instationnaires et non linéaires. L'application traitée correspond à un disque en rotation rapide à vitesse variable, subissant des sollicitations volumiques et surfaciques instationnaires. La comparaison entre modèle complet et modèle réduit fait apparaître un gain en temps de calcul de l'ordre de 150, pour une erreur maximum inférieure à 10%.

Mots clés :

Modèle réduit, Analyse modale, Advection-diffusion, Modes de Branche

1. INTRODUCTION

Dans le domaine de la réduction de modèle, dont un des objectifs est d'obtenir un important gain de temps de calcul pour une précision satisfaisante, la méthode modale a fait la preuve de son efficacité. Celle-ci permet de reconstituer l'évolution temporelle d'un champ de température au moyen de quelques champs particuliers obtenus par résolution d'un problème aux valeurs propres associé au problème physique traité.

Une première technique dite classique, déjà été utilisée pour des problèmes d'advection diffusion, ne permet que la réduction de problème thermiques à paramètres constants [1] [2].

Neveu *et al.* ont proposé une méthode modale originale pour résoudre l'équation de la chaleur en diffusion pure. Les modes utilisés sont des 'modes de branches' qui sont calculés en utilisant une condition particulière dite de Steklov. Ces modes forment une base qui a l'énorme avantage d'avoir été calculée indépendamment des conditions limites. On peut ainsi les utiliser pour résoudre un problème non linéaire instationnaire [3]. Cette technique avait déjà été adaptée à un problème d'advection diffusion [4], mais les résultats obtenus restaient très limités puisque la méthode n'était utilisable qu'à une très faible vitesse, incompatible avec toute application réelle. Nous présentons ici la méthode générale de branche pour tout problème d'advection-diffusion, quelque soit la vitesse.

2. LES MODES DE BRANCHE POUR UN PROBLEME AVEC TRANSPORT

2.1. Description du problème physique

Nous étudions un disque 2D de rayon R, de capacité thermique c_0 et de conductivité thermique k_0 constantes (figure 1a), et en rotation autour de son axe à une vitesse angulaire ω. Ce disque reçoit dans un sous domaine Ω_2 un flux surfacique P, et échange de la chaleur sur une partie de sa frontière avec un coefficient de convection h_0 variable le long de sa frontière.

En utilisant comme échelle R pour la longueur, c_0R^2/k_0 pour le temps, $k_0/(R^2\Delta T)$ pour la puissance surfacique, ωR pour la vitesse, le problème adimensionné s'écrit :

$$\forall M \in \Omega_{1,2}, \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - Pe\vec{U}.\vec{\nabla}T + \pi_{1,2} \tag{1}$$

où $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 100.f_1(t)$, et $Pe = 10^5.f_2(t)$

$$\forall M \in \Gamma_i, \vec{\nabla}T = Bi_i\left(T - Tf_i\right) \tag{2}$$

où $Bi_{1,3} = 0$, $Bi_{2,4} = 10.(1+ f_2(t))$, $Tf_2 = -1$ et $Tf_4 = 1$

Ce problème fait intervenir 2 fonctions temporelles représentées sur la figure 1b, et 2 nombres sans dimension, le nombre de Péclet et le nombre de Biot donnés respectivement par

$$Pe = \frac{C_0U_0R}{k_0} \qquad Bi = \frac{Lh_0}{k_0} \tag{3}$$

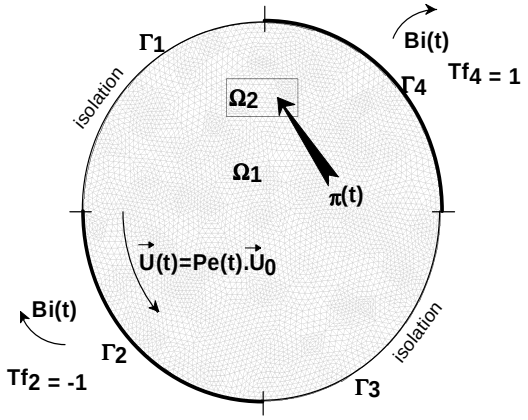

Figure 1a : Géométrie étudiée

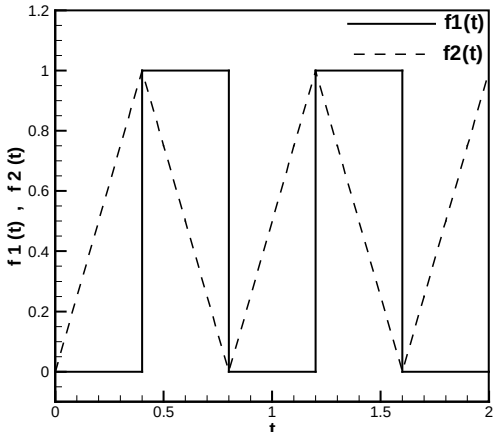

Figure 1b : Evolution temporelle des paramètres

2.2. Définition du problème de branche

Le problème de branche associé au problème physique posé est défini par les équations suivantes :

$$\forall M \in \Omega_1 \oplus \Omega_2, \quad \nabla^2 V_i - Pe_0 \vec{U}_0 \vec{\nabla} V_i = z_i V_i, \tag{4}$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4, \quad \vec{\nabla}T = -\varsigma z_i V_i, \tag{5}$$

où z_i et V_i correspondent respectivement à la i-ème valeur propre et au i-ème vecteur propre du problème posé. Il est nécessaire d'obtenir également la base modale adjointe$\{z_i^*, V_i^*\}$, définie par les mêmes équations avec une vitesse inversée [2], [4].

On note que la condition limite est indépendante des conditions physiques, ce qui confère à la base une grande richesse et la rend utilisable quelque soit les conditions limites. Par ailleurs l'équation définie sur le domaine nécessite le choix d'un nombre de Péclet fixe, qui détermine la base. Le nombre de Steklov ς est un paramètre nécessaire pour assurer l'homogénéité de l'équation (7). Sa valeur est fixée à 1 pour le problème de branche adimensionné.

3. RESOLUTION DU PROBLEME

La forme variationnelle faible des équations physiques (1)-(2), et de branche (4)-(5) sont discrétisées selon une méthode éléments finis P1, sur un maillage de 4785 nœuds. Une régularisation de type 'SUPG' est appliquée sur le terme de transport pour $Pe>>1$.

3.1. Obtention du modèle réduit

Le champ de température est décomposable sur la base modale selon :

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \approx \sum_{i=1}^{N_0} x_i V_i \ , \tag{7}$$

où les x_i sont des coefficients de pondération appelés états.

L'intérêt de la méthode réside dans le fait qu'un nombre réduit N_0 de modes permet une reconstitution satisfaisante du champ thermique. La projection de la forme variationnelle faible de (1)-(2) sur la base modale donne un système d'équations dont les inconnues sont les états et qui est de dimension N_0 :

$$z_i x_i - Bi \sum_{k=1}^{N_0} \int_{\Gamma} V_k \overline{V}_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \pi \overline{V}_i^* d\Omega + Bi \int_{\Gamma} Tf . \overline{V}_i^* d\Gamma = \sum_{k=1}^{N_0} \left(\delta_{i,k} - \int_{\Gamma} \varsigma V_k \overline{V}_i^* d\Gamma \right) \frac{dx_k}{dt} \tag{8}$$

3.2 Résolution Temporelle

La discrétisation temporelle se fait selon un schéma Euler implicite d'ordre 1 à pas de temps variable. Ce schéma fait apparaître un système linéaire à coefficients variables qui est résolu par des solveurs adaptés : un algorithme BICGSTAB préconditionné par sa diagonale est utilisé pour le modèle complet, et un algorithme LU pour le modèle réduit.

3.3. Obtention des modes de branche

Le problème aux valeurs propres généralisés ainsi obtenu est résolu par une méthode d'Arnoldi, en adaptant la routine 'dndrv6.f' de Arpack. Nous sommes ainsi capable de déterminer les valeurs propres pour un nombre de Péclet supérieur à 10^4.

4. RESULTATS

4.1 La base de branche

La représentation du spectre des modes permet de faire apparaître 3 familles de modes: des modes surfaciques, des modes volumiques réels (sans transport) et des modes volumiques complexe (avec transport) (voir figure 3) . La base est donc riche est pourra reconstituer des champs soumis à des sollicitations volumiques et surfaciques.

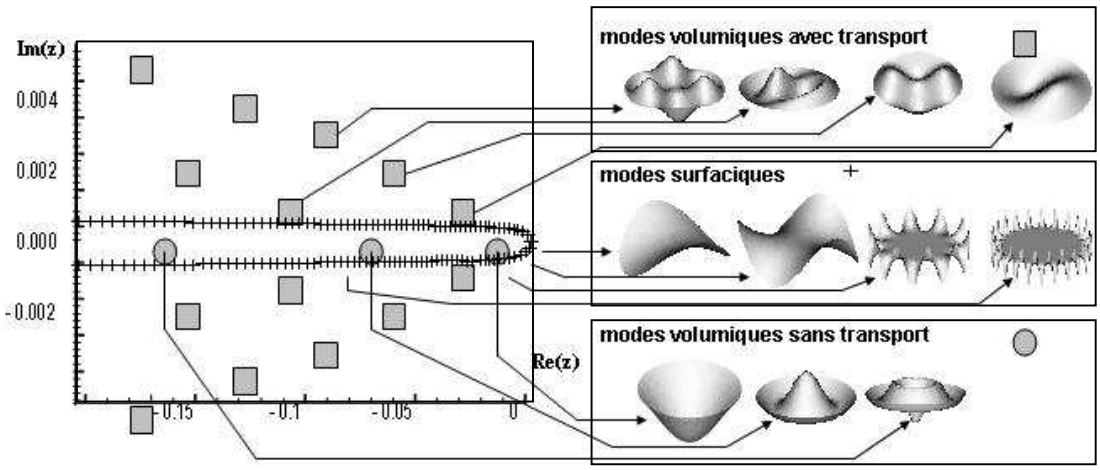

Figure 3 : spectre et famille de modes de branche pour *Pe* =10

Le tableau 1 indique le nombre de modes nécessaires pour reconstituer un champ statique à un nombre de Péclet donné pour des bases calculées à un autre nombre de Péclet. Il apparaît nettement qu'une base calculée à un faible nombre de Péclet (*Pe = 0* inclus) est

capable de reconstituer un champ à haut nombre de Péclet, mais que l'inverse n'est pas vrai. Pour un problème physique dans lequel la vitesse évolue de $Pe = 0$ à $Pe = 10^5$, on montre que la base optimum doit être calculée à $Pe = 10$.

Solution complète	$Pe = 0$	$Pe = 1$	$Pe = 10$	$Pe = 100$	$Pe = 1000$	$Pe = 10^5$
Base						
$Pe = 0$	36	36	48	49	29	4
$Pe = 10$	35	33	43	44	26	4
$Pe = 10^4$	462	452	502	373	11	3

Tableau 1 : Nombre de modes nécessaires pour retrouver la solution modèle complet avec une erreur moyenne inférieure à 1 %

3.4. Résolution du modèle réduit et reconstruction du champ de température

Le choix des modes gardés dans la base réduite est obtenu par projection sur la base modale de quelques champs de température statique pour lesquels les nombre de Peclet balaye le domaine de vitesse correspondant au problème physique. En gardant le même nombre de modes les plus énergétiques pour chaque cas, on obtient finalement la base réduite.

L'ensemble des résultats de précision et de gain de temps de calculs sont présentés dans le tableau 2. ε_{max} représente l'erreur maximale en temps et en espace durant la simulation, ε_{moy} le maximum sur l'ensemble de la simulation de l'erreur moyennée en espace et $<\varepsilon_{moy}>$ l'erreur moyennée en temps et en espace.

	Modèle complet	*Base de 200 modes*	*Modèle réduit d'ordre n*							
			9	*19*	*40*	*58*	*77*	*96*	*106*	*178*
$\varepsilon_{max}(\%)$			*37.3*	*21.3*	*11.9*	*9.1*	*8.5*	*7.0*	*6.5*	*4.3*
$\varepsilon_{moy}(\%)$			*8.4*	*3.2*	*1.8*	*1.2*	*0.9*	*0.7*	*0.6*	*0.4*
$<\varepsilon_{moy}>(\%)$				*1.5*	*0.3*	*0.2*	*0.2*	*0.2*	*0.1*	*0.1*
t_{CPU} *(s)*	*20356*	*76*	*24*	*30*	*72*	*141*	*276*	*541*	*611*	*3671*

Tableau 2 : Comparaison modèle complet – modèles réduits

On remarque que pour avoir une erreur maximale inférieure à 10 %, 58 modes sont nécessaires, et cela entraîne un gain de temps de calcul de l'ordre de 150. Ce gain de temps prend en compte le temps CPU de projection des modes pour la réduction.

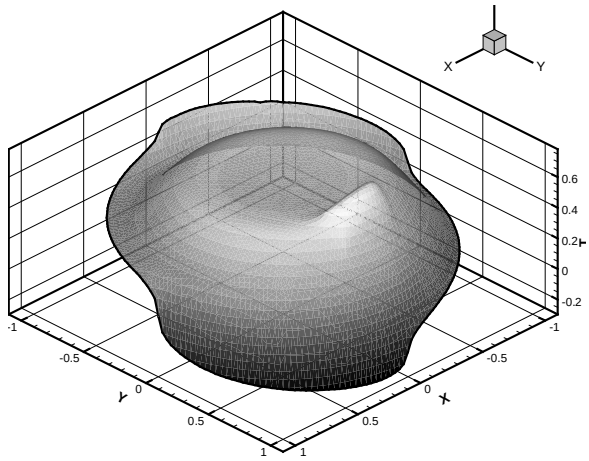

Figure 4a : Champ complet

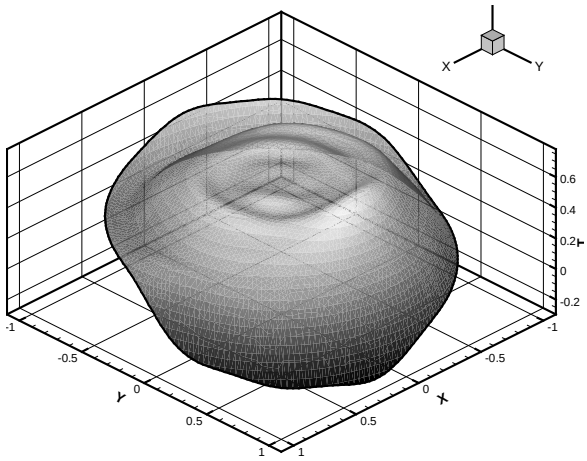

Figure 4b : Champs réduit 58 modes

Figure 4 : Comparaison du champ thermique au temps où l'erreur est maximum (t = 1.61s)

Sans surprise l'erreur maximum entre le modèle complet et le modèle réduit se situe à t = 0.81 et t = 1.61, c'est à dire lorsque les sollicitations varient brutalement (voir figure 1b). Les champs de température obtenus par la résolution du modèle complet et du modèle réduit à l'instant ou l'erreur est maximale (t = 1.61) sont représentés sur les figures 4a et 4b. Le champ de température, spatialement complexe avec des sollicitations volumiques et surfaciques, est cependant bien représenté par le modèle réduit. Le tableau 2 ainsi que les figure 4a et 4b montrent que cette erreur est localisée en espace, puisque l'erreur moyennée en espace ne dépasse pas 1.2% au cours de la simulation. De plus, l'erreur est aussi localisée en temps, puisque l'erreur moyenne sur l'ensemble de la simulation est de l'ordre de 0.2%.

CONCLUSION

L'étude présentée à permit de montrer l'efficacité de la méthode de réduction modale par mode de branches pour un problème d'advection-diffusion, dans un cas très général caractérisé par de très fortes vitesses variant dans le temps et des conditions aux limites variables elles aussi dans le temps. Pour une erreur maximum ne dépassant pas 10%, et une erreur moyenne de l'ordre de 1%, le calcul réduit est 144 fois plus rapide que le modèle complet. Le temps d'obtention des modes n'intervient qu'une seule fois et aura une influence d 'autant plus faible que les calculs sont répétitifs. On voit ainsi l'intérêt de ce type de méthode pour des problèmes de sensibilités de paramètres ou de calculs d'identifications. Ce travail ouvre ainsi des perspectives intéressantes en terme d'applications industrielles souvent caractérisée par de fortes vitesses, tel que les problèmes de freinage.

Nomenclature

Bi	nombre de Biot
Pe	nombre de Peclet
T	température
U	vecteur vitesse
V	vecteur propre
z,	valeur propre

Symboles grecs

π	puissance volumique

exposant, Indices

*	mode adjoint
i	indice du mode

Références

[1] J. SICARD, P. BACOT, A. NEVEU, Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 28, n°1, pp. 111-123, 1985

[2] O. QUEMENER, J.L. BATTAGLIA, A. NEVEU, Résolution d'un problème inverse par utilisation d'un problème réduit modal. Application au frottement d'un disque sur un pion en rotation, *Int. J. Thermal Science*, Vol 42, pp. 361-378, 2003.

[3] A. NEVEU, K. EL KHOURY, B. FLAMENT, Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche, *Int J. Thermal Science*, Vol 38, pp. 289-340, 1999.

[4] O. QUEMENER, E. VIDECOQ, A. NEVEU, Réduction par modes de branche : Etude d'une disque tournant à vitesse variable et frottant sur un patin, *Congrès SFT*, pp. 625-629, juin 2003.